Curve di genere piccolo e spazi di moduli collegati

Lezione inaugurale del Consorzio Dottorale INdAM - Milano Bicocca - Pavia

Alessandro Verra

Pavia 5 novembre 2015

1. Curve di genere piccolo

Modelli proiettive di curve algebriche

C = *superficie di Riemann compatta e connessa di genere g*

- In infiniti modi C ammette immersioni in uno spazio proiettivo

$$C \subset \mathbf{P}^r$$

1

[1] Si ha *deg* $h = d$, dove $d = $ *deg* H. Se dim $V = r + 1$ si dice che $|V|$ è una g^r_d.

Modelli proiettive di curve algebriche

$$C \;=\; \textit{superficie di Riemann compatta e connessa di genere } g$$

- In infiniti modi C ammette immersioni in uno spazio proiettivo

$$C \subset \mathbf{P}^r$$

- Il legame con tali immersioni è rappresentato dal gruppo di Picard

$$\mathrm{Pic}\, C.$$

1

[1] Si ha *deg* $h = d$, dove $d =$ *deg* H. Se dim $V = r + 1$ si dice che $|V|$ è una g^r_d.

Modelli proiettive di curve algebriche

$$C \;=\; \textit{superficie di Riemann compatta e connessa di genere } g$$

- In infiniti modi C ammette immersioni in uno spazio proiettivo

$$C \subset \mathbf{P}^r$$

- Il legame con tali immersioni è rappresentato dal gruppo di Picard

$$\mathrm{Pic}\, C.$$

- $H \in \mathrm{Pic}\, C$ e $V \subset H^0(H)$ definiscono infatti la *serie lineare*

$$|V| := \{h \subset C \;/\; h = div(s),\; s \in V - \{0\}\} = \mathbf{P}V,$$

dove h è il luogo di annullamento della sezione globale s.

1

[1] Si ha $deg\ h = d$, dove $d = deg\ H$. Se $\dim V = r + 1$ si dice che $|V|$ è una g^r_d.

- $|V|$ definisce una mappa razionale naturale

$$f_{H,V} : C \to \mathbf{P}^r := \mathbf{P}V^*.$$

[2] Notazioni: se $V = H^0(H)$ porremo $|H| := |V|$ e $f_H := f_{H,V}$.

- $|V|$ definisce una mappa razionale naturale

$$f_{H,V} : C \to \mathbf{P}^r := \mathbf{P}V^*.$$

- Sia $x \in C$ un punto generale allora

$$y := \{h \in |V| \ / \ x \in h\}$$

è un iperpiano in $\mathbf{P}V$. Per definizione $f_{H,V}(x) = y$.

[2] Notazioni: se $V = H^0(H)$ porremo $|H| := |V|$ e $f_H := f_{H,V}$.

- $|V|$ definisce una mappa razionale naturale

$$f_{H,V} : C \to \mathbf{P}^r := \mathbf{P}V^*.$$

- Sia $x \in C$ un punto generale allora

$$y := \{h \in |V| \ / \ x \in h\}$$

è un iperpiano in $\mathbf{P}V$. Per definizione $f_{H,V}(x) = y$.

- Se $f_{H,V}$ è un embedding la sua immagine

$$C \subset \mathbf{P}^r$$

è un modello proiettivo di grado d della curva considerata. [2]

---

[2] Notazioni: se $V = H^0(H)$ porremo $|H| := |V|$ e $f_H := f_{H,V}$.

- Lo studio di tutte le mappe razionali $f : C \to \mathbf{P}^r$ è il punto di partenza, anche storico, per lo studio geometrico di C.

- Lo studio di tutte le mappe razionali $f : C \to \mathbf{P}^r$ è il punto di partenza, anche storico, per lo studio geometrico di C.
- Esso si fonda sulla classica, e non meno moderna, teoria di Brill-Noether che ha come oggetto i luoghi

$$W_d^r(C) := \{H \in \operatorname{Pic} C \ / \ \deg H = d \ , \ \dim |H| \geq r\}.$$

- Lo studio di tutte le mappe razionali $f : C \to \mathbf{P}^r$ è il punto di partenza, anche storico, per lo studio geometrico di C.
- Esso si fonda sulla classica, e non meno moderna, teoria di Brill-Noether che ha come oggetto i luoghi

$$W^r_d(C) := \{H \in \operatorname{Pic} C \ / \ \deg H = d \ , \ \dim |H| \geq r\}.$$

- (Riemann) studiare i rivestimenti $f : C \to \mathbf{P}^1$ definiti da una g^1_d,

- Lo studio di tutte le mappe razionali $f : C \to \mathbf{P}^r$ è il punto di partenza, anche storico, per lo studio geometrico di C.
- Esso si fonda sulla classica, e non meno moderna, teoria di Brill-Noether che ha come oggetto i luoghi

$$W^r_d(C) := \{H \in \operatorname{Pic} C \ / \ \deg H = d \ , \ \dim |H| \geq r\}.$$

- (Riemann) studiare i rivestimenti $f : C \to \mathbf{P}^1$ definiti da una g^1_d,
- (Severi) studiare le mappe $f : C \to \mathbf{P}^2$ definite da una g^2_d,

- Lo studio di tutte le mappe razionali $f : C \to \mathbf{P}^r$ è il punto di partenza, anche storico, per lo studio geometrico di C.
- Esso si fonda sulla classica, e non meno moderna, teoria di Brill-Noether che ha come oggetto i luoghi

$$W^r_d(C) := \{H \in \operatorname{Pic} C \ / \ \deg H = d \ , \ \dim |H| \geq r\}.$$

- (Riemann) studiare i rivestimenti $f : C \to \mathbf{P}^1$ definiti da una g^1_d,
- (Severi) studiare le mappe $f : C \to \mathbf{P}^2$ definite da una g^2_d,
- *Numero di Brill-Noether:* $\rho(g, r, d) := g - (r + 1)(g - d + r)$.

- Lo studio di tutte le mappe razionali $f : C \to \mathbf{P}^r$ è il punto di partenza, anche storico, per lo studio geometrico di C.
- Esso si fonda sulla classica, e non meno moderna, teoria di Brill-Noether che ha come oggetto i luoghi

$$W^r_d(C) := \{H \in \mathrm{Pic}\, C \;/\; \deg H = d \;,\; \dim |H| \geq r\}.$$

- (Riemann) studiare i rivestimenti $f : C \to \mathbf{P}^1$ definiti da una g^1_d,
- (Severi) studiare le mappe $f : C \to \mathbf{P}^2$ definite da una g^2_d,
- *Numero di Brill-Noether:* $\rho(g, r, d) := g - (r + 1)(g - d + r)$.
- **Teorema**
  1. Se $\rho(g, r, d) \geq 0$ allora $W^r_d(C) \neq \emptyset$ e
  2. $\dim W^r_d(C) = \rho(g, r, d)$ se C è generica.

Il modello canonico

- D'altra parte si possono considerare mappe f_H determinate da fibrati lineari H univocamente determinati su ogni curva C.

Il modello canonico

- D'altra parte si possono considerare mappe f_H determinate da fibrati lineari H univocamente determinati su ogni curva C.
- 'E questo il caso del fibrato cotangente K_C che definisce la mappa

$$f_{K_C} : C \to \mathbf{P}^{g-1}$$

Il modello canonico

- D'altra parte si possono considerare mappe f_H determinate da fibrati lineari H univocamente determinati su ogni curva C.
- 'E questo il caso del fibrato cotangente K_C che definisce la mappa

$$f_{K_C} : C \to \mathbf{P}^{g-1}$$

- Se C non è iperellittica f_{K_C} determina un embedding

$$C \subset \mathbf{P}^{g-1}.$$

Diremo che $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ è canonica o canonicamente immersa.

- Sia $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ canonicamente immersa:

[3] Non trigonale.

[4] Non trigonale e non quintica piana

- Sia $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ canonicamente immersa:
- $g = 3$, C è una quartica piana,

[3] Non trigonale.
[4] Non trigonale e non quintica piana

- Sia $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ canonicamente immersa:
- $g = 3$, C è una quartica piana,
- $g = 4$, C è una intersezione completa (2,3) in $\mathbf{P}^3$,

[3] Non trigonale.

[4] Non trigonale e non quintica piana

- Sia $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ canonicamente immersa:

- $g = 3$, C è una quartica piana,
- $g = 4$, C è una intersezione completa (2,3) in $\mathbf{P}^3$,
- $g = 5$, C è intersezione completa (2,2,2) in $\mathbf{P}^4$, [3]

[3] Non trigonale.

[4] Non trigonale e non quintica piana

- Sia $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ canonicamente immersa:
- $g = 3$, C è una quartica piana,
- $g = 4$, C è una intersezione completa (2,3) in $\mathbf{P}^3$,
- $g = 5$, C è intersezione completa (2,2,2) in $\mathbf{P}^4$, [3]
- $g = 6$, $C = S \cap Q$ [4], dove Q e S indicano una ipersuperficie quadrica e una superficie di Del Pezzo di grado 5 in $\mathbf{P}^5$.

[3] Non trigonale.

[4] Non trigonale e non quintica piana

- Sia $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ canonicamente immersa:

- $g = 3$, C è una quartica piana,
- $g = 4$, C è una intersezione completa (2,3) in $\mathbf{P}^3$,
- $g = 5$, C è intersezione completa (2,2,2) in $\mathbf{P}^4$, [3]
- $g = 6$, $C = S \cap Q$ [4], dove Q e S indicano una ipersuperficie quadrica e una superficie di Del Pezzo di grado 5 in $\mathbf{P}^5$.

- Questa descrizione è classica:

[3] Non trigonale.

[4] Non trigonale e non quintica piana

- Sia $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$ canonicamente immersa:

- $g = 3$, C è una quartica piana,
- $g = 4$, C è una intersezione completa (2,3) in $\mathbf{P}^3$,
- $g = 5$, C è intersezione completa (2,2,2) in $\mathbf{P}^4$, [3]
- $g = 6$, $C = S \cap Q$ [4], dove Q e S indicano una ipersuperficie quadrica e una superficie di Del Pezzo di grado 5 in $\mathbf{P}^5$.

- Questa descrizione è classica:
- come si spiega il caso $g = 6$ e what's next?

[3] Non trigonale.

[4] Non trigonale e non quintica piana

Teoria di Mukai

- Per i modelli canonici successivi di genere $6 \leq g \leq 9$ la situazione è ben descritta da Mukai e anche per $g = 10, 11$.

[5] $G(n, V^*) :=$ Grassmanniana dei sottospazi di V di codimensione n. Sia $x \in C$ generale, allora $y := \{s \in V \ / \ s(x) = 0\}$ ha codimensione n. Per definizione $f_E(x) = y$.

Teoria di Mukai

- Per i modelli canonici successivi di genere $6 \leq g \leq 9$ la situazione è ben descritta da Mukai e anche per $g = 10, 11$.
- La teoria di Mukai riguarda i fibrati vettoriali stabili $E \to C$ di rango superiore $n \geq 2$ e determinante canonico: $\wedge^n E = K_C$.

[5] $G(n, V^*) :=$ Grassmanniana dei sottospazi di V di codimensione n. Sia $x \in C$ generale, allora $y := \{s \in V \ / \ s(x) = 0\}$ ha codimensione n. Per definizione $f_E(x) = y$.

Teoria di Mukai

- Per i modelli canonici successivi di genere $6 \leq g \leq 9$ la situazione è ben descritta da Mukai e anche per $g = 10, 11$.
- La teoria di Mukai riguarda i fibrati vettoriali stabili $E \to C$ di rango superiore $n \geq 2$ e determinante canonico: $\wedge^n E = K_C$.
- Sia $V = H^0(E)$ allora V definisce una mappa razionale

$$f_E : C \to G(n, V^*)^5$$

in modo del tutto analogo al caso di un fibrato lineare $H \to C$.

[5] $G(n, V^*) :=$ Grassmanniana dei sottospazi di V di codimensione n. Sia $x \in C$ generale, allora $y := \{s \in V \ / \ s(x) = 0\}$ ha codimensione n. Per definizione $f_E(x) = y$.

Teoria di Mukai

- Per i modelli canonici successivi di genere $6 \leq g \leq 9$ la situazione è ben descritta da Mukai e anche per $g = 10, 11$.
- La teoria di Mukai riguarda i fibrati vettoriali stabili $E \to C$ di rango superiore $n \geq 2$ e determinante canonico: $\wedge^n E = K_C$.
- Sia $V = H^0(E)$ allora V definisce una mappa razionale

$$f_E : C \to G(n, V^*)^5$$

in modo del tutto analogo al caso di un fibrato lineare $H \to C$.

- Per $6 \leq g \leq 9$ Mukai costruisce un E unicamente determinato da C.

[5] $G(n, V^*) :=$ Grassmanniana dei sottospazi di V di codimensione n. Sia $x \in C$ generale, allora $y := \{s \in V \ / \ s(x) = 0\}$ ha codimensione n. Per definizione $f_E(x) = y$.

- Da E si ricostruisce il modello canonico $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$.[6] Come?

[6] C sufficientemente generale. $\mathbf{P}^{N_g}$ indica lo spazio ambiente della immersione di Plücker di $\mathbb{M}_g$.

- Da E si ricostruisce il modello canonico $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$.[6] Come?
- $g = 6$: $h^0(E) = 5$ E ha rango 2,

$$f_E : C \to G(2,5) := \mathbb{M}_6 \subset \mathbf{P}^{N_6}$$

[6] C sufficientemente generale. $\mathbf{P}^{N_g}$ indica lo spazio ambiente della immersione di Plücker di $\mathbb{M}_g$.

- Da E si ricostruisce il modello canonico $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$.[6] Come?
- $g = 6$: $h^0(E) = 5$ E ha rango 2,

$$f_E : C \to G(2,5) := \mathbb{M}_6 \subset \mathbf{P}^{N_6}$$

- $g = 7$: $h^0(E) = 10$, E è 'ortogonale' di rango 5,

$$f_E : C \to OG(5,10) := \mathbb{M}_7 \subset \mathbf{P}^{N_7}$$

[6] C sufficientemente generale. $\mathbf{P}^{N_g}$ indica lo spazio ambiente della immersione di Plücker di $\mathbb{M}_g$.

- Da E si ricostruisce il modello canonico $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$.[6] Come?
- $g = 6$: $h^0(E) = 5$ E ha rango 2,

$$f_E : C \to G(2,5) := \mathbb{M}_6 \subset \mathbf{P}^{N_6}$$

- $g = 7$: $h^0(E) = 10$, E è 'ortogonale' di rango 5,

$$f_E : C \to OG(5,10) := \mathbb{M}_7 \subset \mathbf{P}^{N_7}$$

- $g = 8$: $h^0(E) = 6$, E ha rango 2,

$$f_E : C \to G(2,6) := \mathbb{M}_8 \subset \mathbf{P}^{N_8}$$

[6] C sufficientemente generale. $\mathbf{P}^{N_g}$ indica lo spazio ambiente della immersione di Plücker di $\mathbb{M}_g$.

- Da E si ricostruisce il modello canonico $C \subset \mathbf{P}^{g-1}$.[6] Come?
- $g = 6$: $h^0(E) = 5$ E ha rango 2,

$$f_E : C \to G(2,5) := \mathbb{M}_6 \subset \mathbf{P}^{N_6}$$

- $g = 7$: $h^0(E) = 10$, E è 'ortogonale' di rango 5,

$$f_E : C \to OG(5,10) := \mathbb{M}_7 \subset \mathbf{P}^{N_7}$$

- $g = 8$: $h^0(E) = 6$, E ha rango 2,

$$f_E : C \to G(2,6) := \mathbb{M}_8 \subset \mathbf{P}^{N_8}$$

- $g = 9$: $h^0(E) = 6$, E è 'simplettico' di rango 3,

$$f_E : C \to SO(3,6) := \mathbb{M}_9 \subset \mathbf{P}^{N_9}$$

.

[6] C sufficientemente generale. $\mathbf{P}^{N_g}$ indica lo spazio ambiente della immersione di Plücker di $\mathbb{M}_g$.

- $\mathbb{M}_g$ è uno spazio omogeneo razionale.

- $\mathbb{M}_g$ è uno spazio omogeneo razionale.
- L' immagine di $f_E : C \to \mathbb{M}_g \subset \mathbb{P}^{N_g}$ è C immersa canonicamente.

- $\mathbb{M}_g$ è uno spazio omogeneo razionale.
- L' immagine di $f_E : C \to \mathbb{M}_g \subset \mathbb{P}^{N_g}$ è C immersa canonicamente.
- Sia $\mathbf{P}^{g-1}$ il sottospazio generato da C:

- $\mathbb{M}_g$ è uno spazio omogeneo razionale.
- L' immagine di $f_E : C \to \mathbb{M}_g \subset \mathbb{P}^{N_g}$ è C immersa canonicamente.
- Sia $\mathbf{P}^{g-1}$ il sottospazio generato da C:
- **Teorema** (Mukai linear section theorem) Per $g = 7, 8, 9$

$$C = \mathbf{P}^{g-1} \cap \mathbb{M}_g \subset \mathbf{P}^{N_g}.$$

- $\mathbb{M}_g$ è uno spazio omogeneo razionale.
- L' immagine di $f_E : C \to \mathbb{M}_g \subset \mathbb{P}^{N_g}$ è C immersa canonicamente.
- Sia $\mathbf{P}^{g-1}$ il sottospazio generato da C:
- **Teorema** (Mukai linear section theorem) Per $g = 7, 8, 9$

$$C = \mathbf{P}^{g-1} \cap \mathbb{M}_g \subset \mathbf{P}^{N_g}.$$

- Per $g = 6$ si ha $\mathbf{P}^5 \cap G(2,5) = S$ e $C = Q \cap S$ come prima.

Teoria di Green

- La teoria di Green riguarda in primo luogo le equazioni della curva canonica, le loro relazioni e le corrispondenti proprietá geometriche.

Teoria di Green

- La teoria di Green riguarda in primo luogo le equazioni della curva canonica, le loro relazioni e le corrispondenti proprietá geometriche.
- Piú in generale sia $C \subset \mathbf{P}^r$ e $S := \mathbf{C}[x_0, \ldots, x_r] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} S_m$.

Teoria di Green

- La teoria di Green riguarda in primo luogo le equazioni della curva canonica, le loro relazioni e le corrispondenti proprietá geometriche.
- Piú in generale sia $C \subset \mathbf{P}^r$ e $S := \mathbf{C}[x_0, \ldots, x_r] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} S_m$.
- Siano poi $S(k)_m := S_{k+m}$ e $S(k) := \bigoplus S(k)_m$.

Teoria di Green

- La teoria di Green riguarda in primo luogo le equazioni della curva canonica, le loro relazioni e le corrispondenti proprietá geometriche.
- Piú in generale sia $C \subset \mathbf{P}^r$ e $S := \mathbf{C}[x_0, \dots, x_r] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} S_m$.
- Siano poi $S(k)_m := S_{k+m}$ e $S(k) := \bigoplus S(k)_m$.
- Ogni S-modulo M finitamente generato ha una risoluzione

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow F_0 \longleftarrow \dots \longleftarrow F_i \longleftarrow \dots \longleftarrow 0 \qquad (*)$$

minimale e tale che $F_p := \bigoplus_p S(-p-q)^{b_{pq}}$.

Teoria di Green

- La teoria di Green riguarda in primo luogo le equazioni della curva canonica, le loro relazioni e le corrispondenti proprietá geometriche.
- Piú in generale sia $C \subset \mathbf{P}^r$ e $S := \mathbf{C}[x_0, \ldots, x_r] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} S_m$.
- Siano poi $S(k)_m := S_{k+m}$ e $S(k) := \bigoplus S(k)_m$.
- Ogni S-modulo M finitamente generato ha una risoluzione

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow F_0 \longleftarrow \ldots \longleftarrow F_i \longleftarrow \ldots \longleftarrow 0 \qquad (*)$$

  minimale e tale che $F_p := \bigoplus_p S(-p-q)^{b_{pq}}$.
- *Numeri di Betti:* $b_{pq}(M) := b_{pq}$, di fatto sono la dimensione di

$$K_{p,q}(M) := Tor_p^S(M, \mathbf{C})_{p+q}.$$

  e cioè della componente di grado $p+q$ di $Tor_p^S(M, \mathbf{C})$

Teoria di Green

- La teoria di Green riguarda in primo luogo le equazioni della curva canonica, le loro relazioni e le corrispondenti proprietá geometriche.
- Piú in generale sia $C \subset \mathbf{P}^r$ e $S := \mathbf{C}[x_0, \ldots, x_r] = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} S_m$.
- Siano poi $S(k)_m := S_{k+m}$ e $S(k) := \bigoplus S(k)_m$.
- Ogni S-modulo M finitamente generato ha una risoluzione

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow F_0 \longleftarrow \ldots \longleftarrow F_i \longleftarrow \ldots \longleftarrow 0 \qquad (*)$$

  minimale e tale che $F_p := \bigoplus_p S(-p-q)^{b_{pq}}$.
- *Numeri di Betti:* $b_{pq}(M) := b_{pq}$, di fatto sono la dimensione di

$$K_{p,q}(M) := Tor_p^S(M, \mathbf{C})_{p+q}.$$

  e cioè della componente di grado $p+q$ di $Tor_p^S(M, \mathbf{C})$
- *Tavola di Betti:* i $b_{p,q}$ si dispongono sulla colonna p.

- Ci interessa il caso $M = S/I$, dove $I \subset S$ è l' ideale di C.

- Ci interessa il caso $M = S/I$, dove $I \subset S$ è l' ideale di C.
- Lo studio della tavola di Betti per $M = S/I$ è un aspetto fondamentale della moderna teoria delle curve algebriche.

- Ci interessa il caso $M = S/I$, dove $I \subset S$ è l' ideale di C.
- Lo studio della tavola di Betti per $M = S/I$ è un aspetto fondamentale della moderna teoria delle curve algebriche.
- **Definizione**
  La risoluzione (*) è naturale se per ogni q esiste al piú un p tale che $b_{p,p-q} \neq 0$.

- Ci interessa il caso $M = S/I$, dove $I \subset S$ è l' ideale di C.
- Lo studio della tavola di Betti per $M = S/I$ è un aspetto fondamentale della moderna teoria delle curve algebriche.
- **Definizione**
  La risoluzione (*) è naturale se per ogni q esiste al piú un p tale che $b_{p,p-q} \neq 0$.
- La risoluzione (*) è naturale $\Leftrightarrow$ ogni diagonale di (b_{pq}) ha al piú un $b_{pq} \neq 0$.

- Ci interessa il caso $M = S/I$, dove $I \subset S$ è l' ideale di C.
- Lo studio della tavola di Betti per $M = S/I$ è un aspetto fondamentale della moderna teoria delle curve algebriche.
- **Definizione**
  La risoluzione (*) è naturale se per ogni q esiste al piú un p tale che $b_{p,p-q} \neq 0$.
- La risoluzione (*) è naturale $\Leftrightarrow$ ogni diagonale di (b_{pq}) ha al piú un $b_{pq} \neq 0$.
- Ci interesseranno le immersioni paracanoniche di C, che sono definite da $K_C \otimes \alpha$ con $\alpha \in \mathrm{Pic}^0\, C$, $\alpha \neq \mathcal{O}_C$.

- Esempi di tavole di Betti: la risoluzione è naturale nel primo.
- $E \subset \mathbf{P}^6$ curva ellittica immersa da H di grado 7:.

$$0 \leftarrow S/I \leftarrow S \rightarrow S(-2)^{14} \leftarrow S(-3)^{35} \leftarrow S(-4)^{35} \leftarrow S(-5)^{14} \leftarrow S(-8)\ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - & - \\ - & 14 & 35 & 35 & 14 & - \\ - & - & - & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

- Esempi di tavole di Betti: la risoluzione è naturale nel primo.
- $E \subset \mathbf{P}^6$ curva ellittica immersa da H di grado 7:.

$$0 \leftarrow S/I \leftarrow S \rightarrow S(-2)^{14} \leftarrow S(-3)^{35} \leftarrow S(-4)^{35} \leftarrow S(-5)^{14} \leftarrow S(-8)\ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - & - \\ - & 14 & 35 & 35 & 14 & - \\ - & - & - & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

- $C \subset \mathbf{P}^6$ paracanonica di genere 8 di tipo speciale:

$$0 \leftarrow S/I \leftarrow S \rightarrow S(-2)^7 \oplus S(-3) \leftarrow S(-3)^{35} \leftarrow$$

$$S(-3) \oplus S(-4)^{35} \leftarrow S(-5)^{56} \leftarrow S(6)^{35} \leftarrow S(7)^8 \leftarrow 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - & - \\ - & 7 & 1 & - & - & - \\ - & 1 & 35 & 56 & 35 & 8 \end{pmatrix}$$

Congettura di Green generica

- *Congettura di Green per una curva canonica generica:*
- S/I ha risoluzione naturale.

Congettura di Green generica

- *Congettura di Green per una curva canonica generica:*
- S/I ha risoluzione naturale.
- La congettura mette in relazione tra loro la geometria di C e l' andamento della risoluzione di S/I.

Congettura di Green generica

- *Congettura di Green per una curva canonica generica:*
- S/I ha risoluzione naturale.
- La congettura mette in relazione tra loro la geometria di C e l' andamento della risoluzione di S/I.
- Essa è collegata ai rivestimenti $C \to \mathbf{P}^1$ di minimo grado k:

Congettura di Green generica

- *Congettura di Green per una curva canonica generica:*
- S/I ha risoluzione naturale.
- La congettura mette in relazione tra loro la geometria di C e l' andamento della risoluzione di S/I.
- Essa è collegata ai rivestimenti $C \to \mathbf{P}^1$ di minimo grado k:
- per C generica si ha $k = [\frac{g+3}{2}]$ e la congettura equivale a

$$b_{[\frac{g}{2}],1}(S[C]) = 0.$$

Congettura di Green

- La congettura di Green generica è stata dimostrata da Claire Vosin nel 2002 per $g = 2k$ e nel 2005 per $g = 2k + 1$.

---

[7] Una superficie K3 è una superficie complessa, compatta e connessa, semplicemente connessa e con $K_X = \mathcal{O}_X$. L ha genere g se $|L|$ è un sistema lineare di curve di genere g

[8] Grossolanamente: Le matrici che definiscono le mappe della risoluzione di S/I sono matrici di forme lineari fino al termine p-esimo F_p se e solo se la curva ha gonalitá $> p + 1$.

Congettura di Green

- La congettura di Green generica è stata dimostrata da Claire Vosin nel 2002 per $g = 2k$ e nel 2005 per $g = 2k + 1$.
- In entrambi i casi la dimostrazione usa curve su superfici K3 dotate di un fibrato lineare ampio L di genere g. [7]

[7] Una superficie K3 è una superficie complessa, compatta e connessa, semplicemente connessa e con $K_X = \mathcal{O}_X$. L ha genere g se $|L|$ è un sistema lineare di curve di genere g

[8] Grossolanamente: Le matrici che definiscono le mappe della risoluzione di S/I sono matrici di forme lineari fino al termine p-esimo F_p se e solo se la curva ha gonalitá $> p + 1$.

Congettura di Green

- La congettura di Green generica è stata dimostrata da Claire Vosin nel 2002 per $g = 2k$ e nel 2005 per $g = 2k + 1$.
- In entrambi i casi la dimostrazione usa curve su superfici K3 dotate di un fibrato lineare ampio L di genere g. [7]
- Congettura di Green sulle sizigie della curva canonica:

[7] Una superficie K3 è una superficie complessa, compatta e connessa, semplicemente connessa e con $K_X = \mathcal{O}_X$. L ha genere g se $|L|$ è un sistema lineare di curve di genere g

[8] Grossolanamente: Le matrici che definiscono le mappe della risoluzione di S/I sono matrici di forme lineari fino al termine p-esimo F_p se e solo se la curva ha gonalitá $> p + 1$.

Congettura di Green

- La congettura di Green generica è stata dimostrata da Claire Vosin nel 2002 per $g = 2k$ e nel 2005 per $g = 2k + 1$.
- In entrambi i casi la dimostrazione usa curve su superfici K3 dotate di un fibrato lineare ampio L di genere g. [7]
- Congettura di Green sulle sizigie della curva canonica:
- Una stratificazione di $\mathcal{M}_g$ è data dalla *gonalitá di* C e cioè dal grado minimo di un rivestimento $f : C \to \mathbf{P}^1$.

[7] Una superficie K3 è una superficie complessa, compatta e connessa, semplicemente connessa e con $K_X = \mathcal{O}_X$. L ha genere g se $|L|$ è un sistema lineare di curve di genere g

[8] Grossolanamente: Le matrici che definiscono le mappe della risoluzione di S/I sono matrici di forme lineari fino al termine p-esimo F_p se e solo se la curva ha gonalitá $> p + 1$.

Congettura di Green

- La congettura di Green generica è stata dimostrata da Claire Vosin nel 2002 per $g = 2k$ e nel 2005 per $g = 2k + 1$.
- In entrambi i casi la dimostrazione usa curve su superfici K3 dotate di un fibrato lineare ampio L di genere g. [7]
- Congettura di Green sulle sizigie della curva canonica:
- Una stratificazione di $\mathcal{M}_g$ è data dalla *gonalitá di* C e cioè dal grado minimo di un rivestimento $f : C \to \mathbf{P}^1$.
- La congettura di Green è una precisa previsione sull' andamento della risoluzione di S/I in ogni strato. [8]

[7] Una superficie K3 è una superficie complessa, compatta e connessa, semplicemente connessa e con $K_X = \mathcal{O}_X$. L ha genere g se $|L|$ è un sistema lineare di curve di genere g

[8] Grossolanamente: Le matrici che definiscono le mappe della risoluzione di S/I sono matrici di forme lineari fino al termine p-esimo F_p se e solo se la curva ha gonalitá $> p + 1$.

Congettura di Green

- La congettura di Green generica è stata dimostrata da Claire Vosin nel 2002 per $g = 2k$ e nel 2005 per $g = 2k + 1$.
- In entrambi i casi la dimostrazione usa curve su superfici K3 dotate di un fibrato lineare ampio L di genere g. [7]
- Congettura di Green sulle sizigie della curva canonica:
- Una stratificazione di $\mathcal{M}_g$ è data dalla *gonalitá di C* e cioè dal grado minimo di un rivestimento $f : C \to \mathbf{P}^1$.
- La congettura di Green è una precisa previsione sull' andamento della risoluzione di S/I in ogni strato. [8]
- Le dimostrazioni di Vosin implicano la congettura su un aperto di ogni strato di $\mathcal{M}_g$ determinato dalla gonalitá.

---

[7] Una superficie K3 è una superficie complessa, compatta e connessa, semplicemente connessa e con $K_X = \mathcal{O}_X$. L ha genere g se $|L|$ è un sistema lineare di curve di genere g

[8] Grossolanamente: Le matrici che definiscono le mappe della risoluzione di S/I sono matrici di forme lineari fino al termine p-esimo F_p se e solo se la curva ha gonalitá $> p + 1$.

2. Moduli di curve di genere piccolo

Moduli collegati alle curve

- A partire da $\mathcal{M}_g$[9] ci interesserá la varietá di Picard universale

$$u_d : Pic_{d,g} \to \mathcal{M}_g$$

i cui punti sono le classi di isomorfismo $[C, L]$, $L \in \mathrm{Pic}^d C$. In particolare ci interessano multisezioni naturali di u_d come:

[9] Lo spazio dei moduli delle curve di genere g: si tratta di una varietá quasi proiettiva, integra. La sua compattificazione usuale $\overline{\mathcal{M}}_g$ è quella di Deligne-Mumford. $[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ è un punto definito da una curva C *stabile*.

Moduli collegati alle curve

- A partire da $\mathcal{M}_g$[9] ci interesserá la varietá di Picard universale

$$u_d : Pic_{d,g} \to \mathcal{M}_g$$

i cui punti sono le classi di isomorfismo $[C, L]$, $L \in \mathrm{Pic}^d C$. In particolare ci interessano multisezioni naturali di u_d come:

- Radici di ordine l di $\mathcal{O}_C$ (l-torsione in $\mathrm{Pic}^0 C$):

$$\mathcal{R}_{g,l} := \{[C,\eta] \in \mathrm{Pic}_{0,g} \ / \ \eta^{\otimes l} = \mathcal{O}_C \ , \ \eta \neq \mathcal{O}_C\}.$$

$\mathcal{R}_g := \mathcal{R}_{g,2}$ è lo spazio dei moduli delle Prym curves (C, η).

[9] Lo spazio dei moduli delle curve di genere g: si tratta di una varietá quasi proiettiva, integra. La sua compattificazione usuale $\overline{\mathcal{M}}_g$ è quella di Deligne-Mumford. $[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ è un punto definito da una curva C *stabile*.

Moduli collegati alle curve

- A partire da $\mathcal{M}_g$[9] ci interesserá la varietá di Picard universale

$$u_d : Pic_{d,g} \to \mathcal{M}_g$$

  i cui punti sono le classi di isomorfismo $[C, L]$, $L \in \operatorname{Pic}^d C$. In particolare ci interessano multisezioni naturali di u_d come:

- Radici di ordine l di $\mathcal{O}_C$ (l-torsione in $\operatorname{Pic}^0 C$):

$$\mathcal{R}_{g,l} := \{[C, \eta] \in \operatorname{Pic}_{0,g} \ / \ \eta^{\otimes l} = \mathcal{O}_C \ , \ \eta \neq \mathcal{O}_C\}.$$

  $\mathcal{R}_g := \mathcal{R}_{g,2}$ è lo spazio dei moduli delle Prym curves (C, η).

- Radici quadrate di K_C (theta caratteristiche):

$$\mathcal{S}_g := \{[C, \theta] \in Pic_{g-1,g} \ / \ \theta^{\otimes 2} \cong K_C\}.$$

  $\mathcal{S}$ è lo spazio dei moduli delle spin curves (C, θ).

[9] Lo spazio dei moduli delle curve di genere g: si tratta di una varietá quasi proiettiva, integra. La sua compattificazione usuale $\overline{\mathcal{M}}_g$ è quella di Deligne-Mumford. $[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ è un punto definito da una curva C *stabile*.

- $\mathcal{R}_{g,l}$ è irriducibile se l è primo.

- $\mathcal{R}_{g,l}$ è irriducibile se l è primo.
- (Mumford) $\mathcal{S}_g$ ha due componenti connesse irriducibili:

- $\mathcal{R}_{g,l}$ è irriducibile se l è primo.
- (Mumford) $\mathcal{S}_g$ ha due componenti connesse irriducibili:
- $\mathcal{S}_g^+ := \{[C, \theta] \ / \ h^0(\theta) = 2k\}$ (theta pari)

- $\mathcal{R}_{g,l}$ è irriducibile se l è primo.
- (Mumford) $\mathcal{S}_g$ ha due componenti connesse irriducibili:
- $\mathcal{S}_g^+ := \{[C, \theta] \ / \ h^0(\theta) = 2k\}$ (theta pari)
- $S_g^- := \{[C, \theta] \ / \ h^0(\theta) = 2k + 1\}$ (theta dispari)

- $\mathcal{R}_{g,l}$ è irriducibile se l è primo.
- (Mumford) $\mathcal{S}_g$ ha due componenti connesse irriducibili:
- $\mathcal{S}_g^+ := \{[C, \theta] \ / \ h^0(\theta) = 2k\}$ (theta pari)
- $S_g^- := \{[C, \theta] \ / \ h^0(\theta) = 2k + 1\}$ (theta dispari)
- $\mathcal{F}_g :=$ moduli delle superfici K3 di genere g.

$$(X, L)$$

- $\mathcal{R}_{g,l}$ è irriducibile se l è primo.
- (Mumford) $\mathcal{S}_g$ ha due componenti connesse irriducibili:
- $\mathcal{S}_g^+ := \{[C,\theta] \ / \ h^0(\theta) = 2k\}$ (theta pari)
- $S_g^- := \{[C,\theta] \ / \ h^0(\theta) = 2k+1\}$ (theta dispari)
- $\mathcal{F}_g :=$ moduli delle superfici K3 di genere g.

$$(X, L)$$

- $\mathcal{A}_g :=$ moduli varietá abeliane p.p. di dimensione g

$$(A, \Theta)$$

Obiettivi da considerare

- Fare il punto sulla teoria di Green nel caso di curve paracanoniche, in particolare sulla congettura di Prym-Green.

Obiettivi da considerare

- Fare il punto sulla teoria di Green nel caso di curve paracanoniche, in particolare sulla congettura di Prym-Green.
- Descrivere gli spazi di moduli considerati dal punto di vista della esistenza di loro equazioni parametriche razionali o del contrario.

Obiettivi da considerare

- Fare il punto sulla teoria di Green nel caso di curve paracanoniche, in particolare sulla congettura di Prym-Green.
- Descrivere gli spazi di moduli considerati dal punto di vista della esistenza di loro equazioni parametriche razionali o del contrario.
- Utilizzare le curve di genere 8 e una certa loro ubiquitá.

Problemi tipo Green per curve paracanoniche

- Una immersione $C \subset \mathbf{P}^{g-2}$, definita da $K_C \otimes \alpha$ con $\alpha \in \mathrm{Pic}^0 C$, si dice modello paracanonico di C.

[10] Chiodo, Eisenbud, Farkas, Schreyer *Syzygies of torsion bundles and the geometry of the level l modular variety over* $\overline{\mathcal{M}}_g$ Inv. Math.

Problemi tipo Green per curve paracanoniche

- Una immersione $C \subset \mathbf{P}^{g-2}$, definita da $K_C \otimes \alpha$ con $\alpha \in \mathrm{Pic}^0\, C$, si dice modello paracanonico di C.
- Esistono diverse ragioni per studiare questo modelli dal punto di vista della teoria di Green nel caso in cui $[C, \alpha] \in \mathcal{R}_{g,l}$:

[10] Chiodo, Eisenbud, Farkas, Schreyer *Syzygies of torsion bundles and the geometry of the level l modular variety over* $\overline{\mathcal{M}}_g$ Inv. Math.

Problemi tipo Green per curve paracanoniche

- Una immersione $C \subset \mathbf{P}^{g-2}$, definita da $K_C \otimes \alpha$ con $\alpha \in \mathrm{Pic}^0 C$, si dice modello paracanonico di C.
- Esistono diverse ragioni per studiare questo modelli dal punto di vista della teoria di Green nel caso in cui $[C, \alpha] \in \mathcal{R}_{g,l}$:
- **Generic Prym-Green conjecture**

  Per un generico $[C, \alpha] \in \mathcal{R}_{g,l}$ il fibrato $K_C \otimes \alpha$ determina una immersione $C \subset \mathbf{P}^{g-2}$ e l' anello $S[C]$ ha risoluzione naturale.

[10] Chiodo, Eisenbud, Farkas, Schreyer *Syzygies of torsion bundles and the geometry of the level l modular variety over* $\overline{\mathcal{M}}_g$ Inv. Math.

Problemi tipo Green per curve paracanoniche

- Una immersione $C \subset \mathbf{P}^{g-2}$, definita da $K_C \otimes \alpha$ con $\alpha \in \mathrm{Pic}^0 C$, si dice modello paracanonico di C.
- Esistono diverse ragioni per studiare questo modelli dal punto di vista della teoria di Green nel caso in cui $[C, \alpha] \in \mathcal{R}_{g,l}$:
- **Generic Prym-Green conjecture**

  Per un generico $[C, \alpha] \in \mathcal{R}_{g,l}$ il fibrato $K_C \otimes \alpha$ determina una immersione $C \subset \mathbf{P}^{g-2}$ e l' anello $S[C]$ ha risoluzione naturale.
- [ECFS 2013]:[10] Vera per $g \leq 18$. Salvo $l = 2$ e $g \neq 8, 16$. Probabilisticamente (?) sembra falsa per $l = 2$ e $g = 8, 16$ con metodi computazionali.

[10] Chiodo, Eisenbud, Farkas, Schreyer *Syzygies of torsion bundles and the geometry of the level l modular variety over* $\overline{\mathcal{M}}_g$ Inv. Math.

Problemi tipo Green per curve paracanoniche

- Una immersione $C \subset \mathbf{P}^{g-2}$, definita da $K_C \otimes \alpha$ con $\alpha \in \mathrm{Pic}^0 C$, si dice modello paracanonico di C.
- Esistono diverse ragioni per studiare questo modelli dal punto di vista della teoria di Green nel caso in cui $[C, \alpha] \in \mathcal{R}_{g,l}$:
- **Generic Prym-Green conjecture**

  Per un generico $[C, \alpha] \in \mathcal{R}_{g,l}$ il fibrato $K_C \otimes \alpha$ determina una immersione $C \subset \mathbf{P}^{g-2}$ e l' anello $S[C]$ ha risoluzione naturale.
- [ECFS 2013]:[10] Vera per $g \leq 18$. Salvo $l = 2$ e $g \neq 8, 16$. Probabilisticamente (?) sembra falsa per $l = 2$ e $g = 8, 16$ con metodi computazionali.
- Falsa probabilisticamente per multipli di 8? 6500 anni di calcolo per trattare $g = 24$ con gli stessi metodi!!

[10] Chiodo, Eisenbud, Farkas, Schreyer *Syzygies of torsion bundles and the geometry of the level l modular variety over* $\overline{\mathcal{M}}_g$ Inv. Math.

- La congettura è vera in genere dispari per $2l^2 + 2 \geq g$. [Kemeny-Farkas 2015][11]

[11] *The Prym-Green Conjecture for torsion line bundles of high order,* Inv. Math. to appear

- La congettura è vera in genere dispari per $2l^2 + 2 \geq g$. [Kemeny-Farkas 2015][11]
- Basta provarla per un punto $[C, \alpha] \in \mathcal{R}_{g,l}$. Punto usato:

$$C \subset X \text{ e } \alpha = A \otimes \mathcal{O}_C$$

dove $A \in \operatorname{Pic} X$ e X è una opportuna superficie K3 studiata in [Barth–]. Su X la serie lineare di curve $|C|$ contiene

$$\binom{2l^2 + 2}{g}$$

elementi C tali che $A \otimes \mathcal{O}_C$ è di l torsione in $\operatorname{Pic}^0 C$.

[11] *The Prym-Green Conjecture for torsion line bundles of high order*, Inv. Math. to appear

- La congettura è vera in genere dispari per $2l^2 + 2 \geq g$. [Kemeny-Farkas 2015][11]
- Basta provarla per un punto $[C, \alpha] \in \mathcal{R}_{g,l}$. Punto usato:

$$C \subset X \text{ e } \alpha = A \otimes \mathcal{O}_C$$

dove $A \in \operatorname{Pic} X$ e X è una opportuna superficie K3 studiata in [Barth–]. Su X la serie lineare di curve $|C|$ contiene

$$\binom{2l^2 + 2}{g}$$

elementi C tali che $A \otimes \mathcal{O}_C$ è di l torsione in $\operatorname{Pic}^0 C$.

- 1. Per $g = 2k + 1$ il luogo di $\mathcal{M}_g$ in cui la *'Green generica'* non vale è il noto divisore di Harris-Mumford.
  2. Per $g = 2k$ il luogo in cui la *'Prym-Green generica'* non vale si ripresenta congetturalmente come divisore $\forall l \geq 3$.

[11] *The Prym-Green Conjecture for torsion line bundles of high order*, Inv. Math. to appear

Problemi di unirigatezza in genere basso

- Una varietá quasi proiettiva X si dice *unirazionale* se ammette equazioni parametriche razionali $f : \mathbf{C}^N \to X$.

[12] X' indica una varietá proiettiva liscia birazionale a X

Problemi di unirigatezza in genere basso

- Una varietá quasi proiettiva X si dice *unirazionale* se ammette equazioni parametriche razionali $f : \mathbf{C}^N \to X$.
- X si dice razionale se $\exists f : \mathbf{C}^N \to X$ birazionale. Alcune nozioni piú deboli sono storicamente successive:

$$\textit{razionale} \Rightarrow \textit{unirazionale} \Rightarrow \textit{razionalmente connesso} \Rightarrow \textit{unirigato}$$

[12] X' indica una varietá proiettiva liscia birazionale a X

Problemi di unirigatezza in genere basso

- Una varietá quasi proiettiva X si dice *unirazionale* se ammette equazioni parametriche razionali $f : \mathbf{C}^N \to X$.
- X si dice razionale se $\exists f : \mathbf{C}^N \to X$ birazionale. Alcune nozioni piú deboli sono storicamente successive:

$$\textit{razionale} \Rightarrow \textit{unirazionale} \Rightarrow \textit{razionalmente connesso} \Rightarrow \textit{unirigato}$$

- Congettura: $kod(X) = -\infty \iff X$ unirigata (Mumford)

[12] X' indica una varietá proiettiva liscia birazionale a X

Problemi di unirigatezza in genere basso

- Una varietá quasi proiettiva X si dice *unirazionale* se ammette equazioni parametriche razionali $f : \mathbf{C}^N \to X$.
- X si dice razionale se $\exists f : \mathbf{C}^N \to X$ birazionale. Alcune nozioni piú deboli sono storicamente successive:

$$\textit{razionale} \Rightarrow \textit{unirazionale} \Rightarrow \textit{razionalmente connesso} \Rightarrow \textit{unirigato}$$

- Congettura: $kod(X) = -\infty \iff X$ unirigata (Mumford)
- La *dimensione di Kodaira di X*, indicata con $kod(X)$, è la massima dimensione delle immagini delle mappe pluricanoniche

$$f_{mK_{X'}} : X' \to \mathbf{P}^{N_m} \quad m > 0.$$ [12]

Se $|mK_{X'}| = \emptyset$, $\forall m > 0$, si pone $kod(X) = -\infty$.

[12] X' indica una varietá proiettiva liscia birazionale a X

Problemi di unirigatezza in genere basso

- Una varietá quasi proiettiva X si dice *unirazionale* se ammette equazioni parametriche razionali $f : \mathbf{C}^N \to X$.
- X si dice razionale se $\exists f : \mathbf{C}^N \to X$ birazionale. Alcune nozioni piú deboli sono storicamente successive:

$$\textit{razionale} \Rightarrow \textit{unirazionale} \Rightarrow \textit{razionalmente connesso} \Rightarrow \textit{unirigato}$$

- Congettura: $kod(X) = -\infty \iff X$ unirigata (Mumford)
- La *dimensione di Kodaira di* X, indicata con $kod(X)$, è la massima dimensione delle immagini delle mappe pluricanoniche

$$f_{mK_{X'}} : X' \to \mathbf{P}^{N_m} \quad m > 0.$$ [12]

Se $|mK_{X'}| = \emptyset$, $\forall m > 0$, si pone $kod(X) = -\infty$.

- All'opposto: X si dice di *tipo generale* se $kod(X) = \dim X$.

[12] X' indica una varietá proiettiva liscia birazionale a X

- Unirazionalitá o razionalitá di $\mathcal{M}_g$ apparivano naturali ai geometri algebrici classici, confermate dai metodi e dai casi considerati.

[13] Anche se serviranno precisazioni moderne: cfr. Arbarello-Sernesi

[14] $\mathcal{M}_g$ è parametrizzato dalla Grassmanniana delle sezioni curvilineari della varietá di Mukai $\mathbb{M}_g \subset \mathbf{P}^{N_g}$.

- Unirazionalitá o razionalitá di $\mathcal{M}_g$ apparivano naturali ai geometri algebrici classici, confermate dai metodi e dai casi considerati.
- Per la teoria di Brill-Noether una generica C di genere $g \leq 6$ ha una mappa $f : C \to \mathbf{P}^2$ tale che $f(C)$ è una sestica. Inoltre $f(C)$ varia in un sistema lineare fissato

$$\sum_{i+j\leq 6} f_{ij} X^i Y^j = 0.$$

Le f_{ij} determinano equazioni parametriche razionali $f : \mathbf{C}^N \to \mathcal{M}_g$.

[13] Anche se serviranno precisazioni moderne: cfr. Arbarello-Sernesi

[14] $\mathcal{M}_g$ è parametrizzato dalla Grassmanniana delle sezioni curvilineari della varietá di Mukai $\mathbb{M}_g \subset \mathbf{P}^{N_g}$.

- Unirazionalitá o razionalitá di $\mathcal{M}_g$ apparivano naturali ai geometri algebrici classici, confermate dai metodi e dai casi considerati.
- Per la teoria di Brill-Noether una generica C di genere $g \leq 6$ ha una mappa $f : C \to \mathbf{P}^2$ tale che $f(C)$ è una sestica. Inoltre $f(C)$ varia in un sistema lineare fissato

$$\sum_{i+j \leq 6} f_{ij} X^i Y^j = 0.$$

Le f_{ij} determinano equazioni parametriche razionali $f : \mathbf{C}^N \to \mathcal{M}_g$.
- Severi usa famiglie razionali di curve piane con nodi per provare che:

Teorema [13] $\mathcal{M}_g$ è unirazionale per $g \leq 10$

[13] Anche se serviranno precisazioni moderne: cfr. Arbarello-Sernesi

[14] $\mathcal{M}_g$ è parametrizzato dalla Grassmanniana delle sezioni curvilineari della varietá di Mukai $\mathbb{M}_g \subset \mathbf{P}^{N_g}$.

- Unirazionalitá o razionalitá di $\mathcal{M}_g$ apparivano naturali ai geometri algebrici classici, confermate dai metodi e dai casi considerati.
- Per la teoria di Brill-Noether una generica C di genere $g \leq 6$ ha una mappa $f : C \to \mathbf{P}^2$ tale che $f(C)$ è una sestica. Inoltre $f(C)$ varia in un sistema lineare fissato

$$\sum_{i+j \leq 6} f_{ij} X^i Y^j = 0.$$

Le f_{ij} determinano equazioni parametriche razionali $f : \mathbf{C}^N \to \mathcal{M}_g$.
- Severi usa famiglie razionali di curve piane con nodi per provare che: **Teorema** [13] $\mathcal{M}_g$ è unirazionale per $g \leq 10$
- Per $7 \leq g \leq 9$ la teoria di Mukai implica lo stesso risultato.[14]

---

13 Anche se serviranno precisazioni moderne: cfr. Arbarello-Sernesi

14 $\mathcal{M}_g$ è parametrizzato dalla Grassmanniana delle sezioni curvilineari della varietá di Mukai $\mathbb{M}_g \subset \mathbf{P}^{N_g}$.

- 'E del 1915 la congettura di Severi che $\mathcal{M}_g$ sia

razionale o almeno unirazionale.

[15] in *Curves and their Jacobians* Ann Arbor Lectures 1975

- 'E del 1915 la congettura di Severi che $\mathcal{M}_g$ sia

razionale o almeno unirazionale.

- La razionalitá è un problema difficile, anche in genere molto piccolo, con risultati sporadici fondati sulla teoria degli invarianti:
    1. $g = 1$ Weierstrass, (funzione $\mathfrak{P}$ e invariante j),
    2. $g = 2$ Igusa 1960 (funzioni theta),
    3. $g = 3$ Katsylo 1992 e Boehning 2010 (quartiche piane)
    4. $g = 4, 5, 6$ Shepherd-Barron (curve trigonali e sestiche piane)

[15] in *Curves and their Jacobians* Ann Arbor Lectures 1975

- 'E del 1915 la congettura di Severi che $\mathcal{M}_g$ sia

  razionale o almeno unirazionale.

- La razionalitá è un problema difficile, anche in genere molto piccolo, con risultati sporadici fondati sulla teoria degli invarianti:
  1. $g = 1$ Weierstrass, (funzione $\mathfrak{P}$ e invariante j),
  2. $g = 2$ Igusa 1960 (funzioni theta),
  3. $g = 3$ Katsylo 1992 e Boehning 2010 (quartiche piane)
  4. $g = 4, 5, 6$ Shepherd-Barron (curve trigonali e sestiche piane)

- Mumford 1975 [15]:

  Whether more $\mathcal{M}_g$, $g \geq 11$, are unirational or not is a very interesting problem, but one which looks very hard too, especially if g is quite large.

[15] in *Curves and their Jacobians* Ann Arbor Lectures 1975

- Il breakthrough è intorno al 1980: Harris, Mumford e Eisenbud provano l'opposto: $\mathcal{M}_g$ è di tipo generale per $g \geq 24$.
- Il problema rimane aperto e si evolve in genere piccolo.
- Sono unirazionali:
  1. $\mathcal{M}_{11}$ (Chang-Ran 1984),
  2. $\mathcal{M}_{12}$ (Sernesi 1981),
  3. $\mathcal{M}_{13}$ (Chang-Ran 1984),
  4. $\mathcal{M}_{14}$ (—2005),
  5. $\mathcal{M}_{15}$ è razionalmente connesso (Bruno- — 2005),
  6. $\mathcal{M}_{16}$ è unirigato (Farkas 2012).
- Cosa succede per $17 \leq g \leq 23$?

Problemi sulla dimensione di Kodaira intermedia

- Le idee cambiano con i tempi: oggi è naturale chiedersi come varia la funzione $kod(\mathcal{X}_g)$ per gli spazi di moduli $\mathcal{X}_g$ ora considerati.

Problemi sulla dimensione di Kodaira intermedia

- Le idee cambiano con i tempi: oggi è naturale chiedersi come varia la funzione $kod(\mathcal{X}_g)$ per gli spazi di moduli $\mathcal{X}_g$ ora considerati.
- Potrebbe comportarsi come per le ipersuperfici lisce $Y_d \subset \mathbf{P}^n$ di grado d: crescente con $kod(Y_d) \in \{-\infty, 0, \dim Y_d\}$ e un unico d tale che $kod(Y_d) = 0$?

Problemi sulla dimensione di Kodaira intermedia

- Le idee cambiano con i tempi: oggi è naturale chiedersi come varia la funzione $kod(\mathcal{X}_g)$ per gli spazi di moduli $\mathcal{X}_g$ ora considerati.
- Potrebbe comportarsi come per le ipersuperfici lisce $Y_d \subset \mathbf{P}^n$ di grado d: crescente con $kod(Y_d) \in \{-\infty, 0, \dim Y_d\}$ e un unico d tale che $kod(Y_d) = 0$?
- Ipotesi troppo suggestiva ma prevista da una congettura serissima, la Slope Conjecture, per $\mathcal{M}_g$, con transizione per $g = 23$.

Problemi sulla dimensione di Kodaira intermedia

- Le idee cambiano con i tempi: oggi è naturale chiedersi come varia la funzione $kod(\mathcal{X}_g)$ per gli spazi di moduli $\mathcal{X}_g$ ora considerati.
- Potrebbe comportarsi come per le ipersuperfici lisce $Y_d \subset \mathbf{P}^n$ di grado d: crescente con $kod(Y_d) \in \{-\infty, 0, \dim Y_d\}$ e un unico d tale che $kod(Y_d) = 0$?
- Ipotesi troppo suggestiva ma prevista da una congettura serissima, la Slope Conjecture, per $\mathcal{M}_g$, con transizione per $g = 23$.
- la Slope Conjecture in realtá ha infiniti controesempi. Inoltre si sa che: $\mathcal{M}_{22}$ è di tipo generale e $kod(\mathcal{M}_{23}) \geq 2$ (Farkas).

Problemi sulla dimensione di Kodaira intermedia

- Le idee cambiano con i tempi: oggi è naturale chiedersi come varia la funzione $kod(\mathcal{X}_g)$ per gli spazi di moduli $\mathcal{X}_g$ ora considerati.
- Potrebbe comportarsi come per le ipersuperfici lisce $Y_d \subset \mathbf{P}^n$ di grado d: crescente con $kod(Y_d) \in \{-\infty, 0, \dim Y_d\}$ e un unico d tale che $kod(Y_d) = 0$?
- Ipotesi troppo suggestiva ma prevista da una congettura serissima, la Slope Conjecture, per $\mathcal{M}_g$, con transizione per $g = 23$.
- la Slope Conjecture in realtá ha infiniti controesempi. Inoltre si sa che: $\mathcal{M}_{22}$ è di tipo generale e $kod(\mathcal{M}_{23}) \geq 2$ (Farkas).
- Problema apertissimo:

Come varia $kod(\mathcal{M}_g)$ *per* $17 \leq g \leq 21$*?*

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{S}_g^+$ e $\mathcal{S}_g^-$

- $\mathcal{S}_g^+$ é razionale per $g \leq 4$. Per $g = 3$ segue dalla mappa di Scorza: $\mathcal{M}_3 \cong \mathcal{S}_3^+$. Per $g = 4$ [Takagi-Zucconi].

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{S}_g^+$ e $\mathcal{S}_g^-$

- $\mathcal{S}_g^+$ é razionale per $g \leq 4$. Per $g = 3$ segue dalla mappa di Scorza: $\mathcal{M}_3 \cong \mathcal{S}_3^+$. Per $g = 4$ [Takagi-Zucconi].
- $\mathcal{S}_g^+$ è unirigato per $g \leq 7$ e di tipo generale per $g \geq 9$,

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{S}_g^+$ e $\mathcal{S}_g^-$

- $\mathcal{S}_g^+$ é razionale per $g \leq 4$. Per $g = 3$ segue dalla mappa di Scorza: $\mathcal{M}_3 \cong \mathcal{S}_3^+$. Per $g = 4$ [Takagi-Zucconi].
- $\mathcal{S}_g^+$ è unirigato per $g \leq 7$ e di tipo generale per $g \geq 9$,
- per $g = 8$ si ha $kod(\mathcal{S}_8^+) = 0$ [Farkas- –].

$\mathcal{S}_8^+$ *è birazionale a una Calabi-Yau?*

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{S}_g^+$ e $\mathcal{S}_g^-$

- $\mathcal{S}_g^+$ é razionale per $g \leq 4$. Per $g = 3$ segue dalla mappa di Scorza: $\mathcal{M}_3 \cong \mathcal{S}_3^+$. Per $g = 4$ [Takagi-Zucconi].
- $\mathcal{S}_g^+$ è unirigato per $g \leq 7$ e di tipo generale per $g \geq 9$,
- per $g = 8$ si ha $kod(\mathcal{S}_8^+) = 0$ [Farkas- –].

$\mathcal{S}_8^+$ è birazionale a una Calabi-Yau?

- Per $\mathcal{S}_g^-$ non c'è transizione: $\mathcal{S}_g^-$ è unirigato per $g \leq 11$ e di tipo generale per $g \geq 12$. Unirazionale per $g \leq 8$.

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{S}_g^+$ e $\mathcal{S}_g^-$

- $\mathcal{S}_g^+$ é razionale per $g \leq 4$. Per $g = 3$ segue dalla mappa di Scorza: $\mathcal{M}_3 \cong \mathcal{S}_3^+$. Per $g = 4$ [Takagi-Zucconi].
- $\mathcal{S}_g^+$ è unirigato per $g \leq 7$ e di tipo generale per $g \geq 9$,
- per $g = 8$ si ha $kod(\mathcal{S}_8^+) = 0$ [Farkas- –].

$\mathcal{S}_8^+$ è birazionale a una Calabi-Yau?

- Per $\mathcal{S}_g^-$ non c'è transizione: $\mathcal{S}_g^-$ è unirigato per $g \leq 11$ e di tipo generale per $g \geq 12$. Unirazionale per $g \leq 8$.
- Razionalitá: classica per $g \leq 3$. Per $g = 4$ [Pernigotti- –].

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{R}_g$ e $\mathcal{A}_g$

- $\mathcal{R}_g$ è di tipo generale per $g \geq 12$ [Farkas-Ludwig].
- La variazione di $kod(\mathcal{R}_g)$ non è nota: $g = 8, 9, 10, 11$?

[16] Risultati vecchie e nuovi: [Donagi], [—], [Farkas, —], Izadi-Lo Giudice-Sankaran]. [Catanese], [Dolgachev], [Katsylo].

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{R}_g$ e $\mathcal{A}_g$

- $\mathcal{R}_g$ è di tipo generale per $g \geq 12$ [Farkas-Ludwig].
- La variazione di $kod(\mathcal{R}_g)$ non è nota: $g = 8, 9, 10, 11$?
- $\mathcal{R}_g$ è unirazionale per $g \leq 7$, razionale per $g \leq 4$.[16]

[16] Risultati vecchie e nuovi: [Donagi], [—], [Farkas, —], Izadi-Lo Giudice-Sankaran]. [Catanese], [Dolgachev], [Katsylo].

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{R}_g$ e $\mathcal{A}_g$

- $\mathcal{R}_g$ è di tipo generale per $g \geq 12$ [Farkas-Ludwig].
- La variazione di $kod(\mathcal{R}_g)$ non è nota: $g = 8, 9, 10, 11$?
- $\mathcal{R}_g$ è unirazionale per $g \leq 7$, razionale per $g \leq 4$.[16]
- Fino a $g \leq 6$ la mappa di Prym $P_g : \mathcal{R}_g \to \mathcal{A}_{g-1}$ domina e vale la unirazionalitá di $\mathcal{R}_g$: quindi $\mathcal{A}_{g-1}$ è unirazionale.

[16] Risultati vecchie e nuovi: [Donagi], [—], [Farkas, —], Izadi-Lo Giudice-Sankaran]. [Catanese], [Dolgachev], [Katsylo].

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{R}_g$ e $\mathcal{A}_g$

- $\mathcal{R}_g$ è di tipo generale per $g \geq 12$ [Farkas-Ludwig].
- La variazione di $kod(\mathcal{R}_g)$ non è nota: $g = 8, 9, 10, 11$?
- $\mathcal{R}_g$ è unirazionale per $g \leq 7$, razionale per $g \leq 4$.[16]
- Fino a $g \leq 6$ la mappa di Prym $P_g : \mathcal{R}_g \to \mathcal{A}_{g-1}$ domina e vale la unirazionalitá di $\mathcal{R}_g$: quindi $\mathcal{A}_{g-1}$ è unirazionale.
- $kod(\mathcal{A}_g)$ è di tipo generale per $g \geq 7$ (Mumford).

[16] Risultati vecchie e nuovi: [Donagi], [—], [Farkas, —], Izadi-Lo Giudice-Sankaran]. [Catanese], [Dolgachev], [Katsylo].

Panoramica sugli altri spazi: $\mathcal{R}_g$ e $\mathcal{A}_g$

- $\mathcal{R}_g$ è di tipo generale per $g \geq 12$ [Farkas-Ludwig].
- La variazione di $kod(\mathcal{R}_g)$ non è nota: $g = 8, 9, 10, 11$?
- $\mathcal{R}_g$ è unirazionale per $g \leq 7$, razionale per $g \leq 4$.[16]
- Fino a $g \leq 6$ la mappa di Prym $P_g : \mathcal{R}_g \to \mathcal{A}_{g-1}$ domina e vale la unirazionalitá di $\mathcal{R}_g$: quindi $\mathcal{A}_{g-1}$ è unirazionale.
- $kod(\mathcal{A}_g)$ è di tipo generale per $g \geq 7$ (Mumford).

$$kod(\mathcal{A}_6) = ???.$$

[16] Risultati vecchie e nuovi: [Donagi], [—], [Farkas, —], Izadi-Lo Giudice-Sankaran]. [Catanese], [Dolgachev], [Katsylo].

Panoramica sugli altri spazi: $Pic_{d,g}$

- $Pic_{d,g}$ è unirazionale per $g \leq 9$ e ogni d, via Mukai, [—].

[17] Cfr. [Farkas- –] per $d = g$

Panoramica sugli altri spazi: $Pic_{d,g}$

- $Pic_{d,g}$ è unirazionale per $g \leq 9$ e ogni d, via Mukai, [—].
- Per $g \geq 10$ [Bini-Fontanari-Viviani][17]:

[17] Cfr. [Farkas- –] per $d = g$

Panoramica sugli altri spazi: $Pic_{d,g}$

- $Pic_{d,g}$ è unirazionale per $g \leq 9$ e ogni d, via Mukai, [—].
- Per $g \geq 10$ [Bini-Fontanari-Viviani][17]:
- $Pic_{d,10}$ ha dimensione di Kodaira zero,

[17] Cfr. [Farkas- –] per $d = g$

Panoramica sugli altri spazi: $Pic_{d,g}$

- $Pic_{d,g}$ è unirazionale per $g \leq 9$ e ogni d, via Mukai, [—].
- Per $g \geq 10$ [Bini-Fontanari-Viviani][17]:
- $Pic_{d,10}$ ha dimensione di Kodaira zero,
- $Pic_{d,11}$ ha dimensione di Kodaira intermedia, via K3:

$$kod(Pic_{d,11}) = 19,$$

[17] Cfr. [Farkas- –] per $d = g$

Panoramica sugli altri spazi: $Pic_{d,g}$

- $Pic_{d,g}$ è unirazionale per $g \leq 9$ e ogni d, via Mukai, [—].
- Per $g \geq 10$ [Bini-Fontanari-Viviani][17]:
- $Pic_{d,10}$ ha dimensione di Kodaira zero,
- $Pic_{d,11}$ ha dimensione di Kodaira intermedia, via K3:

$$kod(Pic_{d,11}) = 19,$$

- $Pic_{d,g}$ é ha dimensione di Kodaira $3g - 3$ per $g \geq 12$.

[17] Cfr. [Farkas- –] per $d = g$

3. Curve di genere 8: risultati vecchi e nuovi

- Nel quadro finora descritto le curve di genere 8 hanno diversi aspetti interessanti.

- $\overline{\mathcal{S}}_8^-$ è unirazionale.
- $\overline{\mathcal{S}}_8^+$ ha dimensione di Kodaira zero.
- $Pic_{0,8}$ e quindi $\overline{\mathcal{M}}_{14}$ sono unirazionali.
- Prym-Green non vale per $g = 8$, [CFVV] [18] in progress.

- In questa parte vedremo in concreto alcuni di questi aspetti.

[18] Colombo, Farkas, Voisin, —

Curve paracanoniche di genere 8

- Sia $C \subset \mathbf{P}^6$ immersa da $K_C \otimes \alpha$ dove $[C, \alpha] \in Pic_{0,8}$ è generico. C è proiettivamente normale e I_α è generato da quadriche.

[19] dove $Q_i = \{q_i = 0\}$

Curve paracanoniche di genere 8

- Sia $C \subset \mathbf{P}^6$ immersa da $K_C \otimes \alpha$ dove $[C, \alpha] \in Pic_{0,8}$ è generico. C è proiettivamente normale e I_α è generato da quadriche.
- In particolare si ha $dim\ I_\alpha(2) = 7$. Sia $V \subset I_\alpha(2)$ generico di dimensione 5 e sia $q_1 \dots q_5$ una sua base, allora

$$Q_1 \cap \dots \cap Q_5 = C \cup D$$ [19]

dove $C \cup D$ è nodale e D è liscia, irriducibile di genere $g = 14$.

[19] dove $Q_i = \{q_i = 0\}$

Curve paracanoniche di genere 8

- Sia $C \subset \mathbf{P}^6$ immersa da $K_C \otimes \alpha$ dove $[C, \alpha] \in Pic_{0,8}$ è generico. C è proiettivamente normale e I_α è generato da quadriche.
- In particolare si ha $dim\ I_\alpha(2) = 7$. Sia $V \subset I_\alpha(2)$ generico di dimensione 5 e sia $q_1 \dots q_5$ una sua base, allora

  $$Q_1 \cap \cdots \cap Q_5 = C \cup D$$ [19]

  dove $C \cup D$ è nodale e D è liscia, irriducibile di genere $g = 14$.
- D è dunque legata a C da una intersezione completa. Seguendo un approccio generale di Severi, ha senso cercare di provare che $\mathcal{M}_{14}$ è unirazionale usando le curve C di genere minore.

[19] dove $Q_i = \{q_i = 0\}$

Genere 8 e unirazionalitá di $\mathcal{M}_{14}$

- **Teorema** $\mathcal{M}_{14}$ è unirazionale.
- Schema della dimostrazione:

Genere 8 e unirazionalitá di $\mathcal{M}_{14}$

- **Teorema** $\mathcal{M}_{14}$ è unirazionale.
- Schema della dimostrazione:
- Sia $[D'] \in \mathcal{M}_{14}$ generico e sia $L' \in W^1_8(D')$.

Genere 8 e unirazionalitá di $\mathcal{M}_{14}$

- **Teorema** $\mathcal{M}_{14}$ è unirazionale.
- Schema della dimostrazione:
- Sia $[D'] \in \mathcal{M}_{14}$ generico e sia $L' \in W^1_8(D')$.
- **Proprietá**:

Genere 8 e unirazionalitá di $\mathcal{M}_{14}$

- **Teorema** $\mathcal{M}_{14}$ è unirazionale.
- Schema della dimostrazione:
- Sia $[D'] \in \mathcal{M}_{14}$ generico e sia $L' \in W^1_8(D')$.
- **Proprietá**:
- $K_{D'} \otimes L'^{-1}$ definisce una immersione $D' \subset \mathbf{P}^6$,

Genere 8 e unirazionalitá di $\mathcal{M}_{14}$

- **Teorema** $\mathcal{M}_{14}$ è unirazionale.
- Schema della dimostrazione:
- Sia $[D'] \in \mathcal{M}_{14}$ generico e sia $L' \in W^1_8(D')$.
- **Proprietá**:
- $K_{D'} \otimes L'^{-1}$ definisce una immersione $D' \subset \mathbf{P}^6$,
- D' è proiettivamente normale,

Genere 8 e unirazionalitá di $\mathcal{M}_{14}$

- **Teorema** $\mathcal{M}_{14}$ è unirazionale.
- Schema della dimostrazione:
- Sia $[D'] \in \mathcal{M}_{14}$ generico e sia $L' \in W^1_8(D')$.
- **Proprietá**:
- $K_{D'} \otimes L'^{-1}$ definisce una immersione $D' \subset \mathbf{P}^6$,
- D' è proiettivamente normale,
- $V' := \ I_{D'}(2)$ ha dimensione 5,

Genere 8 e unirazionalitá di $\mathcal{M}_{14}$

- **Teorema** $\mathcal{M}_{14}$ è unirazionale.
- Schema della dimostrazione:
- Sia $[D'] \in \mathcal{M}_{14}$ generico e sia $L' \in W^1_8(D')$.
- **Proprietá**:
- $K_{D'} \otimes L'^{-1}$ definisce una immersione $D' \subset \mathbf{P}^6$,
- D' è proiettivamente normale,
- $V' := I_{D'}(2)$ ha dimensione 5,
- il luogo base di $|V'|$ è una curva nodale $C' \cup D'$ come sopra.

- Le proprietá precedenti definiscono una mappa razionale dominante

$$\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14},$$

dove $\mathcal{W}^1_{8,14}$ indica il luogo di Brill-Noether universale

$$\mathcal{W}^1_{8,14} := \{[D, L] \in Pic_{8,14} \ / \ \dim |L| \geq 1\}$$

- Le proprietá precedenti definiscono una mappa razionale dominante

$$\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14},$$

dove $\mathcal{W}^1_{8,14}$ indica il luogo di Brill-Noether universale

$$\mathcal{W}^1_{8,14} := \{[D, L] \in Pic_{8,14} \;/\; \dim |L| \geq 1\}$$

- $\mathcal{W}^1_{8,14}$ è irriducibile e domina $\mathcal{M}_{14}$ mediante la mappa $[D, L] \to [D]$.

- Le proprietá precedenti definiscono una mappa razionale dominante

$$\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14},$$

dove $\mathcal{W}^1_{8,14}$ indica il luogo di Brill-Noether universale

$$\mathcal{W}^1_{8,14} := \{[D, L] \in Pic_{8,14} \ / \ \dim |L| \geq 1\}$$

- $\mathcal{W}^1_{8,14}$ è irriducibile e domina $\mathcal{M}_{14}$ mediante la mappa $[D, L] \to [D]$.
- $\mathcal{G}$ è la varietá delle classi di isomorfismo delle terne (C, α, V), dove $V \in G(5, I_\alpha(2))$.

- Le proprietá precedenti definiscono una mappa razionale dominante

$$\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14},$$

dove $\mathcal{W}^1_{8,14}$ indica il luogo di Brill-Noether universale

$$\mathcal{W}^1_{8,14} := \{[D, L] \in Pic_{8,14} \ / \ \dim |L| \geq 1\}$$

- $\mathcal{W}^1_{8,14}$ è irriducibile e domina $\mathcal{M}_{14}$ mediante la mappa $[D, L] \to [D]$.
- $\mathcal{G}$ è la varietá delle classi di isomorfismo delle terne (C, α, V), dove $V \in G(5, I_\alpha(2))$.
- La mappa ϕ è cosí definita: $\phi[C, \alpha, V] = [D, L] \in \mathcal{W}^1_{8,14}$

- Le proprietá precedenti definiscono una mappa razionale dominante

$$\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14},$$

dove $\mathcal{W}^1_{8,14}$ indica il luogo di Brill-Noether universale

$$\mathcal{W}^1_{8,14} := \{[D, L] \in Pic_{8,14} \ / \ \dim |L| \geq 1\}$$

- $\mathcal{W}^1_{8,14}$ è irriducibile e domina $\mathcal{M}_{14}$ mediante la mappa $[D, L] \to [D]$.
- $\mathcal{G}$ è la varietá delle classi di isomorfismo delle terne (C, α, V), dove $V \in G(5, I_\alpha(2))$.
- La mappa ϕ è cosí definita: $\phi[C, \alpha, V] = [D, L] \in \mathcal{W}^1_{8,14}$
- ϕ è dominante per le precedenti osservazioni.

- Inoltre $\mathcal{G}$ è dotato della mappa razionale $\pi : \mathcal{G} \to Pic_{0,8}$ la cui fibra su $[C, \alpha]$ è $G(5, I_\alpha(2))$.

- Inoltre $\mathcal{G}$ è dotato della mappa razionale $\pi : \mathcal{G} \to Pic_{0,8}$ la cui fibra su $[C, \alpha]$ è $G(5, I_\alpha(2))$.
- Birazionalmente π è un Grassmann bundle di fibra $G(5,7)$:

$$\mathcal{G} \cong G(5,7) \times Pic_{0,8}.$$

- Inoltre $\mathcal{G}$ è dotato della mappa razionale $\pi : \mathcal{G} \to Pic_{0,8}$ la cui fibra su $[C, \alpha]$ è $G(5, I_\alpha(2))$.
- Birazionalmente π è un Grassmann bundle di fibra $G(5,7)$:

$$\mathcal{G} \cong G(5,7) \times Pic_{0,8}.$$

- Quindi $Pic_{0,8}$ unirazionale $\Longrightarrow$ $\mathcal{G}$ unirazionale $\Longrightarrow$

$$\mathcal{W}^1_{8,14} \text{ e } \mathcal{M}_{14} \text{ unirazionali.}$$

Unirazionalitá di $Pic_{0,8}$

- Per ogni α $\exists$ $x = (x_1, \dots, x_8) \in C^8$ tale che
$$\alpha \cong \mathcal{O}_C(x_1 - x_2 + \cdots + x_7 - x_8).$$

Unirazionalitá di $Pic_{0,8}$

- Per ogni α $\exists$ $x = (x_1, \dots, x_8) \in C^8$ tale che
$$\alpha \cong \mathcal{O}_C(x_1 - x_2 + \cdots + x_7 - x_8).$$
- Per il teorema di Mukai $C = \mathbf{P}^7 \cap \mathbb{M}_8 \subset \mathbf{P}^{14}$, dove $\mathbb{M}_8 = G(2,6)$.

Unirazionalitá di $Pic_{0,8}$

- Per ogni α $\exists$ $x = (x_1, \dots, x_8) \in C^8$ tale che
$$\alpha \cong \mathcal{O}_C(x_1 - x_2 + \cdots + x_7 - x_8).$$
- Per il teorema di Mukai $C = \mathbf{P}^7 \cap \mathbb{M}_8 \subset \mathbf{P}^{14}$, dove $\mathbb{M}_8 = G(2,6)$.
- Siano $x = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{M}_8^8$ generico e $\mathbf{P}^7_x := < x > \subset \mathbf{P}^{14}$:

Unirazionalitá di $Pic_{0,8}$

- Per ogni α $\exists$ $x = (x_1, \dots, x_8) \in C^8$ tale che
$$\alpha \cong \mathcal{O}_C(x_1 - x_2 + \cdots + x_7 - x_8).$$
- Per il teorema di Mukai $C = \mathbf{P}^7 \cap \mathbb{M}_8 \subset \mathbf{P}^{14}$, dove $\mathbb{M}_8 = G(2,6)$.
- Siano $x = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{M}_8^8$ generico e $\mathbf{P}_x^7 :=< x >\subset \mathbf{P}^{14}$:
- allora $C_x := \mathbf{P}_x^7 \cap \mathbb{M}_8$ è una curva canonica liscia di genere 8 e
$$\alpha_x := \mathcal{O}_{C_x}(x_1 - x_2 + \cdots + x_7 - x_8) \in \mathrm{Pic}^0\, C_x.$$

Unirazionalitá di $Pic_{0,8}$

- Per ogni α $\exists$ $x = (x_1, \ldots, x_8) \in C^8$ tale che

$$\alpha \cong \mathcal{O}_C(x_1 - x_2 + \cdots + x_7 - x_8).$$

- Per il teorema di Mukai $C = \mathbf{P}^7 \cap \mathbb{M}_8 \subset \mathbf{P}^{14}$, dove $\mathbb{M}_8 = G(2,6)$.
- Siano $x = (x_1, \ldots, x_8) \in \mathbb{M}_8^8$ generico e $\mathbf{P}^7_x := < x > \subset \mathbf{P}^{14}$:
- allora $C_x := \mathbf{P}^7_x \cap \mathbb{M}_8$ è una curva canonica liscia di genere 8 e

$$\alpha_x := \mathcal{O}_{C_x}(x_1 - x_2 + \cdots + x_7 - x_8) \in \mathrm{Pic}^0\, C_x.$$

- Sia $\psi : \mathbb{M}_8^8 \to Pic_{0,8}$ la mappa razionale cosí definita:

$$\psi(x) := [C_x, \alpha_x].$$

Per costruzione ψ è dominante. Quindi $Pic_{0,8}$ è unirazionale.

Divisore di Petri in $\mathcal{W}^1_{8,14}$

- **Teorema** $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14}$ è birazionale.
- Basta osservare che $\phi^{-1}[D, L] = [C, \alpha, V]$ con $V = I_D(2)$.

- $\mathbb{P}$ è la chiusura del complementare $\mathcal{P} - \mathbb{P}'$.

Divisore di Petri in $\mathcal{W}^1_{8,14}$

- **Teorema** $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14}$ è birazionale.
- Basta osservare che $\phi^{-1}[D, L] = [C, \alpha, V]$ con $V = I_D(2)$.
- Consideriamo allora in $\mathcal{W}^1_{8,14}$ il divisore di Petri

  $\mathcal{P} := \{[D, L] \ / \ \mu_L : H^0(L) \otimes H^0(K_C \otimes L^{-1}) \to H^0(K_C)$ non è iniettiva.

- $\mathbb{P}$ è la chiusura del complementare $\mathcal{P} - \mathbb{P}'$.

Divisore di Petri in $\mathcal{W}^1_{8,14}$

- **Teorema** $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14}$ è birazionale.
- Basta osservare che $\phi^{-1}[D, L] = [C, \alpha, V]$ con $V = I_D(2)$.
- Consideriamo allora in $\mathcal{W}^1_{8,14}$ il divisore di Petri

  $\mathcal{P} := \{[D, L] \,/\, \mu_L : H^0(L) \otimes H^0(K_C \otimes L^{-1}) \to H^0(K_C)$ non è iniettiva.
- $\mathcal{P}$ ha due componenti irriducibili $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$:
- $\mathbb{P}$ è la chiusura del complementare $\mathcal{P} - \mathbb{P}'$.

Divisore di Petri in $\mathcal{W}^1_{8,14}$

- **Teorema** $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14}$ è birazionale.
- Basta osservare che $\phi^{-1}[D, L] = [C, \alpha, V]$ con $V = I_D(2)$.
- Consideriamo allora in $\mathcal{W}^1_{8,14}$ il divisore di Petri

  $\mathcal{P} := \{[D, L] \,/\, \mu_L : H^0(L) \otimes H^0(K_C \otimes L^{-1}) \to H^0(K_C)$ non è iniettiva.
- $\mathcal{P}$ ha due componenti irriducibili $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$:
- Per un punto generico $[D, L] \in \mathbb{P}'$ il fascio $|L|$ ha punti base.
- $\mathbb{P}$ è la chiusura del complementare $\mathcal{P} - \mathbb{P}'$.

Divisore di Koszul in $Pic_{0,8}$

- $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14}$ è un isomorfismo e $\pi : \mathcal{G} \to Pic_{0,8}$ una fibrazione in Grassmaniane: che cosa puó diventare

$$\pi(\phi^{-1}(\mathcal{P})) \ ?$$

---

[20] D è immerso da $K_D \otimes L^{-1}$. $C \cup D$ è intersezione completa delle 5 quadriche $Q_1 \dots Q_5$ e S è intersezione completa trasversale di 4 quadriche $Q_1 \dots Q_4$ contenenti D.

Divisore di Koszul in $Pic_{0,8}$

- $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14}$ è un isomorfismo e $\pi : \mathcal{G} \to Pic_{0,8}$ una fibrazione in Grassmaniane: che cosa puó diventare

$$\pi(\phi^{-1}(\mathcal{P})) \ ?$$

- Per capirlo consideriamo $D \subset S = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4 \subset \mathbf{P}^6$ [20]

[20] D è immerso da $K_D \otimes L^{-1}$. $C \cup D$ è intersezione completa delle 5 quadriche $Q_1 \dots Q_5$ e S è intersezione completa trasversale di 4 quadriche $Q_1 \dots Q_4$ contenenti D.

Divisore di Koszul in $Pic_{0,8}$

- $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14}$ è un isomorfismo e $\pi : \mathcal{G} \to Pic_{0,8}$ una fibrazione in Grassmaniane: che cosa puó diventare

$$\pi(\phi^{-1}(\mathcal{P})) \ ?$$

- Per capirlo consideriamo $D \subset S = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4 \subset \mathbf{P}^6$ [20]
- S è una superficie liscia, canonica, cioè $K_S \sim H$, e semplicemente connessa. Posto inoltre $[C, \alpha] = \phi^{-1}[D, L]$ si ha

$$C \cup D = Q_5 \cap S \subset \mathbf{P}^6$$

[20] D è immerso da $K_D \otimes L^{-1}$. $C \cup D$ è intersezione completa delle 5 quadriche $Q_1 \dots Q_5$ e S è intersezione completa trasversale di 4 quadriche $Q_1 \dots Q_4$ contenenti D.

Divisore di Koszul in $Pic_{0,8}$

- $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{W}^1_{8,14}$ è un isomorfismo e $\pi : \mathcal{G} \to Pic_{0,8}$ una fibrazione in Grassmaniane: che cosa puó diventare

$$\pi(\phi^{-1}(\mathcal{P})) \ ?$$

- Per capirlo consideriamo $D \subset S = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4 \subset \mathbf{P}^6$ [20]
- S è una superficie liscia, canonica, cioè $K_S \sim H$, e semplicemente connessa. Posto inoltre $[C, \alpha] = \phi^{-1}[D, L]$ si ha

$$C \cup D = Q_5 \cap S \subset \mathbf{P}^6$$

- e quindi

$$|\mathcal{O}_S(D)| = |\mathcal{O}_S(2H - C)|.$$

[20] D è immerso da $K_D \otimes L^{-1}$. $C \cup D$ è intersezione completa delle 5 quadriche $Q_1 \dots Q_5$ e S è intersezione completa trasversale di 4 quadriche $Q_1 \dots Q_4$ contenenti D.

- D'altra parte $L \cong \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}_D(2H - C)$ e $\mathcal{O}_D(H) \cong K_D \otimes L^{-1}$ e

$$\mu_L : H^0(L) \otimes H^0(H) \to H^0(K_D)$$

non è iniettiva se e solo se $[D, L] \in \mathcal{P}$. [21] Tensorizzando allora con $V := H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^6}(1))$ la successione esatta standard

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(2H - C) \to L \to 0$$

si ottiene il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \otimes H^0(\mathcal{O}_S) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & V \otimes \mathcal{O}_S(2H - C) \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & V \otimes L \arrow[r] \arrow[d, "\mu_L"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r] & H^0(\mathcal{O}_S(3H - C)) \arrow[r] & H^0(K_D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da questo si puó dedurre che:

[21] Equivalentemente, in questo caso, μ_L non è un isomorfismo

- $[D, L] \in \mathcal{P}$ se e solo per $[C, \alpha]$ la mappa di moltiplicazione

$$m : V \otimes I_\alpha(2) \to I_\alpha(3)$$

non è un isomorfismo. Poichè $Ker\ m = K_{2,1}(K_C \otimes \alpha)$ ne segue che

- $[D, L] \in \mathcal{P}$ se e solo per $[C, \alpha]$ la mappa di moltiplicazione

$$m : V \otimes I_\alpha(2) \to I_\alpha(3)$$

non è un isomorfismo. Poichè $Ker\ m = K_{2,1}(K_C \otimes \alpha)$ ne segue che

- **Teorema** $[D, L] \in \mathcal{P}$ se e solo se $[C, \alpha] \in \mathcal{K}$.

- $[D, L] \in \mathcal{P}$ se e solo per $[C, \alpha]$ la mappa di moltiplicazione

$$m : V \otimes I_\alpha(2) \to I_\alpha(3)$$

non è un isomorfismo. Poichè $Ker\ m = K_{2,1}(K_C \otimes \alpha)$ ne segue che

- **Teorema** $[D, L] \in \mathcal{P}$ se e solo se $[C, \alpha] \in \mathcal{K}$.
- Per ogni genere pari un analogo divisore $\mathcal{K}_g$ è definito dalla condizione $K_{\frac{g}{2}-2,1}(K_C \otimes \alpha) \neq 0$.

- $[D, L] \in \mathcal{P}$ se e solo per $[C, \alpha]$ la mappa di moltiplicazione
$$m : V \otimes I_\alpha(2) \to I_\alpha(3)$$
non è un isomorfismo. Poichè $Ker\ m = K_{2,1}(K_C \otimes \alpha)$ ne segue che
- **Teorema** $[D, L] \in \mathcal{P}$ se e solo se $[C, \alpha] \in \mathcal{K}$.
- Per ogni genere pari un analogo divisore $\mathcal{K}_g$ è definito dalla condizione $K_{\frac{g}{2}-2,1}(K_C \otimes \alpha) \neq 0$.
- $\mathcal{K}_g$ é analogo al divisore di Harris-Mumford di $\mathcal{M}_g$ in genere dispari.

$\mathcal{K}$ e Prym-Green in genere 8

- La congettura di Prym-Green per curve paracanoniche in genere pari equivale alla condizione che in $Pic_{0,g}$ sia

$$\mathcal{R}_{g,l} \not\subset \mathcal{K}_g$$

$\mathcal{K}$ e Prym-Green in genere 8

- La congettura di Prym-Green per curve paracanoniche in genere pari equivale alla condizione che in $Pic_{0,g}$ sia

$$\mathcal{R}_{g,l} \not\subset \mathcal{K}_g$$

- Work in progress (Colombo, Farkas, Voisin, –): in genere 8

$$\mathcal{R}_8 \subset \mathcal{K}_8 = \mathcal{K}$$

Geometria delle componenti di $\mathcal{K}$

- $\mathcal{K}$ ha due componenti irriducibili: $\mathcal{K} = \mathbb{K} \cup \mathbb{K}'$ dove

$$\mathbb{K} := \pi(\phi^{-1}(\mathbb{D}).$$

Geometria delle componenti di $\mathcal{K}$

- $\mathcal{K}$ ha due componenti irriducibili: $\mathcal{K} = \mathbb{K} \cup \mathbb{K}'$ dove
$$\mathbb{K} := \pi(\phi^{-1}(\mathbb{D}).$$
- Per un generico $[D, L] \in \mathbb{K}$ il fascio $|L|$ non ha punti base.

Geometria delle componenti di $\mathcal{K}$

- $\mathcal{K}$ ha due componenti irriducibili: $\mathcal{K} = \mathbb{K} \cup \mathbb{K}'$ dove

$$\mathbb{K} := \pi(\phi^{-1}(\mathbb{D}).$$

- Per un generico $[D, L] \in \mathbb{K}$ il fascio $|L|$ non ha punti base.
- Il risultato riguarda il fatto che $\mathbb{K}$ contiene $\mathcal{R}_8$:

$$\mathcal{R}_8 \subset \mathbb{K}$$

Un' idea diretta di dimostrazione é la seguente.

Caratterizzazioni geometriche di $\mathbb{K}$

- Sa $[C, \alpha] \in Pic_{0,8}$ tale che C è proiettivamente normale e I_α è generato da quadriche. [22] Abbiamo allora una mappa razionale

$$q_\alpha : \mathbf{P}^6 \to \mathbf{P}^6$$

definita dal sistema lineare di quadriche $|I_\alpha(2)|$. q ha grado 8. [23]

[22] Ció vale genericamente anche su $\mathbb{K}$ e anche su $\mathcal{R}_8$, (Colombo-Frediani).

[23] Piú in concreto q è definita da una base $q_0 \dots q_6$ di $I_{C,\alpha}(2)$ e ha equazioni $y_0 = q_0$, . . . , $y_6 = q_6$.

[24] Una quarta condizione equivalente è che $Sym^2 I_\alpha(2) \to I^2_\alpha(4))$ sia iniettivo ma non suriettivo. In termini geometrici: non tutte le quartiche singolari lungo C sono 'quadriche di quadriche'

Caratterizzazioni geometriche di $\mathbb{K}$

- Sa $[C, \alpha] \in Pic_{0,8}$ tale che C è proiettivamente normale e I_α è generato da quadriche. [22] Abbiamo allora una mappa razionale

$$q_\alpha : \mathbf{P}^6 \to \mathbf{P}^6$$

definita dal sistema lineare di quadriche $|I_\alpha(2)|$. q ha grado 8. [23]

- Sono equivalenti le seguenti condizioni: [24]

 1. $[C, \alpha]$ è un punto generale di $\mathbb{K}$,
 2. q_α contrae una curva ellittica E 14-secante a C di grado 7,
 3. $m : H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^6}(1)) \otimes I_\alpha(2) \to I_\alpha(3)$ non è un isomorfismo,

[22] Ció vale genericamente anche su $\mathbb{K}$ e anche su $\mathcal{R}_8$, (Colombo-Frediani).

[23] Piú in concreto q è definita da una base $q_0 \dots q_6$ di $I_{C,\alpha}(2)$ e ha equazioni $y_0 = q_0$, ... , $y_6 = q_6$.

[24] Una quarta condizione equivalente è che $Sym^2 I_\alpha(2) \to I^2_\alpha(4))$ sia iniettivo ma non suriettivo. In termini geometrici: non tutte le quartiche singolari lungo C sono 'quadriche di quadriche'

Theta caratteristiche

- Sia $t := E \cdot C$ si dimostra che E esiste se e solo se

$$K_C \otimes \alpha^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_C(t) \text{ e } \mathcal{O}_E(2) \cong \mathcal{O}_E(t).$$

---

[25] La situazione descritta è geometricamente nota. Essa riguarda la varietá universale della sizigie di rango 6 cfr. [Aprodu-Nagel], [Schreyer], [CEFS]). Sia $P := (p_{ij})$ antisimmetrica 6×6 e sia $q = (q_1 \dots q_6)$. In $\mathbf{P}^{20}$ con coordinate (P, q) si ha la varietá di codimensione 6

$$X_6 := \{(P, q) \ / \ \ q \text{ è soluzione di } PX = 0\}$$

Ogni sua sezione lineare curvilinea F è una curva di genere 22 con theta caratteristica $\theta = h^0(\mathcal{O}_F(1)$. Inoltre

$$C \cup E = \mathbf{P}^6 \cap X_6 \tag{1}$$

Theta caratteristiche

- Sia $t := E \cdot C$ si dimostra che E esiste se e solo se

$$K_C \otimes \alpha^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_C(t) \text{ e } \mathcal{O}_E(2) \cong \mathcal{O}_E(t).$$

- Posto $\theta_\alpha := \mathcal{O}_{C \cup E}(1)$ si ha una theta caratteristica dispari sulla curva $C \cup E$ con $h^0(\theta_\alpha) = 7.$ [25]

---

[25] La situazione descritta è geometricamente nota. Essa riguarda la varietá universale della sizigie di rango 6 cfr. [Aprodu-Nagel], [Schreyer], [CEFS]). Sia $P := (p_{ij})$ antisimmetrica 6×6 e sia $q = (q_1 \dots q_6)$. In $\mathbf{P}^{20}$ con coordinate (P, q) si ha la varietá di codimensione 6

$$X_6 := \{(P, q) \ / \ \ q \text{ è soluzione di } PX = 0\}$$

Ogni sua sezione lineare curvilinea F è una curva di genere 22 con theta caratteristica $\theta = h^0(\mathcal{O}_F(1)$. Inoltre

$$C \cup E = \mathbf{P}^6 \cap X_6 \tag{1}$$

- Fissato C e $\alpha \in Pic^0 C$, consideriamo la famiglia di theta dispari

$$\mathcal{T}_\alpha := \{(C \cup E_{\tilde{t}}, \theta_{\tilde{t}}), \tilde{t} \in C^{14}\}$$

tali che:

1. $\tilde{t} \in C^{14}$,
2. $s(\tilde{t}) = t \in |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}|$ dove $s : C^{14} \to C^{(14)}$ è la somma,
3. $t = C \cap E_{\tilde{t}}$,
4. $\theta_{\tilde{t}} \otimes \mathcal{O}_C \cong K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}$

- Fissato C e $\alpha \in Pic^0 C$, consideriamo la famiglia di theta dispari

$$\mathcal{T}_\alpha := \{(C \cup E_{\tilde{t}}, \theta_{\tilde{t}}), \tilde{t} \in C^{14}\}$$

tali che:

1. $\tilde{t} \in C^{14}$,
2. $s(\tilde{t}) = t \in |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}|$ dove $s : C^{14} \to C^{(14)}$ è la somma,
3. $t = C \cap E_{\tilde{t}}$,
4. $\theta_{\tilde{t}} \otimes \mathcal{O}_C \cong K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}$

- Fissato C e $\alpha \in Pic^0 C$, consideriamo la famiglia di theta dispari

$$\mathcal{T}_\alpha := \{(C \cup E_{\tilde{t}}, \theta_{\tilde{t}}), \tilde{t} \in C^{14}\}$$

  tali che:

  1. $\tilde{t} \in C^{14}$,
  2. $s(\tilde{t}) = t \in |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}|$ dove $s : C^{14} \to C^{(14)}$ è la somma,
  3. $t = C \cap E_{\tilde{t}}$,
  4. $\theta_{\tilde{t}} \otimes \mathcal{O}_C \cong K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}$

- Per $\alpha^{\otimes 2} \neq \mathcal{O}_C$ si ha $\dim |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}| = 6$ e $\dim \mathcal{T}_\alpha = 20$,

- Fissato C e $\alpha \in Pic^0 C$, consideriamo la famiglia di theta dispari

$$\mathcal{T}_\alpha := \{(C \cup E_{\tilde{t}}, \theta_{\tilde{t}}), \tilde{t} \in C^{14}\}$$

tali che:

1. $\tilde{t} \in C^{14}$,
2. $s(\tilde{t}) = t \in |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}|$ dove $s : C^{14} \to C^{(14)}$ è la somma,
3. $t = C \cap E_{\tilde{t}}$,
4. $\theta_{\tilde{t}} \otimes \mathcal{O}_C \cong K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}$

- Per $\alpha^{\otimes 2} \neq \mathcal{O}_C$ si ha $\dim |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}| = 6$ e $\dim \mathcal{T}_\alpha = 20$,

- Fissato C e $\alpha \in Pic^0 C$, consideriamo la famiglia di theta dispari

$$\mathcal{T}_\alpha := \{(C \cup E_{\tilde{t}}, \theta_{\tilde{t}}), \tilde{t} \in C^{14}\}$$

  tali che:

  1. $\tilde{t} \in C^{14}$,
  2. $s(\tilde{t}) = t \in |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}|$ dove $s : C^{14} \to C^{(14)}$ è la somma,
  3. $t = C \cap E_{\tilde{t}}$,
  4. $\theta_{\tilde{t}} \otimes \mathcal{O}_C \cong K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}$

- Per $\alpha^{\otimes 2} \neq \mathcal{O}_C$ si ha $\dim |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}| = 6$ e $\dim \mathcal{T}_\alpha = 20$,
- Per $\alpha^{\otimes 2} = \mathcal{O}_C$ si ha $\dim |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}| = 7$ e $\dim \mathcal{T}_\alpha = 21$,

- Fissato C e $\alpha \in Pic^0 C$, consideriamo la famiglia di theta dispari

$$\mathcal{T}_\alpha := \{(C \cup E_{\tilde{t}}, \theta_{\tilde{t}}), \tilde{t} \in C^{14}\}$$

  tali che:

  1. $\tilde{t} \in C^{14}$,
  2. $s(\tilde{t}) = t \in |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}|$ dove $s : C^{14} \to C^{(14)}$ è la somma,
  3. $t = C \cap E_{\tilde{t}}$,
  4. $\theta_{\tilde{t}} \otimes \mathcal{O}_C \cong K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}$

- Per $\alpha^{\otimes 2} \neq \mathcal{O}_C$ si ha $\dim |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}| = 6$ e $\dim \mathcal{T}_\alpha = 20$,
- Per $\alpha^{\otimes 2} = \mathcal{O}_C$ si ha $\dim |K_C \otimes \alpha^{\otimes 2}| = 7$ e $\dim \mathcal{T}_\alpha = 21$,
- inoltre

$$\mathbb{K} \cap Pic^0(C) = \{\alpha \;/\; \exists C \cup E_{\tilde{t}} \;/\; h^0(\theta_{\tilde{t}}) = 7\}.$$

$\mathcal{R}_8 \subset \mathbb{K}$

- La condizione $h^0(\theta_z) = r + 1$ determina un luogo di codimensione $\leq \binom{r+1}{2}$ in una famiglia $\{(X_z, \theta_z),\ z \in Z\}$ di theta caratteristiche.

$\mathcal{R}_8 \subset \mathbb{K}$

- La condizione $h^0(\theta_z) = r + 1$ determina un luogo di codimensione $\leq \binom{r+1}{2}$ in una famiglia $\{(X_z, \theta_z),\ z \in Z\}$ di theta caratteristiche.
- Fissato α tale che $\alpha^{\otimes 2} = \mathcal{O}_C$ abbiamo $\dim \mathcal{T}_\alpha = 21$.

$\mathcal{R}_8 \subset \mathbb{K}$

- La condizione $h^0(\theta_z) = r + 1$ determina un luogo di codimensione $\leq \binom{r+1}{2}$ in una famiglia $\{(X_z, \theta_z),\ z \in Z\}$ di theta caratteristiche.
- Fissato α tale che $\alpha^{\otimes 2} = \mathcal{O}_C$ abbiamo $\dim \mathcal{T}_\alpha = 21$.
- Poichè $\binom{7}{2} = 21$ ci si attende $\mathcal{T}_\alpha \cap \mathbb{K} \neq \emptyset$: se la classe di questa intersezione non è zero. Ció implica $[C, \alpha] \in \mathbb{K}$ e infine

$$\mathcal{R}_8 \subset \mathbb{K}.$$