Spazi matematici nelle rivoluzioni scientifiche del Novecento

Alessandro Verra

Abstract

Questo testo [1] ha lo scopo di indicare a un pubblico di studenti universitari una via di ampi panorami, percorrendo la quale é forse possibile avere una prima visione di un insieme di fenomeni e di relazioni. I fenomeni a cui si fará riferimento sono quelli che hanno caratterizzato il corso delle scienze matematiche nel Novecento, in particolare della Geometria: avremo modo di occuparci delle strade nuove e a volte imprevedibili che la nozione di spazio si é trovata a percorrere, anche in questo secolo. Le relazioni riguardano i rapporti che questi fenomeni ed eventi scientifici, il dispiegarsi delle nuove idee in Geometria, hanno posto in essere con il fluire degli avvenimenti storici: con la storia generale, ma anche con gli eventi singoli o addirittura individuali, che insieme compongono la storia culturale e scientifica del Novecento.

[1] **Queste diapositive sono una versione ampliata di un ciclo di lezioni tenute dall' autore alla Scuola ASTRE di Roma Tre 2013. Ogni segnalazione di misprints, imprecisioni o errori é gradita**

Prima parte

4 Gli argomenti di queste lezioni

- *La Geometria dal locale al globale tra Ottocento e Novecento.*
- *XX secolo: l' epoca delle forme e delle strutture.*
- *Algebra versus Geometria.*
- *Geometria e Natura: la persistenza dei temi classici.*
- *2 e 3 sottolineano una caratteristica di rilievo della storia scientifica del Novecento: la spinta verso la costruzione di strutture generali e astratte della conoscenza.* [2]
- *1 e 4 sottolineano la persistenza e lo sviluppo di quel ramo della conoscenza che vede la Matematica affiancata alle altre scienze che studiano il mondo fisico e il linguaggio della Natura.* [3]

---

[2] In Matematica un esempio di tale fenomeno sono i programmi di ricostruzione rigorosamente assiomatica di ogni sua parte: ogni teoria matematica deve essere sviluppata, a partire da un sistema di assiomi iniziali, secondo il metodo logico-deduttivo della logica formale.

[3] La Matematica insomma, e la Geometria in particolare, anche nel Novecento si sviluppano e pensano a se stesse come a una parte della classica Phylosophia Naturalis. Di piú: la stessa Matematica viene vista, in un certo senso, come una parte riposta e nascosta della Natura: da scoprire e comprendere.

5 Due visioni complementari

- *Due grandi nomi del Novecento ben rappresentano le due visioni a cui si é accennato: Hilbert versus Poincaré.*
- *Si potrebbero aggiungere alla rinfusa altri nomi di matematici, teorie matematiche o scuole del Novecento posti su un versante o l' altro.* [4]
- *Sempre piú alla rinfusa: diversi spunti di riflessione sembrano possibili per collegare queste due visioni con altri versanti culturali e con tendenze simili, sviluppatisi nello stesso secolo.*
- *Le strutture generali sono nel Novecento una passione molto piú ampia: antropologia, linguistica, filosofia analitica, logica...*
- *D' altra parte le idee e scoperte che affiancano la Matematica alle scienze della Natura continuano il fortissimo loro sviluppo.*

4

- *Poincaré, la geometria italiana del primo Novecento, Arnold e molta matematica sovietica, Atiyah, Witten, Thurston...*
- *Hilbert, il movimento Bourbaki, gli Elements de Geometrie Algébrique di Grothendieck, la teoria delle categorie...*

6 Due visioni complementari

- *Tutto ció puó essere interessante, ma approfondirlo non é, evidentemente, un compito a me possibile.*
- *Le riflessioni e gli approfondimenti spetteranno a voi studenti, se queste lezioni saranno servite.*
- *Il mio compito, come matematico, puó essere soltanto quello di fornire spunti e piccole indicazioni, prese dalla matematica e dalla sua storia, per osservare il secolo da poco trascorso.*

7 Gli oggetti geometrici di queste lezioni

- *Vedremo esempi di quegli spazi che i geometri del '900 hanno visto e saputo fare vedere a noi.* **Vedere e saper vedere** *é una modalitá della matematica come ci ricorda Michael Atiyah* [5]*:*
- *'...if you try to explain a piece of mathematics to a student or a colleague. You have a long difficult argument, and finally the student understands. What does the student says? The student says 'I see!'. Seeing is synonymous with understanding .... '*

1. *Dal locale al globale: che cosa é una* **varietá.**
2. *Forme e strutture astratte:* **spazi topologici.**
3. *Algebra versus Geometria: che cosa é un* **punto.**
4. *Natura e classificazione:* **famiglie di spazi.**

[5] M. Atiyah 'Mathematics in 20th century', Bulletin London Math. Soc. 34 (2002) 1-15

8

- *Per le scienze umane il globale é il luogo dove culture diverse acquisiscono caratteri uniformi e omogenei* [6]. *In Geometria il passaggio dal locale al globale va nella direzione opposta:*
- *a livello globale si manifestano le differenze tra spazi che, a livello locale, mostrano invece la stessa struttura uniforme ed omogenea.*
- *Questo é tipico della nozione geometrica generale di*

Varietá

- *In ogni punto di una varietá avviene che, in una 'piccola porzione dei dintorni' del punto, la struttura 'locale' dello spazio sia proprio quella di 'spazio euclideo': a una, due, tre o piú dimensioni.*
- **La sorpresa é nel globale***: l' intero spazio puó avere caratteri globali estremamente diversi dall' uniforme carattere locale che mostra nelle vicinanze ogni suo punto.*

[6] K. Mondher 'Antropologia. Dal locale al globale' Dedalo 2011

9 Dall' Ottocento al Novecento

- *Il passaggio alle nuove idee rappresentate dalla nozione di varietá percorre l' Ottocento e giá agli inizi del '900 é* **di fatto** *compiuto. Ad esso contribuiscono tre grandissimi matematici:*
- *Karl Friedrich Gauss (1777-1855),*
  Bernhard Riemann (1826-1866)
  Henri Poincaré (1854-1912). [7]
- *La nozione di varietá, (topologica, differenziale, Riemanniana), rinnova totalmente il modo di pensare in Geometria.*
- *Essa influenza nel profondo le scienze della Natura e la loro storia: in particolare le rivoluzioni scientifiche della Fisica del Novecento.*

---

[7] *Tale passaggio nasce dalla forza del pensiero geometrico di Gauss. Si manifesta nelle idee, quasi visionarie, di Riemann. Riceve ulteriore impulso da Poincaré: basti ricordare il suo* **Analysis situs, l' analisi dello spazio,** *da cui nel XX secolo si sviluppa la topologia con i suoi i diversi rami.*

10 Dall' Ottocento al Novecento

Si é trattato tuttavia di un lungo cammino:

- *Marcel Berger:* [8] *'Non si pensi che la vicenda delle varietá Riemanniane si sia conclusa con i meravigliosi risultati ottenuti nel Novecento. Recentissimamente, di fatto nel XXI secolo, é stata la geometria Riemanniana a permettere la soluzione, da parte di Perelman, della congettura di Poincaré: nonostante questa riguardi un ambito diverso da quello delle varietá Riemanniane.'*
- *La dimostrazione completa della* **congettura di Poincaré** *chiude il Novecento in Geometria: Perelman 1996.*
- *La congettura riguarda le varietá che sono topologicamente equivalenti a una sfera di dimensione arbitraria: circonferenza in dimensione uno, sfera in dimensione due e a seguire...*[9]

---

[8] M. Berger 'Geometry in 20th century' Encyclopedia of Life support systems, UNESCO 2010

[9] *Sulla completa soluzione da parte di Perelman nel 1996 e sulle vicende collegate a questo importantissimo risultato scientifico alcuni di voi avranno recentemente letto qualche notizia sui media.*

11 Idee sullo spazio tra Settecento e Ottocento

Alla fine del Settecento i matematici lavorano ed operano, come da molti secoli prima, facendo riferimento ad un unico spazio: lo spazio della geometria di Euclide o

- *spazio euclideo.*

Lo spazio euclideo é una sorta di continuum tridimensionale in cui sono contenuti tutti gli oggetti che la geometria deve studiare. Facendo riferimento ad una intuitiva nozione di dimensione osserviamo peró che in esso si trovano oggetti diversi: uno-dimensionali come rette o curve, 2-dimensionali come piani, sfere, cilindri, 3-dimensionali come ad esempio l' insieme dei punti interni a una sfera. Tutto si pone all' interno di questa estensione spaziale, dove la matematica, insieme alle altre scienze della natura, svolge il proprio lavoro a favore della comprensione del mondo. La Filosofia della Natura, come venivano chiamate le scienze, si occupa di fenomeni che avvengono in questa estensione spaziale e non va oltre. La nozione di *spazio assoluto* introdotta da Newton (1642-1727) a fondamento dei suoi

- *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,*

(1687), é coerente con questo quadro. La filosofia di Kant (1724-104) si occupa della nozione di spazio e introduce un proprio punto di vista: nella Critica della ragion pura gli enunciati della matematica, e in particolare quelli della geometria, sono presentari come esempi di ***giudizi sintetici a priori.*** Non é certo il caso di entrare nel merito se non per quel che qui interessa: tale posizione, pur essendo nuova e diversa sul piano filosofico, conferma il carattere di unicitá a priori della nozione di spazio:

- *Lo spazio é una rappresentazione a priori, necessaria, che sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne. Non é possibile farsi la rappresentazione che non ci sia spazio, mentre si puó benissimo pensare che non ci sia in esso alcun oggetto. Lo spazio va pertanto considerato come la condizione della possibilitá dei fenomeni e non come una determinazione da essi dipendente; ed é una rappresentazione a priori, che sta necessariamente a fondamento dei fenomeni esterni.*

12 Le idee di Gauss e Kant

Se lo spazio é una rappresentazione universale e necessaria, allora le sue caratteristiche non possono che essere uniche e dunque va pensato come l' insieme dei punti della geometria di Euclide.
Questa idea di spazio, come si é giá osservato, era affermata da secoli e da secoli essa era l' oggetto della geometria. All' interno di questo spazio.,e nel lavoro della geometria, non erano tuttavia mai mancate le discussioni su molti aspetti, anche molto semplici, che alludevano ad altre forme di spazio o a un maggior numero di dimensioni. Insomma il lavoro teorico e pratico dei matematici mal si adattava all' assolutismo delle conclusioni kantiane. 'E fin troppo scontato citare Gauss:

- *Mi persuado sempre di piú che la necessitá della nostra geometria non possa essere dimostrata, non, per lo meno, dall'intelletto umano o per l'intelletto umano, Puó darsi che in una diversa vita noi si giunga, sulla natura dello spazio, ad idee diverse, le quali ci sono per ora inattingibili. Ma fino ad allora é necessario porre la geometria non accanto all'aritmetica, la quale é puramente a priori, ma all'incirca sullo stesso piano della meccanica.*
- *In qualche ora libera sono talvolta tornato a riflettere su un altro argomento che per me é giá vecchio di quasi quarant'anni; intendo parlare dei primi fondamenti della geometria; non so se Le ho giá parlato delle mie idee in proposito. Anche su tale argomento ho ulteriormente consolidato alcuni punti, e la mia convinzione che non sia possibile fondare la geometria in modo interamente a priori é divenuta se possibile, ancora piú salda. Intanto lasceró passare molto tempo prima di decidermi ad elaborare per la pubblicazione le mie assai ampie ricerche sull'argomento, e forse ció non avverrá mai durante la mia vita, perché temerei le strida dei Beoti qualora volessi esprimere compiutamente le mie idee.*

13 Alcune origini in concreto delle nuove idee

Il XIX secolo é un secolo di spinte rivoluzionarie: come stiamo cominciando a capire leggendo Gauss, toccherá anche alla Geometria. Ecco alcuni episodi, uno letterario, che riflettono, direttamente o indirettamente, le nuove idee:

- **La discussione sul quinto postulato di Euclide.** *'Per un punto passa un' unica parallela a una retta data' é nella geometria euclidea un assioma. L' antica congettura che esso potesse essere dimostrato come teorema a partire dagli altri assiomi era falsa. Tuttavia lo studio della congettura stava portando alla costruzione di nuove teorie geometriche:* **le geometrie non euclidee.**
- **La geometria proiettiva.** *La geometria proiettiva di Poncelet (1788 -1867) e Chasles (1793-1880) nasce dalle regole della prospettiva. Per essa rette parallele, incidenti al quadro che stiamo dipingendo, si rappresentano con rette convergenti nel punto di fuga.* [10] *Ció suggerisce l'idea di uno spazio in cui rette parallele si incontrano in un punto ulteriore 'all' infinito', rappresentato sul quadro dal punto di fuga. Sará* **lo spazio proiettivo.**

[10] Si sta qui parlando di proiezione delle due rette da un punto, il punto di vista del pittore, su un piano, il piano del quadro.

14 Alcune origini in concreto delle nuove idee

- **Flatlandia** *Romanzo di Edwin Abbott Abbott (1838 - 1926) i cui protagonisti sono figure piane, quindi esseri viventi in uno spazio a due dimensioni. Vengono descritte le complesse idee e relazioni di questi esseri con la nozione di spazio a tre dimensioni.*
- **Le funzioni di una variabile complessa.** [11] *Al variare dei numeri complessi* $z = a + ib$ *e* $w = c + id$ *ha senso considerare funzioni di variabile complessa* $w = f(z)$. *Nello studio di* $w = f(z)$ *entrano in gioco i quattro numeri reali* a, b, c, d. *Il grafico di* $w = f(z)$ *vive in uno spazio a 4 dimensioni, i cui punti hanno coordinate* (a, b, c, d). [12] *Lo studio di tali grafici porta Riemann alla nozione di varietá.*
- *Ma, prima di ulteriori approfondimenti, é bene tornare sullo spazio euclideo tridimensionale.*

---

[11] **I numeri complessi** $\mathbb{C}$ sono espressioni del tipo $x + iy$, dove x, y sono numeri reali e per convenzione $i^2 = -1$. Le quattro operazioni si compiono, secondo le regole del calcolo letterale, tenendo conto che $i^2 = -1$.

[12] Se ad esempio la funzione é $w = z^2$ allora si ha

$$c = a^2 - b^2 \;, \; d = 2ab.$$

15 Spazi euclidei

- *Ma che cosa é lo spazio euclideo? E che cosa vuol dire spazio euclideo a n dimensioni o di dimensione n?*
- *Qui ci interessa mettere in evidenza alcune caratteristiche di tali spazi che ci serviranno per giungere alla definizione di varietá.*
- *Cominciamo in tre dimensioni: d' ora in poi* $\mathbb{E}_3$ *indicherá lo spazio della geometria euclidea.*
- $\mathbb{E}_3$ *é dunque una sorta di modello tradizionale di universo, forse dai tempi dei greci.*

16 Coordinate cartesiane

- *Su* $\mathbb{E}_3$ *possiamo fissare, a piacere, una unitá di misura e un sistema di riferimento cartesiano:* $O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.
- Non importa quale sia stata la scelta fatta: importa che in tal modo descriveremo $\mathbb{E}_3$ utilizzando l' algebra delle coordinate:
- il sistema di riferimento determina una corrispondenza biunivoca

  $$\mathbb{E}_3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$$

  che associa ad ogni punto X le sue coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3). Qui $\mathbb{R}^3$ indica l' insieme delle terne ordinate di numeri reali.
- In $\mathbb{E}_3$ la distanza tra i punti P e Q, rispettivamente di coordinate (p_1, p_2, p_3) e (q_1, q_2, q_3) é poi espressa dalla formula

  $$\overline{PQ} = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

17 Coordinate cartesiane

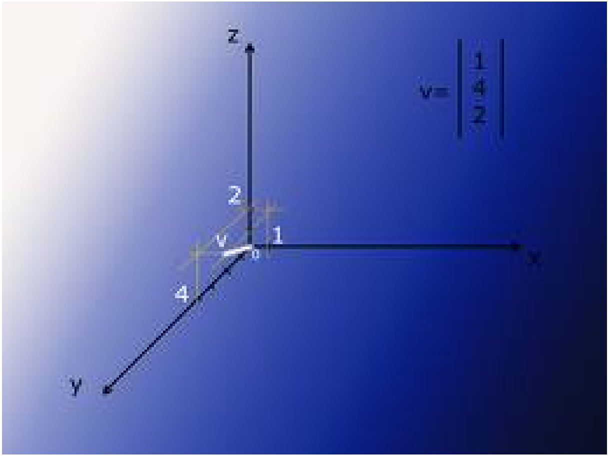


Figura: Coordinate cartesiane: $V = (1, -4, 2)$

18 Topologia euclidea di $\mathbb{E}_3$

- *Ci interessa sottolineare che $\mathbb{E}_3$ é pieno di sfere grandi o piccole. Per ogni sfera di centro P e raggio r possiamo considerare l' insieme dei suoi punti interni*

$$B_{P,r} := \{Q \in \mathbb{E}_3 \ / \ \overline{PQ} < r\}$$

- *Ogni punto appartiene ad una infinita di tali insiemi, di diametro anche piccolissimo. Moltissime figure, anche se certo non tutte, si ottengono unendo tra loro collezioni di insiemi $B_{P,r}$:*
- Definizione **La topologia euclidea di** $\mathbb{E}_3$ *é la famiglia $\mathcal{E}_3$ costituita da tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{E}_3$ che sono unione di insiemi $B_{P,r}$ e da $\emptyset$.*
- *Gli elementi A di $\mathcal{E}_3$ si chiamano* **aperti euclidei di** $\mathbb{E}_3$**.**

19 Piano euclideo e retta euclidea

Possiamo scendere di dimensione e realizzare costruzioni analoghe: d'ora in poi $\mathbb{E}_2$ indicherá un piano e $\mathbb{E}_1$ una retta, fissati a piacere.

- *I* **dischi aperti** *sono gli insiemi $D_{P,r} := \{Q \in \mathbb{E}_2 \ / \ \overline{PQ} < r\}$. La* **topologia euclidea di** $\mathbb{E}_2$ *é la famiglia $\mathcal{E}_2$ costituita da $\emptyset$ e dalle unioni di dischi aperti.*
- *I* **segmenti aperti** *sono gli insiemi $I_{P,r} := \{Q \in \mathbb{E}_1 \ / \ \overline{PQ} < r\}$. La* **topologia euclidea di** $\mathbb{E}_1$ *é la famiglia $\mathcal{E}_1$ costituita da $\emptyset$ e dalle unioni di segmenti aperti.* [13]

[13] Sia $n = 1, 2, 3$. Sará sempre sottinteso che un aperto di $\mathbb{E}_n$ é un elemento di $\mathcal{E}_n$: un segmento aperto ***non*** é un aperto di $\mathbb{E}_2$ né di $\mathbb{E}_3$.

20 Spazi euclidei per tutte le dimensioni

Per ognuno dei tre casi terremo ben presente che gli aperti euclidei sono quelli che abbiamo ora definito. Diremo allora che:

- *$\mathbb{E}_1$ é la retta euclidea, $\mathbb{E}_2$ é il piano euclideo, $\mathbb{E}_3$ é lo spazio euclideo.*
- *E poi? Si puó salire di dimensione e costruire uno spazio euclideo di dimensione $n \geq 3$? Ció ha senso? Ció é utile?*
- *La risposta é sí in tutti e tre i casi. Lo spazio euclideo di dimensione n qualsiasi puó essere definito mediante opportuni postulati.*
- *Indicheremo tale spazio con $\mathbb{E}_n$. Segue dai postulati che su $\mathbb{E}_n$ é possibile fissare una unitá di misura e un riferimento cartesiano.*
- *Esso definisce una corrispondenza biunivoca*

$$\mathbb{E}_n \longleftrightarrow \mathbb{R}^n,$$

dove $\mathbb{R}^n$ é l' insieme delle n-uple di numeri reali. A ogni punto $X \in \mathbb{E}_n$ il riferimento associa le sue coordinate $(x_1, \dots, x_n)$.

21 Ipersfere e aperti euclidei su $\mathbb{E}_n$

- *La distanza tra i punti P e Q, rispettivamente di coordinate $(p_1, \dots, p_n)$ e $(q_1, \dots, q_n)$, é espressa dalla formula*

$$\overline{PQ} = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2}.$$

- *La circonferenza e la sfera si generalizzano in $\mathbb{E}_n$ all'* **ipersfera** $\mathbb{S}_{P,r}$ *di centro P e raggio r. Indicheremo il suo* **interno** $U_{P,r}$*:*

$$\mathbb{S}_{P,r} := \{Q \in \mathbb{E}_n \ / \ \overline{PQ} = r\}.$$

$$U_{P,r} := \{Q \in \mathbb{E}_n \ / \ \overline{PQ} < r\}.$$

- Definizione *Gli* **aperti euclidei di** $\mathbb{E}_n$ *sono le unioni di interni di ipersfere e $\emptyset$. La famiglia $\mathcal{E}_n$ di tali sottoinsiemi si dice* **topologia euclidea di** $\mathbb{E}_n$.

22 Sottospazi di $\mathbb{E}_n$ e omeomorfismi

Ultime, necessarie, anche se noiose e ripetitive, generalizzazioni:

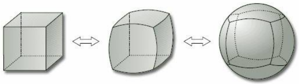
- **Sottospazi di $\mathbb{E}_n$**
  Sia $X \subset \mathbb{E}_n$: la famiglia degli aperti di X é la collezione $\mathcal{E}_X$ di tutti i sottoinsiemi $A \cap X$, al variare di A tra gli aperti euclidei di $\mathbb{E}_n$.
- *Una volta definiti come sopra i sottoinsiemi aperti di X, diremo che X é un* **sottospazio di $\mathbb{E}_n$**.
- **Omeomorfismi tra sottospazi**
  Sia $f : X \to Y$ una corrispondenza biunivoca tra sottospazi. f é un omeomorfismo se f e la sua inversa $h : Y \to X$ sono aperte.
- *Una funzione $f : X \to Y$ tra sottospazi é* **aperta** se, per ogni aperto U di X, $f(U)$ é aperto.
- **Sottospazi omeomorfi**
  Due sottospazi X e Y si dicono omeomorfi ,o topologicamente equivalenti, se esiste un omemorfismo $f : X \to Y$.

23 Omeomorfismi intuitivi

Per una idea intuitiva di omeomorfismo si pensi a due figure X *e* Y *in* $\mathbb{E}_3$ *e a una corrispondenza biunivoca* $f : X \to Y$ *realizzabile deformando* X *fino a sovrapporla a* Y *punto a punto, come indicato da* f, **senza strappi o lacerazioni** *di* X. *E viceversa per la mappa inversa da* Y *a* X.

24 Omeomorfismi e classificazioni

- *La Topologia si occupa di classificare i sottospazi degli spazi euclidei a meno di omeomorfismi.*[14]
- *Una* **classe di omeomorfismo di** $\mathbb{E}_n$ *é la collezione di tutti i sottospazi omeomorfi a un dato sottospazio* $T \subset \mathbb{E}_n$.
- *La classificazione topologica in* $\mathbb{E}_n$ *é la descrizione di tutte le classi di omeomorfismo in cui si distribuiscono i sottospazi.*



- *La congettura di Poincaré riguarda le classi di omeomorfismo delle ipersfere di* $\mathbb{E}_n$. *Il caso rimasto irrisolto fino al 1996 era quello delle ipersfere sfere tridimensionali o 3-sfere di* $\mathbb{E}_4$.

[14] Il principio di classificare le figure dello spazio a seconda della possibilitá o meno di trasformare una in un' altra con trasformazioni di un dato tipo é fondamentale in Geometria.

25 Uniformitá di $\mathbb{E}_n$

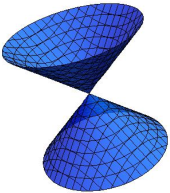
- *Concludiamo la discussione su $\mathbb{E}_n$ tornando al passaggio dal locale al globale: in un certo senso locale e globale non differiscono su $\mathbb{E}_n$:*
- Teorema $\mathbb{E}_n$ *e l' interno di ogni $(n-1)$-sfera sono omeomorfi.* [15]
- *Quindi la struttura topologica 'globale' di $\mathbb{E}_n$ si riproduce in porzioni di spazio piccole a piacere intorno a ogni suo punto.*
- *Sembra ripetitivo, ma invece apre la strada per vedere altri spazi:*
- *spazi $X \subset \mathbb{E}_n$ che, senza essere omeomorfi a uno spazio euclideo, riproducano localmente la sua stessa struttura: ogni punto appartiene ad un aperto omeomorfo a un $\mathbb{E}_d$.*
- *Come vedremo si tratta proprio della* **varietá topologiche**. [16].

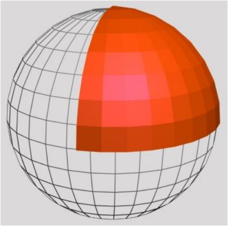
[15] La proiezione stereografia di una circonferenza renderá ben visibile questa proprietá per $n = 1$.

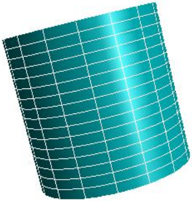
[16] di dimensione d

26 Non tutto é euclideo

- *Molti oggetti geometrici elementari hanno aspetti non euclidei:*
- *Sfera: La somma degli angoli interni di un triangolo é* $\pi + A >$.[17]
- *Cono: tolto un solo punto, il vertice, si divide in due parti sconnesse.*
- *Cilindro: contiene circonferenze che non si possono contrarre a un punto con una deformazione senza strappi o lacerazioni.*



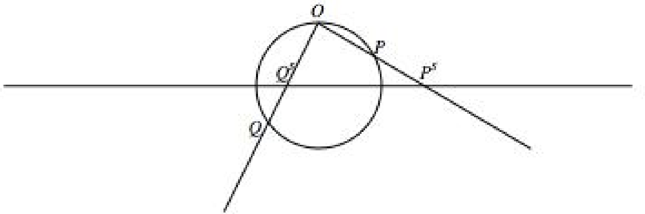




[17] A indica l' area del triangolo sferico

27 Proiezioni stereografiche 1

- La circonferenza $\mathbb{S}_{O,1} \subset \mathbb{E}_2$ ha equazione $x^2 + y^2 = 1$. Siano $O_1 = (0,1)$ e $O_2 = (1,0)$. Per $i = 1,2$ sia poi $U_i = \mathbb{S}_1 - \{O_i\}$.
- U_i é un aperto di $\mathbb{S}_1$ e inoltre $U_1 \cup U_2 = \mathbb{S}_1$. $\mathbb{E}_1$ indicherá l' asse x. Proviamo che U_i é omeomorfo a $\mathbb{E}_1$:
- La **proiezione stereografica** $\phi_i : U_i \to \mathbb{E}_1$ *di centro* O_i[18] *é la funzione cosí definita: sia* $P \in U_i$, *allora* $\phi_i(P) = \overline{O_i P} \cap \mathbb{E}_1$*:*



- *La figura mostra chiaramente che* $\phi_i : U_i \to \mathbb{E}_1$ *é biunivoca. Essa deforma senza strappi o lacerazioni* U_i *'distendendolo' su* $\mathbb{E}_1$*.*

---

[18] **N.B. nella figura il punto O_1 é indicato con O**

28 Proiezioni stereografiche 1

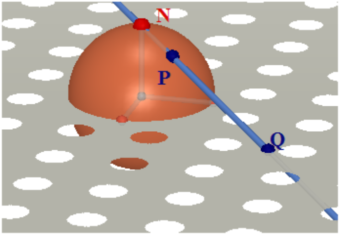
Osserviamo sin da ora che:

- $\mathbb{E}_1 - \{O\} = A_{12} = A_{21}$ *dove* $A_{ij} = \phi_i(U_i \cap U_j)$.
- *Sia* $P = (cos\ t, sin\ t)$ *un punto di* U_i, *si calcola facilmente che*

$$\phi_1(P) = (\frac{cos\ t}{1 + sin\ t}, 0)\ ,\ \phi_2(P) = (\frac{cos\ t}{1 - sin\ t}, 0).$$

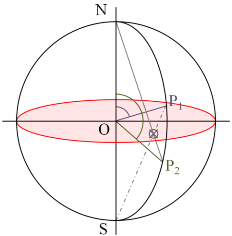
- *da cui segue* $\phi_1(P)\phi_2(P) = \frac{cos\ t}{1+sin\ t}\frac{cos\ t}{1-sin\ t} = \frac{cos^2 t}{1-sin^2 t} = 1.$
- $\phi_2 \cdot \phi_1 : A_{12} \to A_{21}$ *associa a x l' inverso* $\frac{1}{x}$.

Passiamo, per ora, in dimensione due:



29 Proiezioni stereografiche 2

- **Proiezione stereografica della 2-sfera $S_{O,1}$.** *In coordinate:* $N = O_1 = (0,0,1)$, $S = O_2 = (0,0,-1)$ *e* $U_i = \mathbb{S}_2 - \{O_i\}, i = 1,2$. *Le due funzioni* $\phi_i : U_i \to \mathbb{E}_2$ *descritte dalla figura* [19]



sono omeomorfismi con il piano (x,y).

- La funzione composta $\phi_1 \cdot \phi_2 : \mathbb{E}_2 - \{O\} \to \mathbb{E}_2 - \{O\}$ é nota come **inversione circolare** *:*

$$\phi_1 \cdot \phi_2(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

[19] **N.B. nella figura $N = O_1$, $S = O_2$**

30 La ipersfera tridimensionale $\mathbb{S}_3$ e Dante

- *Ma si puó fare di piú: questa volta non si tratta di andare verso le rivoluzioni scientifiche del XX secolo ma di tornare a Dante.* [20]
- *Nello spazio euclideo 4-dimensionale* $\mathbb{E}_4$ *si trovano infinite 3-sfere. Si tratta, in un senso da precisare, di* **oggetti di dimensione tre.**
- *Fissando coordinate cartesiane* (x_1, x_2, x_3, x_4), *la ipersfera* $\mathbb{S}_3$ *di raggio* $r = 1$ *e centro l' origine* $O = (0, 0, 0, 0)$ *ha equazione*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^4 = 1.$$

- *La* **proiezione stereografica** *funziona esattamente come prima. Se* N *é un punto di* $\mathbb{S}_3$, *essa determina un omemomorfismo*

$$f : \mathbb{S}_3 - \{N\} \to \mathbb{E}_3.$$

- *Lo spazio della geometria euclidea é dunque omeomorfo a una sfera 3-dimensionale meno un punto.*

[20] E forse a quanto aveva saputo apprendere dalla matematica araba.

31 Dante e Einstein nella 3-sfera

E cosa c' entra Dante? Sentiamo Carlo Rovelli,[21]

- *Salito fino alla sfera piú esterna dell' universo aristotelico, Dante, invitato da Beatrice, guarda verso il basso. Vede tutti i cieli, e, giú in fondo, la , piccola Terra, che gli sembra girare lentamente sotto i suoi piedi. Poi Beatrice lo invita a guardare verso l' alto, fuori dall' Universo aristotelico, lá dove secondo Aristotele non ci sarebbe piú nulla di nulla, perché per Aristotele l' Universo ha un bordo dove tutto finisce.*
- *Dante guarda e ha la straordinaria visione di un punto di luce circondato da nove immense sfere di angeli. Dove stanno questo punto di luce e le sfere angeliche, che sono fuori dall' Universo aristotelico? Dante lo dice in maniera incantevole:* **questa altra parte dell'Universo d' un cerchio lui comprende, sí come questo li altri.** *E nel canto successivo:* **parendo inchiuso da quel ch' elli 'nchiude.**
- *Il punto di luce e le sfere di angeli circondano l' Universo e insieme sono circondati dall' Universo. Che significa? Per la maggior parte dei lettori, l'immagine di due insiemi di sfere concentriche ciascuno dei quali inchiude l' altro é solo un' oscura immagine poetica. I libri di testo dei licei disegnano il punto di luce e le sfere di angeli semplicemente fuori dall'universo aristotelico.*
- *Ma per un matematico o un cosmologo di oggi, la descrizione della forma dell' Universo data da Dante é perfettamente trasparente, e l'oggetto descritto da Dante é inconfondibile. Si tratta di una tre-sfera, la forma che nel 1917 Albert Einstein ha ipotizzato essere la forma del nostro universo, e che oggi resta compatibile con le piú recenti misure cosmologiche.*

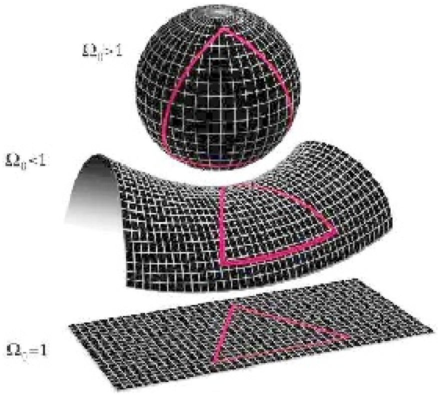
'E una nota intepretazione delle idee di Dante sulla' Universo. Non ne affronteremo qui un' analisi critica. Per il nostro tempo le 3-sfere ben rappresentano la congettura di Poincaré. [22]

---

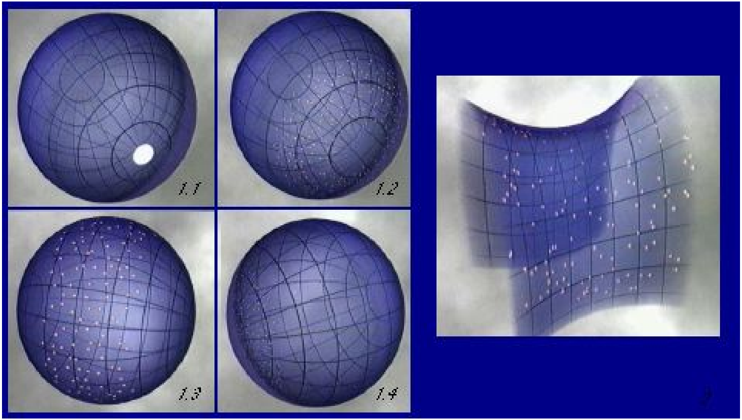
[21] fisico e filosofo della scienza, ex docente di ASTRE: Il Sole 24 Ore, 20/10/ 2010

[22] **Su come vedere lo spazio di una 3-sfera** *si veda F. Ghione 'Due esempi di spazi triestesi, illimitati e compatti' in Matematica e cultura in Europa, Springer (2005) 101-122*

32 Cosmologie e varietá di spazi



33 Cosmologie e varietá di spazi

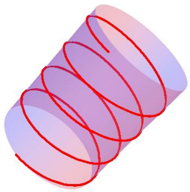


34 Varietá topologiche

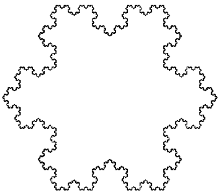
- <u>Definizione</u> *Un sottospazio X di $\mathbb{E}_n$ é una* **varietá topologica** *di dimensione d se é ricoperto da aperti omeomorfi a $\mathbb{E}_d$.* [23]
- *Equivalentemente: ogni aperto U di X é unione di aperti omeomorfi all' interno di una ipersfera $\mathbb{S}_{d-1}$.*
- *Equivalentemente: ogni $P \in X$ appartiene a un aperto di X omeomorfo a a un aperto di $\mathbb{E}_d$.*
- *Diremo* **curva topologica** *una varietá topologica di dimensione 1,* **superficie topologica** *una varietá topologica di dimensione due.*

[23] La nozione di varietá topologica qui introdotta presuppone che sia $X \subset \mathbb{E}_N$. Una definizione piú generale é possibile: qui non é necessaria.

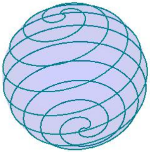
35 Immagini di curve topologiche



(a) Elica su un cilindro

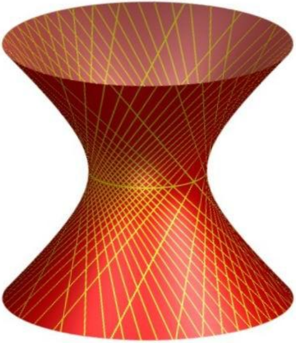


(b) Fiocco di neve

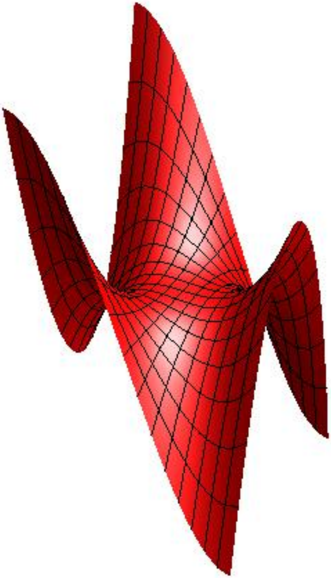


(c) Spirale doppia su sfera

36 Immagini di superfici topologiche

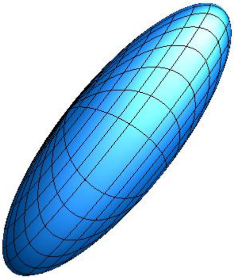


(d) Iperboloide

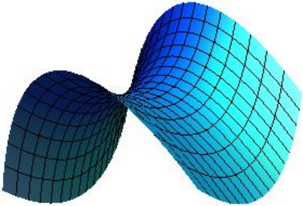


(e) Sella di scimmia

37 Immagini di superfici topologiche



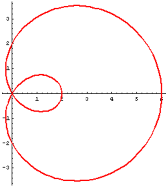
(f) Ellissoide



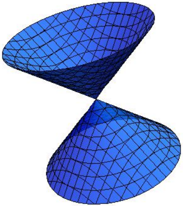
(g) Paraboloide iperbolico

38 Immagini di non varietá

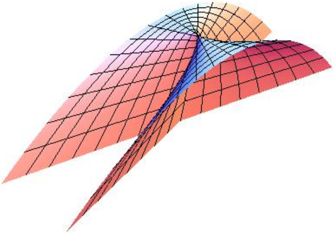
Molti sottospazi X di $\mathbb{E}_N$ non sono varietá topologiche: basta che la proprietá locale richiesta non valga in un punto. Esempi tipici:



(h) Lumaca di Pascal: $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$



(i) Cono $x^2 + y^2 = z^2$



(j) Ombrello di Whitney $x^2 = y^2 z$

39 Compattezza

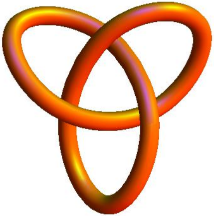
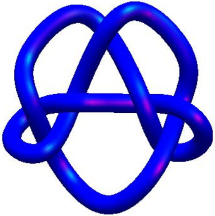
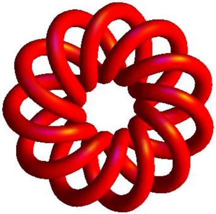
- *Come capire se una varietá topologica* **é o non** é omeomorfa a $\mathbb{E}_n$? Ecco un buon motivo per circonferenze, sfere e ipersfere:
- Un sottospazio $X \subset \mathbb{E}_n$ si dice **chiuso** *se* $\mathbb{E}_n - X$ *é aperto.*
- X *si dice* **limitato** *se é contenuto in una ipersfera.*
- X *si dice* **compatto** *se é chiuso e limitato.*
- Teorema *La proprietá di essere compatto é invariate per omeomorfismi.*
- $\mathbb{E}_n$ *non é compatto perché non é limitato. Quindi non é omeomorfo a nessuna ipersfera.*

40 Connessione

- *Come capire se un sottospazio X* **é o non é** *una varietá topologica? Ecco un criterio legato alla nozione di connessione:*
- *X é* **connesso** *se non é unione di due aperti disgiunti e non vuoti.*
- *La connessione di X é invariate per omeomorfismi.*
- *E_n meno un suo punto é connesso se $n \geq 2$.*
- *Sia X un cono come sopra e O il suo vertice. Sia U un suo aperto qualsiasi contenente O.*
- *Si dimostra che $U - \{O\}$ non é connesso: ció implica che X non é una varietá topologica.*

41 Topologia globale delle varietá: curve

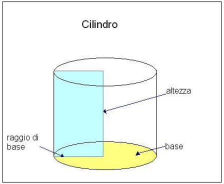
- *Un problema di classificazione del massimo interesse é il seguente:*
- *Descrivere le classi di omeomorfismo di tutte le varietá topologiche compatte e connesse.*
- *Per le curve la situazione é chiara: esiste una sola classe.*
- *Ogni curva topologica compatta e connessa é omeomorfa a $\mathbb{S}_1$.*

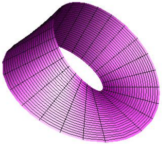
42 Topologia globale delle varietá: superfici

Per le superfici la classificazione é altrettanto conosciuta. Per descriverla consideriamo alcune note superfici in $\mathbb{E}_3$:

- *Cilindro aperto (non compatto):* $(x, y, z) = (\cos\, t(1 + u\cos\, \frac{t}{2}), \sin\, t(1 + u\cos\, \frac{t}{2}), \sin\, t, u)$ *con* $0 \le t \le 2\pi$ *e* $-1 < u < 1$. *Equazione* $x^2 + y^2 = 1$.

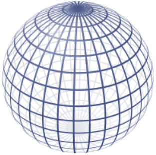


- *Nastro di Moebius aperto (non compatto):* $(x, y, z) = ((1 + u\cos\, t)\cos t, (1 + u\cos\, t)\sin t, u\sin t)$ *con* $0 \le t \le 2\pi$ *e* $0 < u < 1$. *Equazione:* $-y^2 - 2xz + x^2y - 2x^2z - 2y^2z + yz^2 = 0$.

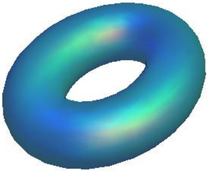


43 Topologia globale delle varietá: superfici

- **Sfera**: $(x, y, z) = (cos\ tcos\ u, cos\ tsin\ u, sin\ t)$. **Equazione** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

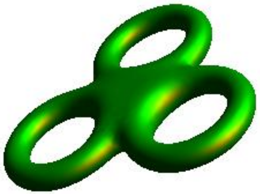


- **Toro o ciambella**: $(x, y, z) = (1 + cos\ t)sin\ u, (1 + cos\ t)sin\ u, sin\ t)$. **Equazione**: $(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = 1$.



44 Topologia globale delle varietá: superfici

- Ciambella con $g = 3$ buchi.



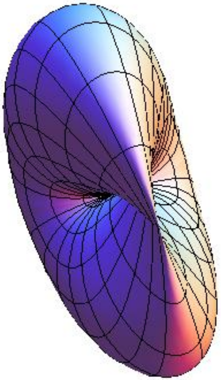
- <u>*Teorema*</u> Ogni superficie di $\mathbb{E}_3$ compatta e connessa é omeomorfa a una sfera, a un toro o a una ciambella a g buchi.

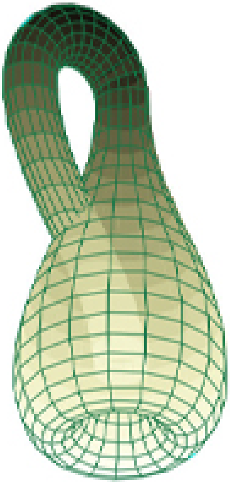
45 What else? Non orientabilitá

- *Sia X una superficie topologica compatta e connessa:*
- *Esistono X non visibili in $\mathbb{E}_3$?*
- *In altre parole: esistono X in $\mathbb{E}_N$, con $N \geq 4$, non omeomorfe a superficiedi $\mathbb{E}_3$?*
- Definizione *Una X si dice non orientabile se contiene un nastro di Moebius.*
- Teorema (Hilbert) *Tutte le X orientabili sono omeomorfe a una sfera, un toro o una ciambella a g buchi.*
- *What else?*

46 Piano proiettivo reale e bottiglia di Klein

- *Piano proiettivo reale: Come insieme é una stella di rette. 'E in corrispondenza biunivoca con una semisfera il cui equatore sia stato 'incollato' su se stesso secondo la mappa antipodale. Ció fa nascere i nastri di Moebius.*
- *Bottiglia di Klein: Si ruota in $\mathbb{E}_4$ una circonferenza in modo opportuno. Proiettando in $\mathbb{E}_3$ si ottiene la famosa figura del cilindro con le sue due estremitá incollate dall' interno*





47 Atlanti e carte

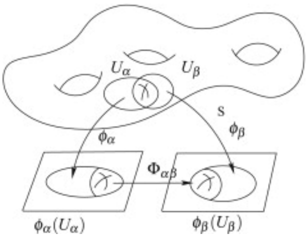
- *Sulla nozione di varietá topologica, e a maggior ragione su quelle di varietá* **differenziabile** *e di varietá* **Riemanniana** *, si fonda la visione moderna di spazio in Geometria a partire da Riemann.*
- *Tale nozione rappresenta il passaggio dal locale al globale: le varietá sono creature a piú falde,* **Manifolds** [24]*, ognuna omeomorfa a* $\mathbb{E}_n$.
- *La conoscenza di un tale spazio avviene allora come la conoscenza geografica di un pianeta: grazie ad un* **atlante** *di* **carte.**
- *Sia V una varietá topologica di dimensione n.*
  - *una* **carta** *di V é una coppia (U, ϕ) dove U é un aperto di V e $\phi : U \to \mathbb{E}_n$ é un omeomorfismo.*
  - *Un* **atlante** *di V é una collezione di carte che ricopre V.* [25]

[24] o Mannigfaltigkeiten come scrive Riemann

[25] Piú precisamente si tratta di una collezione di carte $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ tale che $\cup U_{i;i \in I} = V$

48 Funzioni di transizione

- *Dato un atlante $\mathcal{U} = (U_\alpha, \phi_\alpha)$, questa é la raffigurazione intuitiva tipica dell' idea di spazio rappresentata da una varietá:*



- *La figura mette in evidenza le* **funzioni di transizione***: assegnate le carte $\phi_\alpha : U_\alpha \to A_\alpha$ e $\phi_\beta : U_\beta \to A_\beta$ si consideri $U_\alpha \cap U_\beta$. Posto*

$$A_{\alpha\beta} = \phi_i(U_\alpha \cap U_\beta) \ , \ A_{\beta\alpha} = \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

la costruzione determina un omeomorfismo $\theta_{\alpha\beta} : A_{\alpha\beta} \to A_{\beta\alpha}$.

- Definizione *Le $\theta_{\alpha\beta}$ sono dette* **funzioni di transizione** *di $\mathcal{U}$.*

49 Varieta' differenziabili

- *Finalmente le funzioni di transizione θ_{ij} si possono scrivere nelle coordinate di $\mathbb{E}_n$! Infatti A_{ij} e A_{ji} sono sottospazi di $\mathbb{E}_n$.*
- *Le θ_{ij} sono quindi definite da n funzioni di n variabili reali, che possono essere derivabili insieme a tutte le loro derivate.*
- *In tal caso le $\theta_{ij} : A_{ij} \to A_{ji}$ sono dette $\mathcal{C}^\infty$ o* **derivabili all' infinito**.
- *Sia $V \subset \mathbb{E}_N$ una varietá topologica. V si dice varietá differenziabile se le funzioni di transizione di un suo atlante sono $\mathcal{C}^\infty$.*

50 $\mathbb{S}_1$ é una varietá differenziabile

Siano $O_1 = (0,1)$ *e* $O_2 = (0,-1)$ *i poli Nord e Sud della circonferenza* $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{E}_2$. *Sappiamo che:*

- *Un atlante di* $\mathbb{S}_1$ *é costituito dalle carte* (U_1, ϕ_1) *e* (U_2, ϕ_2)*, dove* $U_i = \mathbb{S}_i - \{O_i\}$*,* $i = 1, 2$*, e* $\phi_i : U_i \to \mathbb{E}_1$ *é la proiezione stereografica di centro* O_i *sull' asse delle* x.
- *Posto* $A_i = \phi_i(U_i)$ *si ha che* $A_1 \cap A_2 = \mathbb{E}_1 - \{O\}$.
- $\theta_{12} : A_1 \cap A_2 \to A_1 \cap A_2$ *non é altro che la funzione cosí definita*

$$\theta(x) = \frac{1}{x}.$$

- θ_{12} *é differenziabile infinite volte per* $x \neq 0$ *e inoltre* $\theta_{12} = \theta_{21}$.
- *Quindi* $\mathbb{S}_1$ *é una varietá differenziabile.*

51 Varietá Riemanniane

Rinunceremo a definire la nozione di metrica Riemanniana se non in termini intuitivi o con esempi.

- *Sia* $V \subset \mathbb{E}_3$ *una sfera o una superficie differenziabile: per ogni* $P \in V$ *sia* T_P *l'insieme dei vettori paralleli a tale piano.*
- *Sia* $h_P : T_P \times T_P \to \mathbb{R}$ *il prodotto scalare su* T_P. *La collezione* $h = \{h_P, P \in V\}$ *é un esempio di metrica Riemanniana su* V.
- *La costruzione si estende ad ogni varietá differenziabile* $V \subset \mathbb{E}_N$ *ed esistono infinite altre collezioni* $g = \{g_P : T_P \times T_P \to \mathbb{R},\ P \in V\}$ *che variano in modo* $\mathcal{C}^\infty$. [26]
- *Ogni* g *é una* **metrica Riemanniana** su V. Una coppia (V, g) é una **varietá Riemanniana** .
- g permette, intuitivamente, di definire la nozione di distanza tra due punti P e Q di V e di calcolarla con un integrale curvilineo.

[26] Ció vuol dire, molto approssimativamente, che la formula del prodotto scalare di vettori é data da funzioni $\mathcal{C}^\infty$ nelle coordinate di ogni carta di un atlante di V

52 Vedere lo Spazio e la Natura

Le nuove idee di spazio si affermano prepotentemente con Riemann nella sua tesi di abilitazione, anche se affioravano nella pratica quotidiana delle scienze geometriche dell' epoca: leggiamo cosa scrive Marcel Berger (Geometry in XX century, UNESCO 2010). **'E il 1854***:*

- *Escludendo gli elementi di Euclide, tra l' altro difficilmente databili con precisione, l' anno 1854 fu certamente uno dei piú importanti in tutta la storia della Geometria.*
- *A quel' epoca essa era concentrata sulle ricerche relative al quinto postulato di Euclide sulle parallele e sulla costruzione di assiomi sui quali fondare lo spazio della geometria.*
- *Si discuteva inoltre sulla struttura dello spazio in cui viviamo. Ma poche persone avevano cominciato a pensare che altre strutture possono esistere, per cosí dire 'la Geometria non Euclidea'.*
- *C' erano diversi tentativi di costruire questa o molte altre geometrie. Ma queste non erano definite in modo esplicito e per di piú solo localmente [...]*

53 Vedere lo Spazio e la Natura

- *Nella sua tesi di abilitazione*

  Sulle ipotesi che sono poste a fondamento della Geometria

  Riemann forní tutti gli elementi per costruire una famiglia incredibilmente vasta di spazi sui quali fondare solidamente la geometria.
- *La sua visione descrisse due nozioni completamente nuove di spazio: in primo luogo la nozione di varietá differenziabile e inoltre la nozione di varietá riemanniana.*
- *Ma la sua visione fu cosí profetica e cosí profondamente nuova che si dovette attendere fino al 1936 per avere una nozione consolidata di tale nozione, ma molte persone usarono liberamente tale nozione [...]*

54 Vedere lo Spazio e la Natura

- *Quali fenomeni hanno portato i grandi matematici ,dell' Ottocento prima e del Novecento poi, a vedere in modo nuovo lo spazio e a scoprire nuovi spazi? E che cosa vuol dire piú precisamente scoprire uno spazio? Questa prima parte ha cercato di organizzare alcune risposte e una descrizione.*
- *L' idea di scoperta presuppone un mondo da conoscere. Numeri e forme geometriche sono in questo senso parte della Natura e i loro segreti vanno svelati. E in questo senso le visioni che la Geometria offre dello Spazio non si limitano ad essere parte del gioco delle forme e delle costruzioni logico-deduttive.*
- *Esse piuttosto accompagnano il cammino della Fisica e delle altre scienze della Natura. In questo senso lo sviluppo della Matematica mette a fuoco altre e riposte armonie della Natura:*

55 Vedere lo Spazio e la Natura

- *David Mumford in* Curves and Their Jacobians , *1974:*
  I hope these lectures have convinced the patient reader that **nature's secrets in this corner of existence** *are fascinating and subtle and worthing of his time!*
- *Federigo Enriques, nel libro postumo* Le superficie algebriche , *1949:*
  ...allora, scherzando sulle difficoltá e le eccezioni che si incontravano da ogni parte, si soleva dire che, mentre le curve algebriche (giá composte in una teoria armonica) sono create da Dio, le superficie invece sono opera del Demonio. Ora si palesa invece che **piacque a Dio di creare per le superficie un ordine di armonie piú riposto** *ove rifulge una meravigliosa bellezza.*

56 Vedere lo Spazio e la Natura

- *In questo senso la scoperta di nuovi spazi non rappresenta la crisi o la negazione delle conoscenze precedenti. Essa amplia le conoscenze sulla Natura ed include quelle precedenti a determinate condizioni.*
- *La cosmologia di Newton e quella di Einstein tendono a coincidere nell' ordine di grandezze degli esseri umani. ' L' equazione di Dio' é un libro divulgativo di Amir Aczel che descrive questo fenomeno nel caso storico della teoria della Relativitá Generale.*
- *Qui lo spazio della Natura si rivela infine come lo Spazio-Tempo quadridimensionale. Ma non si tratta, probabilmente, di uno spazio euclideo a quattro dimensione.*
- *Si tratta di qualcosa che la Geometria sa, e giá sapeva all' epoca, descrivere: si tratta di una varietá Riemanniana dotata di una leggera curvatura.*

57 Vedere lo Spazio e la Natura

- *La curvatura dello spazio fu oggetto di verifiche sperimentali. Un esperimento effettuato nell' isola di Principe durante un eclisse, per verificare l' eventuale incurvarsi dei raggi luminosi vicino a un punto dell' universo in cui ci sia una massa, ad esempio di raggi luminosi in viaggio vicino al Sole, appare come una conferma delle previsioni di Eistein.*
- *'E utile concludere questa parte con le parole di Arthur Eddington, della Royal Astronomic Society, uno dei responsabili di questo esperimento nel 1919:*
- *'Abbiamo qualche difficoltá a conciliare questi risultati con la geometria euclidea, ma* **questo significa solo che dobbiamo scegliere una geometria che funzioni.'**
- *E ancora in un' altra occasione:*
  Un matematico come Riemann avrebbe potuto quasi prevedere le caratteristiche del mondo reale.

58 E oggi? Appendice

Questa prima parte non é sepolta nel passato del XX secolo. Ecco un piccolo e insensato elenco di nomi e parole, di oggi o di ieri ma tuttora 'calde', sulle infinite, dirette o indirette, relazioni tra Geometria e Fisica. Si tratta di termini senza significato per coloro che non sono coinvolti direttamente in questi campi di ricerca, ma comunque significativi o, almeno, suggestivi.

- Teoria di Yang-Mills.
  Teorie di Donaldson e di Gromov-Witten.
  Edward Witten
  Mirror Symmetry.
  Curve razionali su varietá di Calabi-Yau.
  La Fisica dell' olandese Erik Verlinde (1962-).
  La Fisica teorica e la Teoria delle stringhe.
  E. Verlinde 'On the origin of Gravity and the Laws of Newton'.
  Formula di Verlinde e conformal blocks.
  I fibrati vettoriali in geometria algebrica.
  Gli spazi dei moduli delle superfici di Riemann.
  La coomologia quantica.
  ... ...

Seconda parte

60 Il Secolo delle Strutture

- *Il secondo aspetto che queste lezioni intendono sottolineare é piú figlio del Novecento. La sua fisionomia é definita da alcuni caratteri culturali che sono preminenti nel Novecento e ben visibili.*
- *Anche se poi le radici di questo tema affondano nell' Ottocento e, come per tutti i grandi temi della Matematica, si ritrovano anche nelle epoche precedenti.*
- *Su questa linea la Matematica e le sue idee di spazio si inseriscono nel pieno di quello che é anche il secolo delle strutture e delle costruzioni formali.*
- *La Matematica, anche nella veste di* **Matematica Moderna**, *ha un grande rilievo per tutti quei fenomeni culturali e di pensiero che, in diverse discipline, si richiamano allo* **strutturalismo.**

61 Il Secolo delle Incertezze

- *Un altro tratto molto caratteristico del primo Novecento, e non solo, é vicino al tema generale di queste lezioni ASTRE 2013.*
- *Si tratta del tema dell' incertezza e della crisi: i diversi aspetti di questo fenomeno storico del primo Novecento sono ben conosciuti, anche nel caso delle scienze.*
- *In Matematica la crisi riguarderá i programmi di costruzione logico-formale delle teorie matematiche scoprendone tutte le impossibilitá.*
- *Tuttavia ció non rallenterá la velocitá di marcia delle teorie astratte e della elaborazione di strutture generali.*
- *Della crisi interna alla Matematica tracceremo soltanto lo schema, per poi passare in rassegna gli spazi astratti della matematica bourbakista e strutturalista.*

62 David Hilbert nell' anno 1900

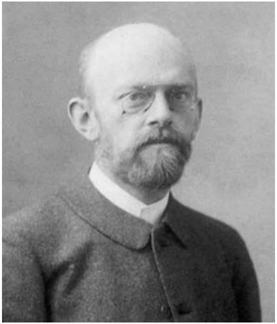


Figura: David Hilbert

- *L' anno 1900 appartiene all' epoca in cui le idee della Scienza e del Progresso sono considerate trionfanti, come nel ballo Excelsior che in quegli anni veniva rappresentato in tutte le platee.*
- *Nell' agosto dell' anno 1900 si svolge a Parigi il secondo Congresso internazionale dei matematici, un Congresso quadriennale che tuttora si svolge e nel corso del quale vengono assegnate le medaglie Fields, i Nobel della Matematica.*
- *Questo Congresso é legato al nome di David Hilbert. Hilbert presentó in questo Congresso un programma per il XX secolo, articolato in diverse questioni matematiche da affrontare e risolvere, da lui ritenute cruciali per lo sviluppo delle scienze matematiche.*

63 Il programma di Hilbert

Il programma presentato da Hilbert contiene un elenco di 23 problemi: dieci furono presentati direttamente nel corso della sua conferenza al Congresso. [27] *Vediamoli per curiositá:*

- *Teoria degli insiemi: ipotesi del continuo e principio di buon ordinamento.*
- *Consistenza degli assiomi dell' Aritmetica.*
- *Elaborazione matematica degli assiomi della Fisica.*
- *Problemi del numero primo: ipotesi di Riemann e distribuzione dei numeri primi.*
- *Generalizzazione della teoria delle estensioni di campo ad arbitrari domini razionali.*
- *Impossibilitá di risolvere l' equazione quintica generale.*
- *Topologia di curve: massimo numero di cicli limite.*
- *Soluzione analitica di problemi nel calcolo delle variazioni.*
- *Gruppi di monodromia su equazioni differenziali.*
- *Relazioni tra funzioni automorfe.*

---

[27] D. Hilbert 'Mathematische Probleme' in Goettinger Nachrichten, 1900 e in Archiv der Mathematik und Physik, 1901. 'Sur les problémes futurs des mathématiques' Compte Rendu du Deuxiéme Congrés International des Mathématiciens, Gauthier-Villars, Paris, 1902.

64 Ignoramus sed non ignorabimus

Hilbert é uno dei massimi matematici moderni e nell' anno 1900 era ai vertici della ricerca matematica. Il suo intervento é programmatico:

- *David Hilbert (1900):*
  '...To establish the systems of axioms of the calculus of probabilities, of rational mechanics and of the different branches of physics, then to found upon these axioms the rigorous study of these sciences...'
- *Cosí ne parla lo storico Ivor Grattan-Guinness (2000)* [28]
  'The few pages of preamble appraised problems in general and the development of mathematical knowledge as Hilbert saw it, near the end he expressed his optimism that he would repeat in later life: ' for in mathematics there is no ignorabimus'.
- *The modernistic flavor of the problems lay not in their unsolved status but also in the high status given to axiomatization in solving or even forming several of them. '*

[28] 'A Sideways Look at Hilbert's Tenty-three Problems of 1900' Notices of the AMS vol. 47 (2000) 752-757

65 Tra ottimismo e crisi

- *Assiomatizzazione e metodo logico-deduttivo sono dunque parole chiave del programma per la Matematica del XX secolo: siamo qui lontani dai temi della prima parte di queste lezioni.*
- *l' ottimismo insito nel programma di Hilbert, l' ignoramus sed non ignorabimus, troverá il suo limite negli anni trenta, a causa delle scoperte del logico austriaco Kurt Goedel (1906-1978).*
- *I suoi teoremi di incompletezza metteranno in scacco , per cosí dire, l' Aritmetica.* [29] *Essi determinano una naturale impasse ad ogni possibile progetto di assiomatizzazione.*
- *Tuttavia tale scacco logico non potrá fermare l' enorme diffusione e influenza culturale che i programmi di assiomatizzazione indicati da Hilbert avranno per tutto il XX secolo.*

[29] Ogni sistema assiomatico consistente e coerente che sia in grado di sviluppare tutta l' Aritmetica dei numeri interi ammette enunciati indecidibili: non dimostrabili né confutabili.

66 I programmi di assiomatizzazione

I programmi di assiomatizzazione confluiscono nell'insieme dei grandi movimenti culturali del '900 che va sotto il nome di Strutturalismo. Alcune possibili parole chiave o slogans:

- *costruzione assiomatica di ogni teoria matematica,*
- *massima generalitá dei suoi concetti fondamentali,*
- *strutture astratte,*
- *elaborazione logico-deduttiva,*
- *formalismo della esposizione,*
- *classificazione delle strutture considerate.*

Tutto questo ci porterá, per il tempo e i luoghi del nostro viaggio, nella Francia del XX secolo. Tutto questo ci riporta anche ai nostri ricordi di scuola: alla Matematica Moderna.

67 Ecole Normale, Parigi. Anni Trenta

- *La classificazione generale delle strutture ci porta in modo naturale all' enciclopedismo francese del Settecento. L' Enciclopedia ritorna in Francia, per quanto riguarda la Matematica: a Parigi nel 1934.*
- *André Weil (1906-1998), fratello di Simone Weil, fonda con un gruppo di amici studenti universitari il* **movimento Bourbaki**. [30] *Di esso faranno parte tutti i piú importanti matematici di Francia.*
- *Il movimento Bourbaki attribuisce al rigore e alle strutture formali ed astratte in matematica il massimo rilievo.* [31] *Le sue idee avranno una enorme influenza sulla cultura matematica di tutto il mondo per un lungo periodo del Novecento.*
- **Nicolas Bourbaki** *Sembra che questo nome faccia riferimento al generale francese Charles Denis Bourbaki (1816-1897).* [32]

---

[30] Sono con lui Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt

[31] Ció puó essere visto, almeno agli inizi, anche come una una reazione alle idee di Poincaré, il quale sosteneva l'importanza del libero fluire dell'intuizione in matematica.

[32] l' epiteto 'armée á la Bourbaki' non era lusinghiero e si collegava alla sfortunata campagna di questo generale nel corso della guerra franco-prussiana del 1870. Esisteva, come scherzo goliardico interno al gruppo, un **Teorema di Bourbaki**.

68 Elements de Mathématiques

Il progetto enciclopedico del Bourbaki si sviluppa dagli anni Trenta fino agli anni Sessanta. Esso si manifesta nei famosi

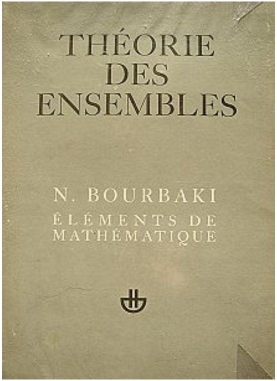


Figura: Eléments de Mathématique

69 Elements de Mathématiques

- *Tutti coloro che sono andati a scuola a partire dalla metá degli anni sessanta del XX secolo hanno avuto a che fare, indirettamente, con la descrizione della matematica offerta da questo libro.*
- *Anche per quanto riguarda simboli e convenzioni: per fare un solo esempio l' uso di indicare con $\emptyset$ l' insieme vuoto é bourbakista.*
- *Non si tratta 'soltanto' di matematica...i bourbakisti sono fortissimamente nel milieu culturale francese, come vedremo.*
- *Torniamo peró alla matematica per vedere un paio di edifici matematici alla Bourbaki, tra i molti che sono ben in vita.*

70 Gli spazi della Topologia generale

- *Gli spazi, della topologia generale hanno ancora oggi una fisionomia bourbakista: si imparano leggendo gli Elements de Mathematiques.*
- *Su qualunque insieme X é ora possibile costruire molte o infinite strutture di spazio: a seconda della collezione di aperti, o topologia, che si vuole scegliere su X.*
- *Si tratta di una nozione estremamente generale ed astratta: su X non ci sono carte che riproducono la struttura dello spazio euclideo.*
- *Rimangono la nozione di famiglia di aperti e l' idea di costruirli come unioni di sottoinsiemi di un opportuna collezione: una* **base** *.*
- *Ora peró gli elementi della famiglia di aperti di X possono essere di qualunque tipo: in comune con la famiglia degli aperti euclidei di $\mathbb{E}_n$ rimane soltanto il sistema di relazioni tra elementi della famiglia.*

71 La definizione di spazio topologico

- Definizione *Sia X un insieme. Una* **topologia su** X *é una collezione* $\mathcal{T}$ *di sottoinsiemi di X tale che:*
- 1. $X \in \mathcal{T}$,
  2. $\emptyset \in \mathcal{T}$,
  3. *ogni unione di elementi di $\mathcal{T}$ é un elemento di $\mathcal{T}$,*
  4. *l' intersezione di due elementi di $\mathcal{T}$ é un elemento di $\mathcal{T}$.*
- *Uno* **spazio topologico** *é una coppia $(X, \mathcal{T})$, dove X é un insieme e $\mathcal{T}$ é una topologia su X*
- *La coppia $(\mathbb{E}_n, \mathcal{E}_n)$, dove $\mathcal{E}_n$ é la famiglia degli aperti euclidei, non é altro che un* **particolarissimo esempio** *di spazio topologico.*

72 Piccolissimi esempi di spazi topologici

Sia $X = \{0, 1\}$. *Da ogni possibile topologia* $\mathcal{T}$ *su* X *nasce uno spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$ *diverso:*

- $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. *Spazio banale: tutti i punti sono non 'separati'*
- $\mathcal{T} = \{X, \{0\}, \emptyset\}$. [33] *Spazio di Sierpinski:* 0 *é 'separato' da* 1 *ma non viceversa.*
- $\mathcal{T} = \{X, \{0\}, \{1\}, \emptyset\}$. *Spazio discreto: tutti punti sono 'il piú possibile separati'.*
- *Lo spazio di Sierpinski é un esempio 'giocattolo' di spazio semantico. 'E in uso in linguistica, qui per un linguaggio con due sole parole.*

---

[33] *Sostituendo* 0 *con* 1 *il tipo di esempio rimane lo stesso.*

73 Piccolissimi esempi di spazi topologici

In ognuna delle sei figure gli ovali indicano i sottoinsiemi che fanno parte della collezione che si vuole considerare. Le prime quattro collezioni sono topologie sull' insieme $\{1, 2, 3\}$. Le ultime due no.

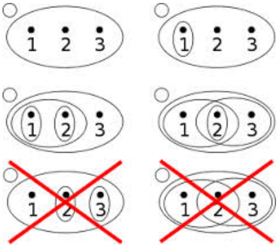


Figura: Topologie e non su $\{1, 2, 3\}$

74 Pittura e topologia

- *David Mumford* [34] *ha messo in relazione lo spirito di un'epoca, il cosiddetto Zeitgeist, e i suoi mutamenti con i mutamenti paralleli nella matematica e nella pittura.*
- *Si tratta di nessi e collegamenti affascinanti che tutti noi possiamo percepire e che anche molti altri hanno sottolineato.*
- *Non é difficile ritrovare qualcuno di questi mutamenti paralleli nelle idee di spazio che abbiamo incontrato.*
- *In alcuni periodi Picasso presenta descrizioni della realtá che sono come atlanti sovrapposti: si sovrappongono diversi punti di vista. Non si é lontani dall' idea, a lui coeva di varietá topologica.*
- *L' evoluzione della pittura verso le forme astratte e l' evoluzione delle idee matematiche di spazio verso la massima astrazione si rincorrono, nello stesso tempo, verso la stessa direzione.*

[34] in una bella conferenza tenutasi al festival della Matematica di Roma del 2009

75 Pittura e topologia

76 Pittura e topologia

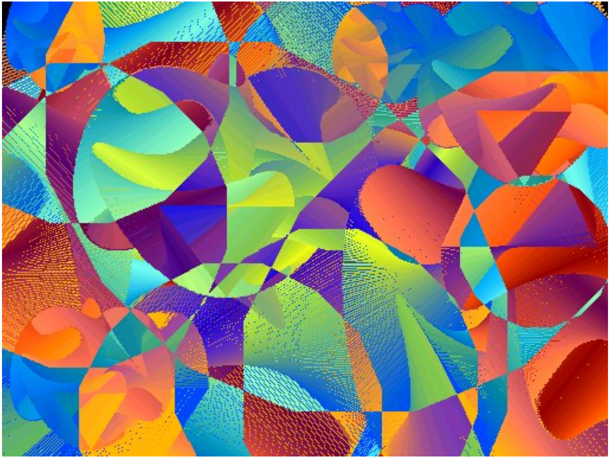


Figura: Paul Klee

77 Oltre la Matematica

Il Bourbaki, pur occupandosi esclusivamente di pura matematica, non fa 'soltanto' matematica... Ecco qualche esempio del clima di **interazioni culturali** *in cui il movimento Bourbaki é immerso:*

- *André Weil, di cui si 'e giá detto, é grande amico di Claude Levi-Strauss, una delle figure piú importanti dello Strutturalismo e dell' Antropologia culturale.*
- *Il libro di Levi-Strauss 'Le strutture delle relazioni di parentela' ha un appendice matematica di André Weil.*
- *Roman Jakobson (1896-1982), teorico delle strutture linguistiche, pone tra le origini dello strutturalismo il programma di Erlangen (1872), proposto per la Geometria da Felix Klein (1849 - 1925).*
- *La Morfogenesi (teoria delle catastrofi) di René Thom (1923-2002), bourbakista non ortodosso, appartiene in pieno a questo stesso mondo.*

78 Cultura e Bourbaki

Ma vediamo, rispetto al Bourbakismo come fenomeno culturale, cosa scrive David Aubin (Paris 6):

- *The group of mathematicians known as Bourbaki persuasively proclaimed the isolation of its field of research, pure mathematics, from society and science.*
- *It may therefore seem paradoxical that links with larger French cultural movements, especially structuralism and potential literature [Oulipo: Ouvroir de Littérature Potentielle], are easy to establish.*
- *...these cultural movements, including the Bourbakist endeavor, emerged together...This codependency is partly responsible for their success and moreover accounts for their simultaneous fall...*
- *...Bourbaki's role can best be captured by using the notion of cultural connector, which I introduce here.*

79 Bourbaki ne peut pas vieillir

Il poeta Raymond Quenau scriveva (1962):

- *Il a nécessairement vieilli, votre fictif*
  mathématicien, il doit avoir pris du retard.
  Eh bien! non, Bourbaki n' a pas vieilli,
  parce qu'il ne peut pas vieillir.
- *Infatti tra le regole del Bourbaki vi era, sin dalla fondazione,* **la decadenza dal gruppo a partire dall' etá di 50 anni.**
- *Bourbaki dunque non puó invecchiare.*
- *Ma tuttavia puó morire: i suoi adepti, con un ormai antico spirito goliardico, lo annunceranno in un manifesto funebre datato 11 novembre 1968:*

80 Fine Secolo

- *Il manifesto é del 1968, tanto per fissare una data simbolo di mutamento.*
- *Esso esprime la sensazione che l' enciclopedismo bourbakista, e piú in generale strutturalista, volga al termine.*
- *Lentamente sono cambiati i tempi e le prospettive rispetto alla costruzione di grandi progetti scientifico-culturali.*
- *L' epoca storica, lo Zeitgeist, agisce anche sulla Matematica e sui matematici: spesso, senza che ce ne accorgiamo.*

81 Fine Secolo

- *Vivo o morto che sia Bourbaki, rimane ben vivo l' impulso dovuto al lavoro matematico dei bourbakisti e rimane ben vivo tuttora il* **Seminaire Bourbaki** , *uno dei piú importanti avvenimenti matematici internazionali che si svolge a Parigi regolarmente.*

  SITO SEMINAIRE BOURBAKI $http://www.bourbaki.ens.fr/$

,

- *E suggestivo che a Parigi si svolga, da meno tempo, anche un* **Seminaire Poincaré** , *o Seminaire Bourbaphy, dedicato ai temi comuni di Fisica e Matematica.*

  SITO SEMINAIRE POINCARE $http://www.bourbaphy.fr/$

Terza parte

83 Algebra versus Geometria

- *Le strutture dell' Algebra astratta sono un altro grande interlocutore della Geometria del XX secolo: Gruppi, Anelli, Corpi, Campi...*
- *Esse sono molto adatte a soddisfare gli standards di rigore formale richiesti dalla Matematica del XX secolo e diventano onnipresenti.*
- *Si scopre che agli spazi della Geometria sono naturalmente associate diverse strutture algebriche che li distinguono.* [35]
- *L' Algebra tende a sovrapporsi alla Geometria, i cui metodi sono considerati oscuri o troppo intuitivi, e a diventarne il linguaggio.* [36]
- *Si rafforza la tendenza all'* **algebrizzazione della geometria.**

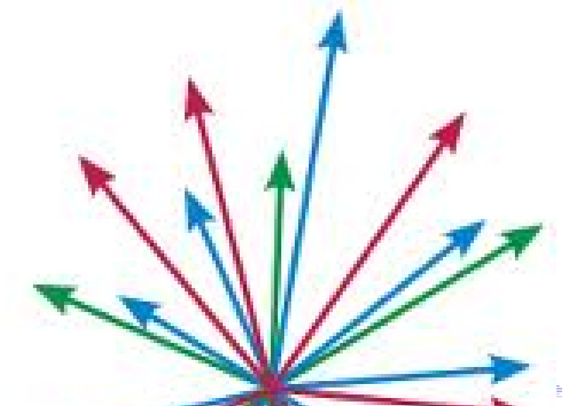
---

[35] ad esempio a ogni varietá topologica é associato il suo gruppo fondamentale che é invariate per omeomorfismi.

[36] Talvolta il contrasto tra vecchi é nuovi metodi é forte. 'E il caso della geometria algebrica classica della scuola italiana. Cfr. Congresso internazionale dei matematici di Amsterdam 1954: discussione tra F. Severi, A. Weil e B.L. van der Waerden sulla relazione di Severi *Problémes résolues et problémes nouveaux dans la théorie des séries e des systhémes d'equivalence.*

84 I vettori dell' Algebra astratta

- *Un esempio elementare di algebrizzazione della matematica é noto a molti studenti: vettori e spazi vettoriali.*
- *La nozione di* **vettore** *proviene dall' Ottocento e, almeno in parte, dalla Fisica. In questo senso essa proviene dallo spazio euclideo:*
- *i vettori sono classi di equipollenza di segmenti orientati. Queste possono essere sommate e moltiplicate per uno scalare.*



85 I vettori dell' Algebra astratta

- *La nozione astratta di* **spazio vettoriale** *generalizza quest' ultima e ancora una volta si afferma nel XX secolo, intorno al 1920.* [37]
- *Molti studenti conoscono questi spazi vettoriali:* $\mathbb{R}^n$*, spazi di matrici, di polinomi, di soluzioni di sistemi di equazioni lineari ... ...*

$$
\begin{gathered}
V_1 := \{\ (a, a, a) \in V \mid a \in \mathbb{R}\ \},\\
V_2 := \{\ (a, b, a) \in V \mid a, b \in \mathbb{R}\ \},\\
V_3 := \{\ (a, 2a, a+b) \in V \mid a, b \in \mathbb{R}\ \},\\
V_4 := \{\ (a, b, c) \in V \mid a, b, c \in \mathbb{N}\ \},\\
V_5 := \{\ (a, b, a+b) \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q}\ \}.
\end{gathered}
$$

Figura: Spazi vettoriali in $\mathbb{R}^3$ o in $\mathbb{Q}^3$. V_4 non é un sottospazio

[37] Tale nozione appare per la prima volta nel 'Calcolo geometrico' (1888) di Giuseppe Peano (1858-1932).

86 Geometrie finite

- *L' interazione tra Algebra e Geometria porta a 'ricostruire' la Geometria in contesti algebrici, i quali sembrano avere poco in comune con le idee di spazio finora incontrate.*
- *La figura mostra un piano proiettivo π, costruito su un campo di numeri diverso da $\mathbb{R}$.[38] π soddisfa i postulati della Geometria proiettiva, come il piano proiettivo reale. Ma π ha solo 7 punti.*

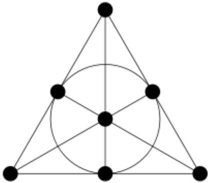


Figura: Piano di Fano: piano proiettivo scoperto da Gino Fano (1871-1954)

[38] Finora abbiamo lavorato con il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Qui il nostro campo di numeri é il campo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resto modulo 2. Esso é formato da due soli elementi: la classe di 0 e la classe di 1.

87 Cosa é un punto? Algebra e Spazio

- *Che cosa é un punto? L' Algebra, diversamente dalla Geometria, é in primo luogo il regno delle equazioni.*
- *Per l' Algebra un punto non é che l'insieme di tutte le sue equazioni. Si tratta allora di dimenticare $\mathbb{E}_n$ e di lavorare diversamente:*
- *l' algebra delle coordinate su $\mathbb{E}_n$ é uno strumento indipendente che da solo puó sviluppare la geometria 'senza spazio'.*
- **'Il n' y a pas des dessins en Géométrie'** [39] *Si tratta di una potente innovazione e, nonostante tutto, di una nuova visione.* [40]
- *Tutto questo ci riporta in Francia e all' ultima grande rivoluzione scientifica avvenuta in Geometria: forse la maggiore rivoluzione di idee in Geometria di tutto il Novecento.*

---

[39] Riflessione, e frase abituale realmente pronunciata, che ben descrive questa visione della Geometria.

[40] Questa visione cambia in modo grandioso le prospettive, con alcuni costi in termini culturali.

- *La rivoluzione a cui si é accennato porta il nome di Alexandre Grothendieck (1928-) e di un libro: gli* **Elements de Geometrie Algebrique** *di A. Grothendieck e J. Dieudonné (1906-1992).*
- *La nozione di spazio diventa quella di schema* [41]*. La nozione di punto é puramente algebrica.* [42]
- *Qui interessa soltanto paragonare le tradizionali idee di spazio che abbiamo incontrato con la forza di questa nuova idea.*
- *Per farlo ricostruiremo* $\mathbb{E}_n$*, per quanto possibile,* [43] *secondo questa visione.*

---

[41] Definition 2.1.2 On appelle schema un space annele $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que tout point admet un voisinage ouvert affine

[42] Un punto é un ideale primo di un anello commutativo unitario

[43] In realtá la nozione di spazio affine

89 Lo spazio cartesiano dopo gli EGA

- *Un punto $P \in \mathbb{E}_1$ ha una sola coordinata (p).*
- *L' **ideale di** P é $\mathfrak{P} := \{F(X) \in \mathbb{R}[X] \, / F(p) = 0\} \subset \mathbb{R}[X]$* [44]
- *Un **ideale primo** di $R[X]$ é un sottoinsieme costituito dai multipli di un polinomio irriducibile.* [45]
- *Lo **Spettro primo** é l' insieme Spec $\mathbb{R}[X]$ degli ideali primi di $\mathbb{R}[X]$.*
- *La funzione $i : \mathbb{E}_1 \to$ Spec $\mathbb{R}[X]$ cosí definita: $i(P) = \mathfrak{P}$ é iniettiva.*
- **Conclusione:** *possiamo 'dimenticare' $\mathbb{E}_1$ e 'trasferirci' nel nuovo spazio Spec $\mathbb{R}[X]$.*
- *I punti P di $\mathbb{E}_1$ diventano gli ideali primi $\mathfrak{P}$.*
- *Su Spec $\mathbb{R}[X]$ si definisce, in modo adeguato, una topologia.* [46]

[44] Per Ruffini $F(X) \in \mathfrak{P}$ se e solo se $(X - p)$ divide $F(X)$. Ad esempio se O é l' origine l' ideale $\mathfrak{O}$ di O é il sottoinsieme dei polinomi senza termine noto.

[45] *Si tratta di una definizione ad hoc: la nozione di ideale primo é piú generale ma non adatta a queste lezioni.*

[46] In questo contesto si tratta della topologia di Zariski

90 Spazi aritmetici

- *Perché Spec $\mathbb{R}[X]$? Si tratta di un esempio, ma questa nuova costruzione permetterá di 'fare geometria' dovunque:*
- *in tutti i domini dell' Algebra e in contesti matematici dove la Geometria sembrerebbe impensabile.*
- $\mathbb{R}[X]$ *é solo un esempio della nozione generale di* **anello commutativo unitario.** *Altri esempi:* $\mathbb{Z}$ *oppure* $\mathbb{Z}_n$ *o* $\mathbb{Z}[X]$.
- *La nozione di* **ideale primo** *si definisce* [47] *su ogni anello* A *commutativo e unitario.*
- *Dato* A *ha senso considerare il suo* **spettro primo** *Spec* A.
- *Nonostante l' apparenza algebrica e la sua difficoltá, si puó dire che si tratta di una nuova e rivoluzionaria idea di spazio in Geometria.*

[47] in modo tecnicamente diverso da quello che abbiamo usato per $\mathbb{R}[X]$

91 Spazi aritmetici

- **Cosa sono i punti di** *Spec* A**? Ad esempio di** *Spec* $\mathbb{R}[X, Y]$**?**
- *Pensiamo a* (X, Y) *come coordinate su* $\mathbb{E}_2$. *Tra i punti di* *Spec* $\mathbb{R}[X, Y]$ *vi é l'ideale* $\mathfrak{P}$ *di tutti i polinomi che si annullano per* $X = p_1$ *e* $Y = p_2$*:* $\mathfrak{P}$ *é l'ideale primo del punto* $P = (p_1, p_2)$.
- *Ma in Spec* $\mathbb{R}[X, Y]$ *abbiamo anche* $\mathfrak{P}_X$, *l' ideale dei multipli del polinomio* X, *e anche* $\mathfrak{P}_Y$, *l'ideale dei multipli del polinomio* Y.
- *Ognuno di essi é un punto che individua una retta: sono infatti, rispettivamente, gli insiemi delle equazioni dell' asse* y *e dell' asse* x.
- **Tra i punti di** *Spec* $\mathbb{R}[X, Y]$ **ci sono dunque i punti di** $\mathbb{E}_2$ **ma anche punti che individuano ogni singola retta o infinite altre curve!**
- *Non é forse del tutto inutile affermare che lo studio di tali spazi, ad esempio Spec* $\mathbb{Z}\ [X, Y]$, *serve ad affrontare questioni lontane:*
- **le equazioni aritmetiche, in particolare le diofantee, che studiava Diofanto in Alessandria, Egitto verso il 250 D.C.**

92 La persistenza dei problemi classici

- *In queste lezioni abbiamo spesso incontrato, in piú epoche e situazioni, temi della Geometria che possiamo definire classici.*
- *Essi persistono, oltre le contingenze o il momento storico da cui sono nati, perché sono veri e propri luoghi del pensiero piú che della storia.*
- *Puó essere allora istruttivo concludere queste lezioni con le seguenti parole di Massimo Cacciari [48]:*
- *'Classico non é qualcosa che rimanda al passato, é qualcosa che resiste al presente: che contrasta con l' ora, con il modus, cioé con il moderno, con la moda. Per questo nessuno puó fare a meno dei classici. '*

Questo vale anche per la Geometria

[48] La Repubblica, 10/10/2002