Uno sguardo alla ipersuperfici cubiche a partire da Corrado Segre

Alessandro Verra

16 maggio 2013

Abstract

Il nome di Corrado Segre é indissolubilmente legato alla Scuola Italiana di Geometria Algebrica di cui egli fu un padre fondatore. La sua vita e le sue opere hanno interagito con la grande Storia della Geometria in tutto il cinquantennio che va dagli anni '70 del XIX secolo fino agli anni '20 del secolo scorso, spesso influenzando fortemente alcuni dei maggiori sviluppi. Questa conferenza si propone di ricordare Corrado Segre, a centocinquant' anni dalla sua nascita, ripercorrendo in breve uno dei temi maggiori con i quali, inevitabilmente e naturalmente, Segre ebbe modo di confrontarsi.

Si tratta del tema delle ipersuperfici cubiche, che Segre seppe trattare da par suo, anche se forse non rappresenta la parte centrale delle sue ricerche. Questo tema percorre tutta la Geometria Algebrica fino ai giorni nostri e mantiene tuttora il suo carattere di argomento centrale e fondamentale negli studi che riguardano le varietá algebriche. Questa conferenza, trattando di questo argomento e di alcune questioni ad esso collegate, si propone di rivisitare in breve le ipersuperfici cubiche e di incontrare in tal modo una storia ricca di episodi salienti e di grande matematica, a partire da Corrado Segre e dalla sua cubica.

Prima parte: dimensione due

4 Ipersuperfici cubiche

- *Sia K un campo e sia $\mathbf{P}^n_K$ lo spazio proiettivo di dimensione n su K con coordinate $(x_0 : \cdots : x_n)$:*
- *una ipersuperficie cubica*
$$V \subset \mathbf{P}^n_K$$
é il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo di grado 3.
- *Prevalentemente avremo V non singolare su K e $K = \mathbf{C}$.*
- *Supporremo sempre $n \geq 3$ ovvero dim $V \geq 2$. $n \geq 3$.* [1]
- *Per convenzione porremo: $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$.*

[1] Il caso $n = 2$ appartiene alla teoria delle curve ellittiche, diverso da quello che intendiamo trattare

5 Le superfici cubiche nel 1863

Corrado Segre nasce a Saluzzo il 20 agosto 1863. Che cosa si conosceva in quegli anni sulle ipersuperfici cubiche?
Negli anni Sessanta del XIX secolo la teoria delle **superfici cubiche** *si assesta nella sua fisionomia classica a vent'anni dalla nascita.* $K = \mathbf{C}$:

- 'La dottrina delle superficie di terz'ordine ebbe due sorgenti indipendenti in Inghilterra ed in Germania.'[2]

---

[2] G. Loria 'Il passato e il presente delle principali teorie geometriche' C. Clausen Ed. Torino (1907)
[3] 'On the triple Tangent Planes of Surfaces of the third order' Cambridge J. 1849
[4] 'Ueber die Flaechen drittes Grades' Comunicazione Acc. Berlino 31/1/1856. Journ f. Math. 1857
[5] 'Memoire de geometrie pure sur les surfaces du troisieme ordre' J. Liouville 68 (1868) 1-133
[6] 'Syntethische Untersuchungen ueber Flaechen Dritter Ordnung' Teubner (1867) Lipsia

5 Le superfici cubiche nel 1863

Corrado Segre nasce a Saluzzo il 20 agosto 1863. Che cosa si conosceva in quegli anni sulle ipersuperfici cubiche?
Negli anni Sessanta del XIX secolo la teoria delle **superfici cubiche** *si assesta nella sua fisionomia classica a vent'anni dalla nascita.* $K = \mathbf{C}$:

- 1849: Cayley e Salmon[3] provano che una superficie cubica liscia contiene esattamente 27 rette e 45 piani tritangenti.

---

[2] G. Loria 'Il passato e il presente delle principali teorie geometriche' C. Clausen Ed. Torino (1907)
[3] 'On the triple Tangent Planes of Surfaces of the third order' Cambridge J. 1849
[4] 'Ueber die Flaechen drittes Grades' Comunicazione Acc. Berlino 31/1/1856. Journ f. Math. 1857
[5] 'Memoire de geometrie pure sur les surfaces du troisieme ordre' J. Liouville 68 (1868) 1-133
[6] 'Syntethische Untersuchungen ueber Flaechen Dritter Ordnung' Teubner (1867) Lipsia

5 Le superfici cubiche nel 1863

Corrado Segre nasce a Saluzzo il 20 agosto 1863. Che cosa si conosceva in quegli anni sulle ipersuperfici cubiche?
Negli anni Sessanta del XIX secolo la teoria delle **superfici cubiche** *si assesta nella sua fisionomia classica a vent'anni dalla nascita.* $K = \mathbf{C}$:

- 1856: Steiner [4] Geometria sintetica delle superficie cubiche.

---

[2] G. Loria 'Il passato e il presente delle principali teorie geometriche' C. Clausen Ed. Torino (1907)
[3] 'On the triple Tangent Planes of Surfaces of the third order' Cambridge J. 1849
[4] 'Ueber die Flaechen drittes Grades' Comunicazione Acc. Berlino 31/1/1856. Journ f. Math. 1857
[5] 'Memoire de geometrie pure sur les surfaces du troisieme ordre' J. Liouville 68 (1868) 1-133
[6] 'Syntethische Untersuchungen ueber Flaechen Dritter Ordnung' Teubner (1867) Lipsia

5 Le superfici cubiche nel 1863

Corrado Segre nasce a Saluzzo il 20 agosto 1863. Che cosa si conosceva in quegli anni sulle ipersuperfici cubiche?
Negli anni Sessanta del XIX secolo la teoria delle **superfici cubiche** *si assesta nella sua fisionomia classica a vent'anni dalla nascita.* $K = \mathbf{C}$:

- 1866: Luigi Cremona[5] e Rudolf Sturm [6] vincono il premio Steiner per le loro due celebri memorie sulle superfici cubiche.

---

[2] G. Loria 'Il passato e il presente delle principali teorie geometriche' C. Clausen Ed. Torino (1907)
[3] 'On the triple Tangent Planes of Surfaces of the third order' Cambridge J. 1849
[4] 'Ueber die Flaechen drittes Grades' Comunicazione Acc. Berlino 31/1/1856. Journ f. Math. 1857
[5] 'Memoire de geometrie pure sur les surfaces du troisieme ordre' J. Liouville 68 (1868) 1-133
[6] 'Syntethische Untersuchungen ueber Flaechen Dritter Ordnung' Teubner (1867) Lipsia

6 La grande geometria della superficie cubica

La fisionomia classica delle superfici cubiche viene costruita, tra il 1840 e il 1870, su diversi caposaldi ancora oggi fondamentali: [7]

- **Configurazione delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti**. *Salmon - Cayley (1849).*

[7] Cfr. I. Dolgachev 'Luigi Cremona and cubic surfaces', Luigi Cremona (1830-1903), Incontro di Studio 36, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milan, (2005) 55-70.

6 La grande geometria della superficie cubica

La fisionomia classica delle superfici cubiche viene costruita, tra il 1840 e il 1870, su diversi caposaldi ancora oggi fondamentali: [7]

- **Pentaedro di Sylvester** *(1851). Per una cubica generale S esiste un' unica quintupla di piani $\Pi_i = \{L_i = 0\}$, $i = 1 \dots 5$ tale che*

$$S = \{ \sum_{i=1\dots5} L_i^3 = 0 \}.$$

[7] Cfr. I. Dolgachev 'Luigi Cremona and cubic surfaces', Luigi Cremona (1830-1903), Incontro di Studio 36, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milan, (2005) 55-70.

6 La grande geometria della superficie cubica

La fisionomia classica delle superfici cubiche viene costruita, tra il 1840 e il 1870, su diversi caposaldi ancora oggi fondamentali: [7]

- **Double sixers di Schlaefli** *(1854). $\exists$ 36 coppie di sestuple di rette a due a due sghembe su S la cui relazione di incidenza é* $(1,5)$*:*

$$\begin{pmatrix} p_1 & \dots p_6 \\ c_1 & \dots & c_6 \end{pmatrix}$$

[7] Cfr. I. Dolgachev 'Luigi Cremona and cubic surfaces', Luigi Cremona (1830-1903), Incontro di Studio 36, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milan, (2005) 55-70.

- **Collineazioni di tre reti di piani** *(Grassmann 1855). Al variare di* $(\lambda : \mu : \nu) \in \mathbf{P}^2$ *si considera il sistema di equazioni*

$$\lambda L_{11} + \mu L_{12} + \nu L_{13} = \lambda L_{21} + \mu L_{2,2} + \nu L_{21} = \lambda L_{31} + \mu L_{32} + \nu L_{33} = 0,$$

dove gli L_{ij} *sono forme lineari su* $\mathbf{P}^3$*. Il luogo delle soluzioni é una*

$$S = \{det\ (L_{ij}) = 0\}.^8$$

[8] Esistono esattamente sei punti $P_i = (\lambda_i : \mu_i : \nu_i)$ tali che il sistema ha infinite soluzioni che formano una retta $p_i \subset S$, $i = 1 \dots 6$.

[9] Scegliendo opportunamente le coordinate $(\lambda_i : \mu_i)$.

- **Collineazioni di tre fasci di piani** *(August 1862). Una S generale contiene tre rette $a_i = \{L_i = M_i = 0\}_{i=1,2,3}$ a due a due sghembe. I fasci $\{\lambda_i L_i + \mu_i M_i = 0\} := \mathbf{P}^1$ definiscono una mappa birazionale $\phi : \mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Si ha $\phi(S) = \{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \mu_1\mu_2\mu_2 = 0\}$.* [9]

---

[8] Esistono esattamente sei punti $P_i = (\lambda_i : \mu_i : \nu_i)$ tali che il sistema ha infinite soluzioni che formano una retta $p_i \subset S$, $i = 1 \ldots 6$.

[9] Scegliendo opportunamente le coordinate $(\lambda_i : \mu_i)$.

7 Generazione proiettiva delle superfici cubiche

- *S é il luogo delle soluzioni simultanee $x \in \mathbf{P}^3$ di*

$$\lambda_1 L_1 + \mu_1 M_1 = \lambda_2 L_2 + \mu_2 M_2 = \lambda_3 L_3 + \mu_3 M_3 = 0,$$

sotto la condizione $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \mu_1\mu_2\mu_2 = 0$.

---

[8] Esistono esattamente sei punti $P_i = (\lambda_i : \mu_i : \nu_i)$ tali che il sistema ha infinite soluzioni che formano una retta $p_i \subset S$, $i = 1 \ldots 6$.

[9] Scegliendo opportunamente le coordinate $(\lambda_i : \mu_i)$.

8 Rappresentazioni della superficie cubica

- **Rappresentazione piana** *(Clebsch 1866). Una S generale é immagine della mappa razionale $\phi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^3$ definita dal sistema lineare delle cubiche per sei punti $P_1, \dots, P_6 \in \mathbf{P}^2$.*

---

10 modulo $PGL(6)$

8 Rappresentazioni della superficie cubica

- **Razionalitá di S.** *$\phi : \mathbf{P}^2 \to S$ é birazionale, quindi S é razionale.*

[10] modulo $PGL(6)$

- **Rappresentazioni piane e double sixers.** *$p_i := \phi(P_i)$ é una retta. Sia C_i la conica per i cinque punti diversi da P_i: anche $c_i := \phi(C_i)$ é una retta. Tali dodici rette formano una double sixer*

$$\begin{pmatrix} p_1 & \dots p_6 \\ c_1 & \dots & c_6 \end{pmatrix}.$$

- **Equazione esaedrale di Cremona***(1878). Una double sixer equivale* [10] *a una immersione lineare di $\mathbf{P}^3 \subset \mathbf{P}^5$ tale che*

$$S = \{a_0X_0 + \cdots + a_5X_5 = X_0 + \cdots + X_5 = X_0^3 + \cdots + X_5^3 = 0\}$$

[10] modulo $PGL(6)$

9

- *La ricchezza della geometria delle superfici permette di applicare in modo molto efficace la teoria degli invarianti allo spazio delle forme cubiche su* $\mathbf{P}^3$.

9

- *Salmon e Clebsch (1860). L' anello degli invarianti delle forme cubiche quaternarie é generato da invarianti di grado 8, 16, 24, 32, 40 e 100. L' ultimo soddisfa una equazione di grado due negli altri invarianti. In termini moderni vale il seguente:*

9

- Teorema
  Sia $\mathbf{P}^{19}$ il sistema lineare delle superfici cubiche di $\mathbf{P}^3$. Il quoziente $\mathbf{P}^{19}/PGL(4)$ é , secondo la Geometric Invariant Theory, lo spazio proiettivo 4-dimensionale pesato

$$\mathbf{P}(1,2,3,4,5).$$

10 Corrado Segre e le superfici cubiche

- *Negli anni giovanili Segre é pienamente coinvolto negli studi sulle cubiche e nel circolo di idee da questi determinato.*

---

[11] Lettera a Sturm. Pubblicata come 'Sur la generation projective des surfaces cubiques' Archive Math. u. Physik 10 (1906) 209-215

[12] La dimostrazione per via sintetica di Cremona non appariva chiara. Cfr. Sturm e a Reye

10 Corrado Segre e le superfici cubiche

- *Il suo intervento, successivamente nel 1906, sulla generazione proiettiva delle cubiche ne é una prova.* [11]
- *Cremona aveva dimostrato che la generazione proiettiva alla Grassmann era possibile per una cubica generale S.*

---

[11] Lettera a Sturm. Pubblicata come 'Sur la generation projective des surfaces cubiques' Archive Math. u. Physik 10 (1906) 209-215

[12] La dimostrazione per via sintetica di Cremona non appariva chiara. Cfr. Sturm e a Reye

- *Cremona: la generazione proiettiva alla August, vera per una S generale, implica la generazione alla Grassmann.*

[11] Lettera a Sturm. Pubblicata come 'Sur la generation projective des surfaces cubiques' Archive Math. u. Physik 10 (1906) 209-215

[12] La dimostrazione per via sintetica di Cremona non appariva chiara. Cfr. Sturm e a Reye

- Corollario *Una S generale é definita da det $L = 0$, dove L é una matrice 3×3 di forme lineari.*
- *Segre precisa per via algebrica tale dimostrazione e anche la sua unica [12] eccezione: una S con punto doppio di tipo E_6.*

$$z^2 = x^3 + z(x^2 + y^2 + xy) + z^2(x + y).$$

[11] Lettera a Sturm. Pubblicata come 'Sur la generation projective des surfaces cubiques' Archive Math. u. Physik 10 (1906) 209-215

[12] La dimostrazione per via sintetica di Cremona non appariva chiara. Cfr. Sturm e a Reye

Seconda parte: dimensione tre

12 Sulla varietá cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni

- *Appare naturale che Segre, a fine secolo, si rivolgesse allo studio delle ipersuperfici cubiche in dimensione superiore.*

[13] 'Sulle varietá cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario' Memorie R. Ac. Sc. Torino XXXIX, 1887, 3-48

12 Sulla varietá cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni

- *La 'Geometria degli spazi a quantesivogliano dimensioni' si afferma, o si é ormai affermata, come pratica corrente in quegli anni.*

[13] 'Sulle varietá cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario' Memorie R. Ac. Sc. Torino XXXIX, 1887, 3-48

12 Sulla varietá cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni

- *Segre contribuisce da par suo allo studio delle cubiche di* $\mathbf{P}^4$, *o* **cubic threefolds**, *e dei loro casi singolari.* [13]

[13] 'Sulle varietá cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario' Memorie R. Ac. Sc. Torino XXXIX, 1887, 3-48

12 Sulla varietá cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni

- *La cubica di* $\mathbf{P}^4$ *del titolo di questa slide porta oggi il suo nome: cubica di Segre o* **Segre primal.**

[13] 'Sulle varietá cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario' Memorie R. Ac. Sc. Torino XXXIX, 1887, 3-48

12 Sulla varietá cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni

- *L' ubiquitá del Segre primal, nella Geometria classica e moderna, si presta per un viaggio nel tempo che giunga infine ai nostri giorni.*

[13] 'Sulle varietá cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario' Memorie R. Ac. Sc. Torino XXXIX, 1887, 3-48

- *Esso ci permetterá di considerare alcune delle piú belle pagine scritte dalla geometria negli ultimi cent' anni, grazie alle cubiche.*

[13] 'Sulle varietá cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario' Memorie R. Ac. Sc. Torino XXXIX, 1887, 3-48

13 Sulla varietá cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni

In proposito la cubica di Segre e la sua straordinaria geometria verranno riconsiderate a piú riprese. Per cominciare:

- *L' equazione esaedrale di Cremona mostra che una superficie cubica generale é contenuta nel threefold S_6-***invariante**

$$\mathbb{S} := \{y_0 + \cdots + y_5 = y_0^3 + \cdots + y_5^3 = 0\} \subset \mathbf{P}^5.$$

[14] ponendo $x_0 = y_0, \ldots, x_4 = y_4, -y_5 = x_0 + \cdots + x_4$

[15] Su qualunque campo K con *char* $K \neq 2$

In proposito la cubica di Segre e la sua straordinaria geometria verranno riconsiderate a piú riprese. Per cominciare:

- *La* **cubica di Segre** *é esattamente* $\mathbb{S}$. *Eliminando* y_5 [14] *si ha* [15]

$$\mathbb{S} := \{ \sum_{0 \le i < j < k \le 4} 2x_i x_j x_k + \sum_{i \ne j} x_i^2 x_j = 0 \} \subset \mathbf{P}^4.$$

[14] ponendo $x_0 = y_0, \dots, x_4 = y_4, -y_5 = x_0 + \cdots + x_4$

[15] Su qualunque campo K con *char* $K \ne 2$

13 Sulla varietá cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni

In proposito la cubica di Segre e la sua straordinaria geometria verranno riconsiderate a piú riprese. Per cominciare:

- **Rappresentazione spaziale:** $\phi : \mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}^4$. $\phi(\mathbf{P}^3) = \mathbb{S}$. ϕ *é definita dal sistema lineare delle quadriche per* $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 \in \mathbf{P}^3$.

[14] ponendo $x_0 = y_0, \ldots, x_4 = y_4, -y_5 = x_0 + \cdots + x_4$

[15] Su qualunque campo K con *char* $K \neq 2$

13 Sulla varietá cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni

In proposito la cubica di Segre e la sua straordinaria geometria verranno riconsiderate a piú riprese. Per cominciare:

- **15 piani** e **10 nodi.** *Nodi:* $\phi(E_{ij})$ *dove* E_{ij} *é la retta* $< O_i O_j >$. *Piani:* $\phi(O_i)$ e $\phi(F_{ijk})$) *dove* F_{ijk} *é il piano* $< O_i O_j O_k >$.

[14] ponendo $x_0 = y_0, \ldots, x_4 = y_4, -y_5 = x_0 + \cdots + x_4$

[15] Su qualunque campo K con *char* $K \neq 2$

14 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- **Teorema di Lueroth** *(1876). Per una curva C unirazionale* [16] *implica razionale.* [17]

[16] **Una varietá algebrica V si dice unirazionale** se ammette equazioni parametriche razionali, cioé una mappa razionale dominante $\phi : K^N \to V$, non necessariamente di grado 1.

[17] V **si dice razionale** se esiste una mappa birazionale $\psi : K^d \to V$, cioé di grado 1.

[18] V = varietá algebrica

14 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- *Negli stessi anni nasceva, come* **problema di Lueroth,** *il seguente: sia V* [18] *definita su* $\mathbf{C}$, *V unirazionale implica V razionale?*

[16] Una varietá algebrica V si dice **unirazionale** se ammette equazioni parametriche razionali, cioé una mappa razionale dominante $\phi : K^N \to V$, non necessariamente di grado 1.

[17] V si dice **razionale** se esiste una mappa birazionale $\psi : K^d \to V$, cioé di grado 1.

[18] V = varietá algebrica

14 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- *Il* **Criterio di razionalitá di Castelnuovo** *(1892) offriva poco dopo una risposta positiva per ogni superficie V.*

---

[16] Una varietá algebrica V si dice **unirazionale** se ammette equazioni parametriche razionali, cioé una mappa razionale dominante $\phi : K^N \to V$, non necessariamente di grado 1.

[17] V si dice **razionale** se esiste una mappa birazionale $\psi : K^d \to V$, cioé di grado 1.

[18] V = varietá algebrica

14 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- *Per dim $V = 3$ il problema rimase, nonostante i risultati proposti da Enriques e da Fano, in sostanza non risolto e 'outstanding' :*

[16] Una varietá algebrica V si dice **unirazionale** se ammette equazioni parametriche razionali, cioé una mappa razionale dominante $\phi : K^N \to V$, non necessariamente di grado 1.

[17] V si dice **razionale** se esiste una mappa birazionale $\psi : K^d \to V$, cioé di grado 1.

[18] V = varietá algebrica

14 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- *fino alle scoperte di* **controesempi** *negli anni '70 del XX secolo: Artin e Mumford, Manin e Iskovskih, Clemens e Griffiths.*

---

[16] Una varietá algebrica V si dice **unirazionale** se ammette equazioni parametriche razionali, cioé una mappa razionale dominante $\phi : K^N \to V$, non necessariamente di grado 1.

[17] V si dice **razionale** se esiste una mappa birazionale $\psi : K^d \to V$, cioé di grado 1.

[18] V = varietá algebrica

15 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- *Questi sviluppi hanno contribuito alla nascita della nozione di* **varietá razionalmente connessa,**[19] *(Clemens, Kollar, Mori).*[20]

[19] V si dice razionalmente connessa se per due suoi punti generali passa una stessa curva razionale
[20] e a un cambiamento di prospettivo nello studio delle varietá unirigate.
[21] O le ipersuperfici di grado n in $\mathbf{P}^n$, $n \geq 4$?
[22] In $\mathbf{P}^n_K$ con $K \neq \mathbf{C}$ non hanno molto senso o non mi risultano congetture generali.

15 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- *Ció rilancia un* **problema:** *razionalmente connessa implica unirazionale? Controesempi? Forse le quartiche di* $\mathbf{P}^4$*?* [21]

[19] V si dice razionalmente connessa se per due suoi punti generali passa una stessa curva razionale

[20] e a un cambiamento di prospettivo nello studio delle varietá unirigate.

[21] O le ipersuperfici di grado n in $\mathbf{P}^n$, $n \geq 4$?

[22] In $\mathbf{P}^n_K$ con $K \neq \mathbf{C}$ non hanno molto senso o non mi risultano congetture generali.

15 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- *La cubica di* $\mathbf{P}^4$ *rimane invece indissolubilmente legata al problema di Lueroth e ne é un controesempio.*

[19] V si dice razionalmente connessa se per due suoi punti generali passa una stessa curva razionale

[20] e a un cambiamento di prospettivo nello studio delle varietá unirigate.

[21] O le ipersuperfici di grado n in $\mathbf{P}^n$, $n \geq 4$?

[22] In $\mathbf{P}^n_K$ con $K \neq \mathbf{C}$ non hanno molto senso o non mi risultano congetture generali.

15 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- *Per cubiche di dimensione ≥ 4 le cose si complicano. Un problema consideraton* **outstanding** *per il XXI secolo é il seguente:*

[19] V si dice razionalmente connessa se per due suoi punti generali passa una stessa curva razionale

[20] e a un cambiamento di prospettivo nello studio delle varietá unirigate.

[21] O le ipersuperfici di grado n in $\mathbf{P}^n$, $n \geq 4$?

[22] In $\mathbf{P}^n_K$ con $K \neq \mathbf{C}$ non hanno molto senso o non mi risultano congetture generali.

15 Cubiche, razionalitá e unirazionalitá

- **provare la non razionalitá della cubica generale**

$$V \subset \mathbf{P}^n, \ \ n \geq 5.^{22}$$

[19] V si dice razionalmente connessa se per due suoi punti generali passa una stessa curva razionale

[20] e a un cambiamento di prospettivo nello studio delle varietá unirigate.

[21] O le ipersuperfici di grado n in $\mathbf{P}^n$, $n \geq 4$?

[22] In $\mathbf{P}^n_K$ con $K \neq \mathbf{C}$ non hanno molto senso o non mi risultano congetture generali.

16 Razionalitá e Cubic threefolds

- **Unirazionalitá della cubica liscia $V \subset \mathbf{P}^n_K$.** *J. Kollar 2000* [23].

  Se $\exists\ o \in V$ allora V é unirazionale.

---

[23] La dimostrazione si basa su quella di B. Segre per una superficie cubica V su $\mathbb{Q}$.
[24] A partire dai risultati di Manin e Iskovskih sul quartic threefold.
[25] Una variazione si fonderá poi sulla teoria delle varietá di Prym, (Mumford, Murre).

- **Razionalitá della cubica liscia $V \subset \mathbf{P}^n_K$.** *Fuori misura. B. Segre:*

$$V \subset \mathbf{P}^3_K, \quad Pic\ V \cong \mathbb{Z} \Longrightarrow V \text{ non razionale.}$$

[23] La dimostrazione si basa su quella di B. Segre per una superficie cubica V su $\mathbb{Q}$.

[24] A partire dai risultati di Manin e Iskovskih sul quartic threefold.

[25] Una variazione si fonderá poi sulla teoria delle varietá di Prym, (Mumford, Murre).

16 Razionalitá e Cubic threefolds

- **Fano e la non razionalitá della $V \subset \mathbf{P}^4$.**
  Idea: provare che $Cr(V) \neq Cr(\mathbf{P}^3)$. Funziona per altre ipersuperfici unirazionali non cubiche. [24] **Finora non per V.**

[23] La dimostrazione si basa su quella di B. Segre per una superficie cubica V su $\mathbb{Q}$.

[24] A partire dai risultati di Manin e Iskovskih sul quartic threefold.

[25] Una variazione si fonderá poi sulla teoria delle varietá di Prym, (Mumford, Murre).

- **Non razionalitá di ogni V liscia.**
  Clemens e Griffiths 1972: il metodo coinvolge la teoria di Hodge di V e la geometria delle rette di V. [25]

---

[23] La dimostrazione si basa su quella di B. Segre per una superficie cubica V su $\mathbb{Q}$.

[24] A partire dai risultati di Manin e Iskovskih sul quartic threefold.

[25] Una variazione si fonderá poi sulla teoria delle varietá di Prym, (Mumford, Murre).

- *Un risultato piú debole, e cioé la* **non razionalitá di una cubica generale $V \subset \mathbf{P}^4$,** *si puó ottenere per degenerazione.*

17 Razionalitá e Cubic threefolds

- *Si applica lo stesso metodo a limiti singolari V_o di una V generale. Collino, poi Bardelli, per primi hanno usato* **degenerazioni di V.**

- *Infine T. Gwena 2004: considera una famiglia* $\{V_t, t \in T\}$ *il cui limite é* $V_o =$ **cubica di Segre.**

17 Razionalitá e Cubic threefolds

- *Questa situazione é interessante: lo studio di V_o mette in luce la bellezza geometrica di V e V_o. Vediamo alcuni particolari.*

18 Cubic Threefolds: teoria di Hodge e non razionalitá

- *Metodo di Clemens-Griffiths: la non razionalitá di una V liscia é conseguenza della sua struttura di Hodge.*

18 Cubic Threefolds: teoria di Hodge e non razionalitá

- *Decomposizione di Hodge della coomologia complessa di V. In particolare: $h^{3,0} = h^{0,3} = 0$ e $h^{1,2} = h^{2,1} = 5$, quindi*

$$H^3(V, \mathbf{C}) \cong H^{1,2}(V, \mathbf{C}) \oplus H^{2,1}(V, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^5 \oplus \mathbf{C}^5.$$

18 Cubic Threefolds: teoria di Hodge e non razionalitá

- *Mappa di Abel-Jacobi:* $H_3(V, \mathbb{Z}) \subset H^{1,2}(V, \mathbf{C})^*$. *Si considera*

$$J(V) := H^{12^*}(V, \mathbf{C})^* / H_3(V, \mathbb{Z}) = \textit{ Jacobiana intermedia di } V$$

18 Cubic Threefolds: teoria di Hodge e non razionalitá

- $J(V) \neq$ *prodotto di Jacobiane di curve* $\Rightarrow V$ *non é razionale.*

19 Cubic Threefolds: varietá di Prym e non razionalitá

- *Sia* $l \subset V$ *un retta. La proiezione lineare* $p_l : V \to \mathbf{P}^2$ *definisce una famiglia di coniche di* V.

19 Cubic Threefolds: varietá di Prym e non razionalitá

- *Sia $C \subset \mathbf{P}^2$ la curva che parametrizza le coniche singolari di tale famiglia: C é una quintica, liscia per l generica su una V liscia.*

19 Cubic Threefolds: varietá di Prym e non razionalitá

- $\exists$ *un naturale rivestimento doppio non ramificato* $\pi : \tilde{C} \to C$, *dove* $\tilde{C}$ *parametrizza le rette contenute in fibre degeneri di* p_l.

19 Cubic Threefolds: varietá di Prym e non razionalitá

- *Sia $P(C, \pi)$ la varietá di Prym associata a (C, π): si tratta di un toro complesso p.p. di dimensione 5.*

19 Cubic Threefolds: varietá di Prym e non razionalitá

- *Teorema* (Murre) $P(C,\pi)$ e $J(V)$ sono isomorfi come tori complessi principalmente polarizzati.

- *La non razionalitá di ogni V liscia segue dalla teoria delle varietá di Prym e delle loro funzioni theta:*
  La Prym $P(C, \pi)$ non é prodotto di Jacobiane di curve.

20 La superficie delle rette di V e quella di V_o

- *La famiglia delle rette l contenute in V definisce una superficie liscia e connessa $F(V) \subset G(1, \mathbf{P}^4)$:* **la superficie di Fano di V.**

20 La superficie delle rette di V e quella di V_o

- *La coomologia di $F(V)$ entra in gioco nella non razionalitá di V:*

$$J(V) \cong \ H^{1,0}(F(V), \mathbf{C})^* / H_1(F(V), \mathbb{Z}) := \ \textit{varietá di Albanese di } V$$

20 La superficie delle rette di V e quella di V_o

- *$F(V)$ ha classe $(18, 27)$ in $G(1, \mathbf{P}^4)$: come degenera a $F(V_o)$?*

20 La superficie delle rette di V e quella di V_o

- *Sia $\phi : \mathbf{P}^3 \to V_o$ la mappa birazionale definita dal sistema lineare delle quadriche per $F_1, ..., F_5$. $F(V_o)$ contiene:*
  - 15 piani di classe $(0,1)$: $\phi(F_i), i = 1 \ldots 5$ *e* $\phi(< F_i F_j F_k >)$.
  - 5 superfici razionali di classe $(3,2)$: *le trasformate strette mediante ϕ delle rette delle stelle di centro F_i.*
  - $\exists$ un' unica famiglia di cubiche gobbe per $F_1 \ldots F_5$: *le loro trasformate strette sono rette e definiscono una superficie di classe* $(3,2)$.

20 La superficie delle rette di V e quella di V_o

- *Sia $\phi : \mathbf{P}^3 \to V_o$ la mappa birazionale definita dal sistema lineare delle quadriche per $F_1, ..., F_5$. $F(V_o)$ contiene:*
  - 15 piani di classe $(0,1)$: $\phi(F_i), i = 1 \ldots 5$ *e* $\phi(< F_i F_j F_k >)$.
  - 5 superfici razionali di classe $(3,2)$: *le trasformate strette mediante ϕ delle rette delle stelle di centro F_i.*
  - $\exists$ un' unica famiglia di cubiche gobbe per $F_1 \ldots F_5$: *le loro trasformate strette sono rette e definiscono una superficie di classe* $(3,2)$.

- *Descrivere esplicitamente la varietá di Albanese di $F(V_o)$?*

20 La superficie delle rette di V e quella di V_o

- *Sia* $\phi : \mathbf{P}^3 \rightarrow V_o$ *la mappa birazionale definita dal sistema lineare delle quadriche per* $F_1, ..., F_5$. $F(V_o)$ *contiene:*
  - 15 piani di classe $(0,1)$: $\phi(F_i), i = 1 \ldots 5$ *e* $\phi(< F_i F_j F_k >)$.
  - 5 superfici razionali di classe $(3,2)$: *le trasformate strette mediante* ϕ *delle rette delle stelle di centro* F_i.
  - $\exists$ un' unica famiglia di cubiche gobbe per $F_1 \ldots F_5$: *le loro trasformate strette sono rette e definiscono una superficie di classe* $(3,2)$.

- *Utilizzare* $F(V_o)$ *per descrivere famiglie di* $F(V)$, *e di* V, *speciali?*

- *Sia $l \in F(V_o)$.* [26] *La* **curva discriminante** *C_o di $p_l : V_o \to \mathbf{P}^2$ é una quintica con 10 nodi: $\Longrightarrow C_o =$ unione di cinque rette.*

[26] e tale che $l \cap \mathit{Sing}\ V_o = \emptyset$.

21 La varietá di Prym della cubica di Segre

- *Sia $\pi_o : \tilde{C}_o \to C_o$ il rivestimento naturale.* **Come costruire la Prym $P(C_o, \pi_o)$ e come studiarla?** *Come gruppo algebrico*

$$P(C_o, \pi_o) = (\mathbf{C}^*)^5.$$

[26] e tale che $l \cap Sing\ V_o = \emptyset$.

- *Data una famiglia* $\{(V_t, l_t), t \ \in T\}$ *contenente* (V_o, C_o) *possiamo considerare la* **corrispondente famiglia di varietá di Prym**

$$\{P(C_t, \pi_t),\ t \in T\}.$$

[26] e tale che $l \cap Sing\ V_o = \emptyset$.

- *Per $t \neq o$ si ha $P(C_t, \pi_t) = J(V_t)$:*
  le proprietá di $P(C_o, \pi_o)$ implicano che, per un generico $t \in T$, la $J(V_t)$ non é un prodotto di Jacobiane? **La risposta é sí.**

[26] e tale che $l \cap Sing\ V_o = \emptyset$.

22 Non razionalitá del cubic threefold e matroidi

- *Alexeiev, Birkenake, Hulek 2002: studio di degenerazioni stabili* [27] *di famiglie di varietá di Prym* $\mathcal{P} := \{P(C_t, \pi_t),\ t \in T\}$.

[27] nel senso di Voronoi

- $\mathcal{P}$ *determina un* **sistema unimodulare** *di vettori dello spazio* $H_1(\tilde{C}_o, \mathbf{R})^-$, *dove* $\pi_o : \tilde{C}_o \to C_o$ *é il rivestimento di* C_o.

[27] nel senso di Voronoi

- *Tale sistema é rappresentato da una matrice* $(I_n \ A)$ *le cui sottomatrici non singolari* $n \times n$ *sono unimodulari.*

[27] nel senso di Voronoi

- *Se* $P(C_t, \pi_t)$ *é un prodotto di Jacobiane allora il sistema é* **cografico** *cioé la matrice trasposta é associata a un grafo.*

[27] nel senso di Voronoi

23 Non razionalitá del cubic threefold e matroidi

- $\mathcal{P}$ = *famiglia di Jacobiane intermedie* $J(V_t) = P(C_t, \pi_t)$ *di cubic 3-folds. Fibra centrale* V_o. *Sing* V_o = *insieme finito di nodi.*

23 Non razionalitá del cubic threefold e matroidi

- *Gwena 2004: il sistema unimodulare* $(I_n\ A)$, *determinato dalla degenerazione di* $P(C_t, \pi_t)$ *a* $(P(C_o, \pi_o)$, *coincide con un altro sistema modulare, determinato dalla configurazione Sing* V_o.

23 Non razionalitá del cubic threefold e matroidi

- *Sia V_o é la cubica di Segre. La configurazione dei dieci nodi di V_o determina il sistema unimodulare:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

23 Non razionalitá del cubic threefold e matroidi

- *Si tratta del sistema unimodulare* R_{10}*:* **né grafico né cografico.**

- *Quindi il generico cubic threefold V_t* **non é razionale.**

24 Ubiquitá del Segre primal

- *L' ubiquitá di V_o é dovuta alla sua natura di varietá modulare. Molti e diversi sono i legami di V_o con i quozienti $X_\Gamma = \Gamma|\mathcal{D}$:* [28]

---

[28] $\mathcal{D}$ é un bounded symmetric domain, Γ un gruppo aritmetico: B. Hunt 'Nice Modular Varieties'.

[29] $\tilde{V}_o :=$ blow up di V_o nei suoi 15 punti singolari

[30] e ulteriore struttura.

- $\tilde{V}_o$ [29] $=$ *GIT-quotient di* $(\mathbf{P}^1)^6 = \overline{\mathcal{M}}_{0,6}$ *compattificazione di Deligne-Mumford di* $\mathcal{M}_{0,6}$.

---

[28] $\mathcal{D}$ é un bounded symmetric domain, Γ un gruppo aritmetico: B. Hunt 'Nice Modular Varieties'.

[29] $\tilde{V}_o :=$ blow up di V_o nei suoi 15 punti singolari

[30] e ulteriore struttura.

24 Ubiquitá del Segre primal

- *Duale di V_o = quartica di Igusa in $\mathbf{P}^{4*} = \overline{\mathcal{A}}_2^{(2)}$, compattificazione moduli delle curve di genere 2 con struttura di livello 2.*

[28] $\mathcal{D}$ é un bounded symmetric domain, Γ un gruppo aritmetico: B. Hunt 'Nice Modular Varieties'.

[29] $\tilde{V}_o$:= blow up di V_o nei suoi 15 punti singolari

[30] e ulteriore struttura.

- V_o = *compattificazione dei moduli delle curve di genere 4 con moltiplicazione per* $e^{\frac{i\pi}{3}}$.

[28] $\mathcal{D}$ é un bounded symmetric domain, Γ un gruppo aritmetico: B. Hunt 'Nice Modular Varieties'.
[29] $\tilde{V}_o$:= blow up di V_o nei suoi 15 punti singolari
[30] e ulteriore struttura.

- *Hessiana di* V_o = *threefold modulare quintico di Barth-Nieto, compattificazione dei moduli delle superfici abeliane di tipo (1,3).* [30]

[28] $\mathcal{D}$ é un bounded symmetric domain, Γ un gruppo aritmetico: B. Hunt 'Nice Modular Varieties'.

[29] $\tilde{V}_o$:= blow up di V_o nei suoi 15 punti singolari

[30] e ulteriore struttura.

Terza parte: dimensione quattro

D' ora in poi: V = *cubica in* $\mathbf{P}^5$, S = *superficie* $K3$.

- *Una superficie $K3$ é una superficie complessa, compatta e connessa, semplicemente connessa con* $\det T_S$ *triviale.*

[31] Questa parametrizza le rette di V che intersecano P_1 e P_2 e si descrive facilmente.

26 Superfici K3. Cubiche di $\mathbf{P}^5$. Razionalitá

D' ora in poi: V = cubica in $\mathbf{P}^5$, S = superficie $K3$.

- *Differenza con $\mathbf{P}^4$: esistono esempi di $V \subset \mathbf{P}^5$* **lisce e razionali.**

---

[31] Questa parametrizza le rette di V che intersecano P_1 e P_2 e si descrive facilmente.

26 Superfici K3. Cubiche di $\mathbf{P}^5$. Razionalitá

D' ora in poi: V = *cubica in* $\mathbf{P}^5$, S = *superficie* $K3$.

- *Per ognuno* $\exists$ *una mappa* $\phi : V \to W$ *birazionale tale che* W *é razionale e uno dei centri di* ϕ^{-1} *é birazionale a una* $K3$.

[31] Questa parametrizza le rette di V che intersecano P_1 e P_2 e si descrive facilmente.

D' ora in poi: V *= cubica in* $\mathbf{P}^5$, S *= superficie K3.*

- **Alcuni esempi:**
  - V contiene due piani sghembi P_1, P_2.
    siano $p_1, p_2 : V \to \mathrm{P}^2$ *le proiezioni di centri* P_1, P_2. *La mappa prodotto* $\phi : V \to \mathrm{P}^2 \times \mathrm{P}^2$ *é birazionale.* ϕ^{-1} *é indeterminata lungo una K3 di* $\mathrm{P}^2 \times \mathrm{P}^2$. [31]
  - Hassett: V contiene un piano P e ammette una sezione $s : \mathrm{P}^2 \to V$ della proiezione $p : V \to \mathrm{P}^2$.
    Posto $R = \phi(\mathrm{P}^2)$ *si costruisce in modo analogo una* $\phi : V \to \mathrm{P}^2 \times R$, $R = s(\mathrm{P}^2)$.
  - Morin e poi Beauville-Donagi: l' equazione di V é lo Pfaffiano di una matrice 6×6 di forme lineari.

[31] Questa parametrizza le rette di V che intersecano P_1 e P_2 e si descrive facilmente.

27 La varietá delle rette

- $F(V) :=$ *varietá di Fano delle rette di un cubic fourfold liscio.*

27 La varietá delle rette

- *$F(V)$ é un fourfold: semplicemente connesso con una 2-forma globale mai nulla.*

27 La varietá delle rette

- *Topologicamente é la desingolarizzazione minimale del 2-prodotto simmetrico di una superfici* $K3$.

27 La varietá delle rette

- *Negli esempi in cui V é razionale $F(V)$ é un tale 2-prodotto simmetrico.*

27 La varietá delle rette

- **Quali sono in definitiva i legami tra V, razionalitá e K3?**

- *Gli esempi suggeriscono che nella struttura di Hodge di una V razionale e liscia sia visibile la struttura di Hodge di una K3 S.*

- *Si tratta della S che appare come uno dei centri della mappa ϕ^{-1}.*

- *Si osserva per le due strutture che:*
  (1) $H^4_{prim}(V,\mathbb{Z}) = H^{3,1} \oplus H^{2,2}_{prim} \oplus H^{1,3}$ *ha segnatura* $(20,2)$.
  (2) $H^2(S,\mathbb{Z})(-1) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ *ha segnatura (19,3).*

- *Si osserva per le due strutture che:*
  (1) $H^4_{prim}(V,\mathbb{Z}) = H^{3,1} \oplus H^{2,2}_{prim} \oplus H^{1,3}$ *ha segnatura* $(20,2)$.
  (2) $H^2(S,\mathbb{Z})(-1) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ *ha segnatura (19,3).*
- *Negli esempi esse contengono due sottostrutture isomorfe:*
  (1) $T^{\perp} \subset H^4_{prim}(V,\mathbb{Z})$ *dove* T *é una superficie in* V *non intersezione completa.*
  (2) $L^{\perp} \subset H^2(S,\mathbb{Z})(-1)$, *dove* L *é una classe positiva in* $Pic\ S$.

Ora, con le notazioni precedenti:

- *V ha uno spazio di moduli $\mathcal{C}$ di dimensione 20.*

Ora, con le notazioni precedenti:

- *La condizione che esista T definisce un divisore effettivo o zero $\mathcal{C}_d \subset \mathcal{C}$.*

Ora, con le notazioni precedenti:

- *Qui d é il discriminante del reticolo generato da T e da H^2, dove $H = c_1(\mathcal{O}_V(1))$.*

Ora, con le notazioni precedenti:

- $\mathcal{C}_d$ *non é il divisore zero se e solo se* $d > 6$ *e* $d \equiv 0$ *o* 2 *modulo 6.*

Ora, con le notazioni precedenti:

- $T^\perp$ *é isometrico a* $L^\perp$ *se e solo se* d *non é divisibile per 4,9 e ogni primo* p *dispari tale che* $p \equiv -1$ *modulo 3.*

Allora per concludere:

- *Sia* $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ *il luogo che parametrizza le* V *razionali.*

Allora per concludere:

- *'E lecito affermare che $\mathcal{R}$ é unione di divisori?*

Allora per concludere:

- *Esattamente l' unione dei divisori $\mathcal{C}_d$?*

Allora per concludere:

- *Gli esempi conosciuti sono coerenti con questa idea.*

Allora per concludere:

- *L' unico esempio di divisore* $\mathcal{C}_d$ *per cui vale questa congettura si ha per* $d = 14$. *Si tratta della cubica di Morin.*

31 Categorie derivate. Cubiche di $\mathbf{P}^5$. Razionalitá

- *La congettura di Kuznestsov ripropone in termini di categorie derivate tutta questa discussione.*

31 Categorie derivate. Cubiche di $\mathbf{P}^5$. Razionalitá

- *La categoria derivata $D(V)$ dei fasci coerenti su V contiene una categoria $\mathcal{A}_V$: a volte essa volte coincide con la categoria derivata $D(S)$ di una K3 proiettiva S.*

31 Categorie derivate. Cubiche di $\mathbf{P}^5$. Razionalitá

- *Addington - Thomas 2012: i luoghi in $\mathcal{C}$ dove ció avviene coincidono genericamente con i divisori $\mathcal{C}_d$.*

31 Categorie derivate. Cubiche di $\mathbf{P}^5$. Razionalitá

- *Macri - Stellari 2013: cubic fourfold V contenente un piano, studio mediante le categorie derivate.*

31 Categorie derivate. Cubiche di $\mathbf{P}^5$. Razionalitá

- *Esiste un' altra K3 associata a V, descritta come spazio di moduli di fibrati di rango 4 su V.*

32 Segre, Fano, Togliatti, Gallarati

- *In ordine cronologico questi nomi ben si collegano e ben rappresentano, certo trascurando di menzionarne diversi altri, il circolo di idee sulle cubiche, e anche sulle ipersuperfici con nodi, che origina dai lavori di Corrado Segre considerati in questa conferenza.*
- *Non sarebbe difficile rilevare come, attraverso le opere di questi geometri, le idee di Corrado Segre sulle forme cubiche si siano sviluppate e siano ben vive e presenti anche oggi.*
- *Gino Fano: non c' é bisogno di sottolineare quanto lo studio delle cubiche debba a Gino Fano.*
- *Eugenio Togliatti: la cubica di* $\mathbf{P}^5$ *con il massimo numero di nodi, 15 come prescrive il bound di Varchenko, é stata costruita da Togliatti e ha una geometria bella come quella del Segre primal. Chissá se nasconde qualche proprietá interessante per dedurre la non razionalitá di* V*?*
- *Dionisio Gallarati ha riscritto, alla verde etá di 85-90 anni, una serie di suoi appunti sulle superfici cubiche, con il bellissimo stile che lo contraddistingue anche nella scelta degli esercizi. Gallarati ha ora compiuto novant'anni da poche settimane e ha ricevuto gli auguri di amici e colleghi ritrovatisi a Genova per questo.*
- *Credo che inviargli un caloroso augurio anche qui da Bologna sia il modo giusto di concludere.*