Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2
Tutorato 4 - 21 Ottobre 2008
Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Esercizio 1.
Siano $(G, +)$ e $(G', +)$ due gruppi abeliani. Sia $Hom(G, G')$ l'insieme degli omomorfismi da G in G'. Si consideri l'applicazione
$+ :\ Hom(G, G') \times Hom(G, G') \longrightarrow Hom(G, G')$
tale che $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$.

- Dimostrare che $+$ é effettivamente un'operazione binaria;
- Dimostrare che $(Hom(G, G'), +)$ é un gruppo abeliano.

Esercizio 2.
Si consideri l'applicazione $f : (Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_m, +)$ definita come $f(\varphi) = \varphi([1]_n)$.

- Dimostrare che f é un omomorfismo iniettivo di gruppi;
- Trovare l'immagine di f e dire a quale gruppo noto é isomorfo $(Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m), +)$.

Esercizio 3.
Sia $f_n : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ definita da $f_n(x) = nx$. Verificare che f_n é un omomorfismo, trovare il nucleo e l'immagine di f_n.

Esercizio 4.
Trovare tutti gli omomorfismi fra $\mathbb{Z}_{18}$ e $\mathbb{Z}_{12}$.

Esercizio 5.
Sia $Aut(\mathbb{Z}_n)$ l'insieme degli automorfismi di $\mathbb{Z}_n$. Mostrare che:

- $(Aut(\mathbb{Z}_n), +) \subseteq (Hom(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n), +)$ non é un sottogruppo.
- $(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ)$ é un gruppo.
- $(Aut(\mathbb{Z}_n), \circ)$ é isomorfo a $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$.
- trovare tutti gli automorfismi di $\mathbb{Z}_{16}$.

Si consideri ora il gruppo degli endomorfismi di $\mathbb{Z}$. Sia $\beta_a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la moltiplicazione per a, i.e. $\beta_a(x) = ax$.

- Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\beta_a \in Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$;
- A cosa é isomorfo $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$?

Esercizio 6.
Sia G un gruppo abeliano finito di ordine m. Sia n primo con m. Dimostrare che ogni $g \in G$ si può scrivere come $g = x^n$ con $x \in G$, i.e. esiste $x \in G$ tale che $x^n = g$.

Esercizio 7.
Sia G un gruppo e sia H un suo sottogruppo. Definiamo $N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$. Dimostrare che $N(H)$ é un sottogruppo di G e che $N(H) \supseteq H$. $N(H)$ si dice *normalizzante* di H in G.

Esercizio 8.
Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia H un suo sottogruppo.

- Provare che se $H \triangleleft G$ e $(G : H) = n$ allora $\forall g \in G, g^n \in H$
- Dimostrare con un esempio che il risultato del punto precedente é falso se H non é normale in G
- Stabilire se A_4 ha sottogruppi normali ed, in caso affermativo, elencarli.
- Provare che A_4 non ha sottogruppi di ordine 6 (sugg. usare i punti precedenti).