Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2
Tutorato 3 - 17 Ottobre 2008

Elisa Di Gloria, Matteo Acclavio
www.matematica3.com

Diamo una bozza di soluzione degli esercizi più teorici ed astratti.

Esercizio 1.
Provare che se G è un gruppo e M e N sono sottogruppi normali di G con $M \cap N = \{e\}$, allora per ogni $a \in M$, $b \in N$ si ha $ab = ba$.

Sol. Sia $a \in M$ e $b \in N$, vogliamo verificare che $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = e$. Osserviamo che $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(ba^{-1}b^{-1})$ è un elemento di M poiché $a \in M$ e $ba^{-1}b^{-1} \in M$ per la normalità di M; analogamente si vede che $(ab)(a^{-1}b^{-1}) \in N$. Ora, poiché $M \cap N = \{e\}$ si può concludere che $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = e$, ma allora moltiplicando a destra prima per b e poi per a si ottiene che $ab = ba$, che è la nostra tesi.

Esercizio 2.
Sia G il gruppo delle applicazioni $f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da $f_{a,b}(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ rispetto alla composizione tra applicazioni.

- Provare che $S = \{f_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G;
- Verificare che $U = \{f_{a,0} \mid a \in \mathbb{R}^*\}$ è un sottogruppo di G. U è normale in G?

Esercizio 3.
Descrivere il gruppo quoziente di:

- $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ rispetto ad $H = \{\bar{0},\ \bar{4},\ \bar{8}\}$;
- $(\mathbb{R}, +)$ rispetto a $\mathbb{Z}$;
- $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ rispetto ai suoi due sottogruppi $\{1, -1\}$ e $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

Sol. a): Poiché $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ ha 12 elementi ed $H = \{\bar{0},\ \bar{4},\ \bar{8}\}$ ha 3 elementi, l'indice di H in $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ è $\frac{12}{3} = 4$; H determina 4 laterali destri (che sono anche laterali sinistri per l'abelianità di $\mathbb{Z}_{12}$) che sono gli elementi del gruppo quoziente $(\mathbb{Z}_{12}, +)/H$; essi sono precisamente: $H = \{\bar{0},\ \bar{4},\ \bar{8}\}$, $\bar{1} + H = \{\bar{5},\ \bar{9},\ \bar{1}\}$, $\bar{2} + H = \{\bar{2},\ \bar{6},\ \bar{10}\}$, $\bar{3} + H = \{\bar{3},\ \bar{7},\ \bar{11}\}$. Calcoliamo l'ordine di ciascun elemento diverso dall'elemento neutro H:

- $2(\bar{2}+H) = \bar{4}+H = H$, quindi $\bar{2}+H$ ha ordine 2;
- $2(\bar{3}+H) = \bar{6}+H \neq H$, quindi $\bar{3}+H$ ha ordine 4 (per il Teorema di Lagrange);
- $2(\bar{1}+H) = \bar{2}+H \neq H$, quindi $\bar{1}+H$ ha anch'esso ordine 4 e pertanto il gruppo é ciclico.

b) $\mathbb{Z}$ è un sottogruppo normale di $(\mathbb{R},+)$, per l'abelianitá di $(\mathbb{R},+)$. Sia $x \in \mathbb{R}$, il laterale di x rispetto a $\mathbb{Z}$ è $x+\mathbb{Z}$; due elementi determinano lo stesso laterale se e solo se la loro differenza sta in $\mathbb{Z}$. In ogni laterale determinato da un certo elemento r c'è quindi uno ed un solo numero x dell'intervallo $[0,1)$, il quale si ottiene togliendo da r il valore $[r]$, cioé il piú grande intero in esso contenuto. Consideriamo un elemento $r+\mathbb{Z}$ del gruppo quoziente $(\mathbb{R},+)/\mathbb{Z}$:

- se $r \in \mathbb{Z}$ $\quad r+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ é l'elemento neutro;
- se $r \in \mathbb{Q}$ $\quad r+\mathbb{Z}$ ha periodo finito, infatti posto $r = \frac{n}{m}$ con n, m interi primi tra loro e $m > 0$, allora $\frac{n}{m}+\mathbb{Z}$ ha ordine m perché $m(\frac{n}{m}+\mathbb{Z}) = n+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ed inoltre per ogni $s < m$ si ha $s(\frac{n}{m}+\mathbb{Z}) = \frac{sn}{m}+\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ in quanto $\frac{sn}{m} \notin \mathbb{Z}$;
- se r é un numero irrazionale $r+\mathbb{Z}$ ha periodo infinito, infatti se avesse ordine h allora $rh \in \mathbb{Z}$ e quindi $r \in \mathbb{Q}$ sarebbe razionale.

c) Due elementi di $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ x e x' individuano lo stesso laterale rispetto al sottogruppo $\{1,-1\}$ se $\frac{x}{x'} = 1$, cioé $x = x'$, oppure $\frac{x}{x'} = -1$, cioé $x = -x'$. Ogni numero positivo x individua quindi il laterale $\{x,-x\}$ e due numeri positivi distinti individuano laterali distinti. Gli elementi del gruppo quoziente $(\mathbb{R}^*,\cdot)/\{1,-1\}$ sono quindi in corrispondenza biunivoca con i numeri reali positivi.
Invece, rispetto al sottogruppo $(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$, due elementi di $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ x e x' individuano lo stesso laterale se $\frac{x}{x'} \in \mathbb{R}_{>0}$, cioé se hanno lo stesso segno. Così $(\mathbb{R}^*,\cdot)/(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ è costituito da due soli elementi: $\mathbb{R}^+$ ed $\mathbb{R}^-$.

Esercizio 4.
Sia G un gruppo di ordine $o(G) = 2p^2$, con $p \neq 2$ primo. Provare che:

a) Se H è un sottogruppo normale proprio di G con $o(H) \neq p$, allora G/H è abeliano;

b) Se $o(H) = p$ e G/H è abeliano, allora G/H è ciclico;

c) Se G' è un gruppo con $o(G') = 2p$, allora per ogni omomorfismo suriettivo $\varphi : G \longrightarrow G'$, $Ker\varphi$ risulta ciclico;

d) Nel caso particolare $G = (\mathbb{Z}_{50},+)$ e $G' = (\mathbb{Z}_{10},+)$, trovare gli omomorfismi suriettivi da G su G' e determinarne il nucleo.

Esercizio 5.
Si immerga $\mathbb{Z}_p$ in un opportuno S_n tramite l'omomorfismo ϕ del teorema di Cayley. Determinare la struttura ciclica degli elementi di $\phi(\mathbb{Z}_p)$ e dire quali tra gli elementi di $\phi(\mathbb{Z}_p)$ sono coniugati in:

- $\phi(\mathbb{Z}_p)$;
- S_n.

Esercizio 6.
Sia G un gruppo e sia $x \in G$. Mostrare che:

i) L'insieme $C(x) := \{g \in G \mid gx = xg\}$ è un sottogruppo di G. Questo sottogruppo si chiama il *centralizzante* di x.

ii) $C(x)$ può non essere normale in G;

iii) $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C(x)$;

iv) $gxg^{-1} = hxh^{-1}$ se e soltanto se $gC(x) = hC(x)$. Dedurne che il numero dei coniugati distinti di x è $|G| \,/\, |C(x)|$.

Esercizio 7.
Sia G gruppo. Dimostrare che:

a) Due elementi coniugati di G hanno lo stesso ordine;

b) Se $a, b \in G$ sono elementi qualsiasi, allora ab e ba hanno lo stesso ordine;

c) Se a è l'unico elemento di un dato ordine in G, allora esso è di ordine 2 e sta nel centro.

Esercizio 8.
Mostrare che il gruppo degli automorfismi del gruppo di Klein è isomorfo a S_3