Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009
AL2 - Algebra 2: Gruppi, Anelli e Campi
Esercitazione 4 (21 novembre 2008)

Esercizio 1. Verificare che l'anello $2\mathbb{Z}_{12}$ non è unitario, ma il suo sottoanello $4\mathbb{Z}_{12}$ lo è.

Soluzione. $2\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$. Verifichiamo che nessuno degli elementi di $2\mathbb{Z}_{12}$ è un'unità. Chiaramente $\overline{0} \cdot \overline{x} = \overline{0}$ per ogni $\overline{x} \in 2\mathbb{Z}_{12}$; per gli altri elementi si ha:

$$\begin{aligned} &\overline{2} \cdot \overline{4} = \overline{8} \Rightarrow \overline{2},\ \overline{4} \text{ non sono unità;} \\ &\overline{6} \cdot \overline{8} = \overline{0} \Rightarrow \overline{6},\ \overline{8} \text{ non sono unità;} \\ &\overline{10} \cdot \overline{2} = \overline{8} \Rightarrow \overline{10} \text{ non è unità.} \end{aligned}$$

Sia ora $4\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$. Verifichiamo che $\overline{4}$ è l'unità di $4\mathbb{Z}_{12}$:

$$\begin{aligned} \overline{4} \cdot \overline{4} &= \overline{4}; \\ \overline{4} \cdot \overline{8} &= \overline{8}; \\ \overline{4} \cdot \overline{0} &= \overline{0}. \end{aligned}$$

Dunque $4\mathbb{Z}_{12}$ è unitario e la sua unità è $\overline{4}$.

Esercizio 2. Sia $d \in \mathbb{Z}$. Mostrare che l'insieme:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \left\{ a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un sottogruppo (abeliano) di $\mathbb{C}$, chiuso rispetto al prodotto e con unità.
Siano $x := a + \sqrt{d}b$ e $y := a' + \sqrt{d}b'$ due elementi di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Risulta:

$$\begin{aligned} x - y &= (a + \sqrt{d}b) - (a' + \sqrt{d}b') = (a - a') + \sqrt{d}(b - b') \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \\ x \cdot y &= (a + \sqrt{d}b) \cdot (a' + \sqrt{d}b') = (aa' - dbb') + \sqrt{d}(ab' + a'b) \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]. \end{aligned}$$

Inoltre $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ e $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.

Esercizio 3. Determinare il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i]$ e $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

Soluzione. Dal precedente esercizio sappiamo che $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un sottoanello del campo $\mathbb{C}$, quindi ogni elemento di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ha un inverso in $\mathbb{C}$. Gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ saranno tutti e soli gli $x = a + \sqrt{d}b \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tali che $x^{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (dove $x^{-1} \in \mathbb{C}$).
Denotiamo con $\overline{x}$ il coniugato di x. Allora:

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{a^2 - db^2}.$$

Sia $d=-1$, si verifica facilmente che $\frac{a}{a^2+b^2}$ e $\frac{b}{a^2+b^2}$ sono interi se e soltanto se $a=\pm 1$ e $b=0$ oppure $a=0$ e $b=\pm 1$. Gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i]$ sono quindi 4:

$$1,\ -1,\ i,\ -i.$$

Allo stesso modo si verifica che $\frac{a}{a^3+3b^2}$ e $\frac{b}{a^2+3b^2}$ sono entrambi interi se e solo se $a=\pm 1$ e $b=0$. Quindi gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ sono 1 e -1.

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbb{Z}[i]$ gli ideali $I := (1+3i)$ e $J := (3-3i)$. Determinare gli ideali $I+J$ e $I\cap J$.

Soluzione. Facciamo vedere che l'ideale $I+J$ è principale generato da $1+i$. Osserviamo che $(1+i)$ divide $(1+3i)$ e $(3-3i)$ in $\mathbb{Z}[i]$, più precisamente si ha:

- $(1+3i)=(2+i)(1+i)$;
- $(3-3i)=-3i(1+i)$.

Inoltre $(1+i)=(1+3i)(1-2i)+(-1-i)(3-3i)$ e dunque $(1+i)\in I+J$. Sia ora $x\in I+J$, facciamo vedere che $x=(\alpha+i\beta)(1+i)$ per qualche $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[i]$:

$$x=(a+ib)(1+3i)+(a'+ib')(3-3i)=(1+i)\left[(2+i)(a+ib)-3i(a'+ib')\right].$$

L'ideale $I\cap J$ è generato da $9-3i$ (verificare).

Esercizio 5. Sia S un insieme e $\mathcal{P}(S)$ il suo insieme delle parti. Sia $X\subseteq S$. Verificare che $\mathcal{P}(X)=X\mathcal{P}(S)$ è un ideale di $\mathcal{P}(S)$. (Si ricordi che $(\mathcal{P}(S),\Delta,\cap)$ è un anello commutativo e con unità S).

Soluzione. $\mathcal{P}(X)=\{A\,|\,A\subseteq X\}=\{B\cap X\,|\,B\subseteq S\}=X\mathcal{P}(S)$.
Il fatto che $(\mathcal{P}(X),\Delta)$ sia un sottogruppo abeliano di $(\mathcal{P}(S),\Delta)$ segue facilmente dalla definizione di Δ e si ha:

- Elemento neutro $\emptyset\in\mathcal{P}(X)$: $A\Delta\emptyset=(A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset)=A$ per ogni $A\in\mathcal{P}(X)$;
- Opposto di $A\in\mathcal{P}(X)$ è A stesso: $A\Delta A=(A\cup A)\setminus(A\cap A)=\emptyset$.

Dobbiamo far vedere che per ogni $B\in\mathcal{P}(S)$ si ha $B\mathcal{P}(X)\subseteq\mathcal{P}(X)$.
$B\mathcal{P}(X)=\{B\cap A;\,\forall A\in\mathcal{P}(X)\}$; ed essendo $B\cap A\subseteq X$ per ogni $A\in\mathcal{P}(X)$ si ha che $B\mathcal{P}(X)\subseteq\mathcal{P}(X)$.

Esercizio 6. Verificare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi di anelli e determinarne nucleo ed immagine.

(a) $\varphi:\mathbb{Z}[X]\to\mathbb{Z};\ f(X)\mapsto f(0)$;

(b) $\varphi:\mathbb{Z}[X]\to\mathbb{Z}_n;\ f(X)\mapsto\overline{f(0)}$;

(c) $\varphi:\mathbb{Z}[X]\to\mathbb{Z}_n[X];\ \sum a_iX^i\mapsto\sum\overline{a_i}X^i$;

(d) $\varphi:\mathbb{Q}[X]\to\mathbb{C};\ f(X)\mapsto f(i)$;

(e) $\varphi:\mathbb{Q}[X]\to\mathbb{R};\ f(X)\mapsto f(\sqrt[3]{2})$.

Soluzione. La verifica che si tratti in effetti di omomorfismi è semplice.

(a) $\ker\varphi=(X)$, $\mathrm{Im}\varphi=\mathbb{Z}$;

(b) $\ker \varphi = (n, X)$, $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{Z}_n$;

(c) $\ker \varphi = (n)$, $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{Z}_n[X]$;

(d) $\ker \varphi = (X^2 + 1)$, $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{C}$;

(e) $\ker \varphi = (X^3 - 2)$, $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}$