UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
AL2 - Algebra 2 - Gruppi, Anelli e Campi - A.A. 2008/2009
Appello X

MATRICOLA: ....
COGNOME: .... **NOME:** ....

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'utilizzo di libri e appunti.

ESERCIZIO 1. Siano H e K sottogruppi di un gruppo G tali che $|H| = 4$ e $|K| = 5$.
(a) (**2pt**) Dimostrare che $H \cap K = \{e\}$;
(b) (**3pt**) Determinare il minimo ordine n che deve avere G affinché esistano due tali sottogruppi H e K;
(c) (**3pt**) Costruire un esempio esplicito di un gruppo G di ordine minimo e descrivere esplicitamente H e K.

ESERCIZIO 2. Sia D_7 il gruppo delle isometrie dell'ettagono regolare.
(a) (**3pt**) Determinare tutti gli omomorfismi $\varphi : D_7 \to \mathbb{Z}_{14}$;
(b) (**2pt**) Determinare il nucleo e l'immagine di ognuno di tali omomorfismi.

ESERCIZIO 3.
Sia $I := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid f(\sqrt{2}) = 0,\ f(\sqrt{3}) = 0\}$.
(a) (**3pt**) Provare che I è un ideale di $\mathbb{R}[X]$ e stabilire se I è un ideale primo.
(b) (**3pt**) Si descrivano gli ideali massimali e gli ideali primi di $\mathbb{R}[X]$ che contengono I.

ESERCIZIO 4.
Si consideri l'applicazione

$$f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\ a + ib \mapsto (a + 3b + 5\mathbb{Z}; a + 2b + 5\mathbb{Z}).$$

(a) (**2pt**) Verificare che f è un omomorfismo di anelli e stabilire se f è suriettiva e/o iniettiva.
(b) (**2pt**) Applicare il Teorema di Omomorfismo per determinare il quoziente $\mathbb{Z}[i]/ker(f)$.
(c) (**2pt**) Trovare la controimmagine dell'elemento $(2, 1)$.

ESERCIZIO 5.
(a) (**3pt**) Determinare il MCD di $11 + 3i$ e $8 - i$ in $\mathbb{Z}[i]$.
(b) (**2pt**) Provare che se $d \leq -3$ è un numero intero privo di fattori quadratici, allora 2 è irriducibile in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.