UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
AL2 - Algebra 2 - Gruppi, Anelli e Campi - A.A. 2008/2009

Appello C - 8 luglio 2009

MATRICOLA: ....
COGNOME: .... **NOME:** ....

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'utilizzo di libri e appunti.

ESERCIZIO 1. Sia p un numero primo diverso da 2 e sia

$$H := \{a \in \mathbb{Z}_p^* \mid \exists\, x \in \mathbb{Z}_p^*,\, x^2 = a\}.$$

(a) (**2pt**) Mostrare che H è sottogruppo di $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$.
(b) (**3pt**) Provare che l'applicazione $\phi : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Z}_p^*$ definita da $\phi(x) = x^2$ è un omomorfismo e determinarne il nucleo e l'immagine.
(c) (**2pt**) Determinare l'indice $i_G(H)$ di H in G e l'ordine di H.
(d) (**4pt**) Dimostrare che se $h \notin H$ e $k \notin H$ allora $hk \in H$.

ESERCIZIO 2.
Nel gruppo simmetrico S_5, si considerino le permutazioni

$$\sigma_1 = (1,2,3,4),\ \sigma_2 = (1,2)(3,4,5),\ \sigma_3 = (1,5,2)(1,3,4,2),\ \sigma_4 = (1,3)(1,4)(1,2).$$

(a) (**2pt**) Individuare, tra le quattro permutazioni, eventuali coppie di elementi coniugati e, per tali coppie, scrivere esplicitamente la relazione di coniugio $\sigma_j = \tau^{-1}\sigma_i\tau$.
(b) (**2pt**) Quante sono le permutazioni di S_5 coniugate a σ_1?

ESERCIZIO 3.
Sull'insieme $A := \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ si definiscano le seguenti operazioni:

$$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b')$$
$$(a,b) \cdot (a',b') := (aa', ab' + ba'),$$

per ogni $(a,b), (a',b') \in A$. Si assuma che sia già noto che $(A, +, \cdot)$ sia un anello.
(a) (**2pt**) Stabilire se A è un dominio e/o un campo e determinare esplicitamente l'unità moltiplicativa.
(b) (**2pt**) Descrivere il gruppo degli elementi invertibili di A.
(c) (**3pt**) Verificare che l'insieme $\mathfrak{p} := \{(0,1), (0,2), (0,0)\}$ è un ideale di A e stabilire se esso è un ideale primo. Descrivere, a meno di isomorfismi, $A/\mathfrak{p}$.

ESERCIZIO 4. Sia dato il polinomio $f(X) := X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$. Sia

$$A := \frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(f(X))}$$

(a) (**3pt**) Descrivere gli elementi di A e stabilire se A è un dominio e/o un campo.
(b) Sia $\alpha := X + (f(X))$.
(**2pt**) Verificare se gli elementi $\alpha, 2\alpha + 1 \in A$ sono invertibili in A ed in caso affermativo calcolarne:

- (b_1) (**2pt**) l'ordine nel gruppo degli invertibili di A;
- (b_2) (**1pt**) l'inverso aritmetico.