Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

AL210: Tutorato 9

A.A. 2011-2012 – Docente: Prof.ssa F. Tartarone

Mirko Moscatelli – Giorgio Scattareggia

5.12.2011

1. Sia $I := (2+i) \subseteq \mathbb{Z}[i]$:
   - stabilire se I è un ideale massimale;
   - determinare l'inverso di $(1+i)+I$ in $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{I}$.

2. Si scelgano in $\mathbb{Z}[i]$ gli elementi

   $\alpha := 13+5i$ e $\beta := 8+9i$.

   Posto $I := (\alpha)$ e $J := (\beta)$,
   - si determini una fattorizzazione di α ed una di β;
   - si stabilisca se gli anelli $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{I}$ e $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{J}$ sono domini;
   - si calcoli il $\mathrm{MCD}(\alpha,\beta)$;
   - si scrivano esplicitamente gli ideali $I \cap J$ e $I+J$;
   - si dica se α è invertibile in $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{J}$ ed, in caso affermativo, se ne calcoli l'inverso.

3. Sia D un dominio a ideali principali e sia $p \in D$ un elemento irriducibile. Mostrare che ogni elemento $a \in D \setminus \{0\}$ si può scrivere nella forma

   $a = px + b$,

   con $x, b \in D$ che rispettino una delle seguenti condizioni:
   - $x \neq 0$ e $b = 0$, oppure
   - p non divide b.

4. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ non è un U.F.D. né un M.C.D. dominio.

   Suggerimento: si mostri che gli elementi 6 e $2(1+\sqrt{-5})$ non hanno M.C.D. .

5. Sia $\mathbb{Z}[i] := \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$; per definizione

   $|\cdot| : \mathbb{Z}[i]^* \to \mathbb{N}$, $|a+ib| := a^2+b^2$,

   è la norma complessa su $\mathbb{Z}[i]$. Dimostrare che:
   - $\mathbb{Z}[i]$ è isomorfo a $\dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2+1)}$;
   - $\mathbb{Z}[i]$ è un dominio euclideo (basta verificare che $|\cdot|$ è una norma euclidea).