**Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica**

# AL210: Tutorato 8

**A.A. 2011-2012 – Docente: Prof.ssa F. Tartarone**

*Mirko Moscatelli – Giorgio Scattareggia*

**28.11.2011**

1. Mostrare che

   $$\beta := \sqrt{3+2\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

   Verificare, inoltre, se $\beta$ è invertibile, riducibile, irriducibile o primo.

   Nota: il primo punto dell'esercizio è tratto dal libro di testo "Nuovi elementi di matematica per il biennio del liceo scientifico".

2. Sia $A := \left\{\frac{n}{2^\alpha} \,|\, n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{N}\right\}$. Dopo aver verificato che $A$ è un anello, dimostrare che il suo campo dei quozienti è $\mathbb{Q}$[†].

3. Siano $D$ un dominio a fattorizzazione unica ed $\alpha \in D$ un elemento non nullo e non invertibile. Supponendo che

   $$\alpha = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$$

   sia la fattorizzazione in primi di $\alpha$, si dimostri che l'anello quoziente $A := \frac{D}{(\alpha)}$ ammette elementi nilpotenti non banali (i.e. $\mathrm{Nil}(A) \neq (0)$) se e solo se esiste $i \in \{1, \ldots, s\}$ tale che $e_i \geq 2$ [‡].

4. Sia

   $$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,|\, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

   - Si dimostri che $A$ è un sottoanello di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$[§].
   - Dato $n \geq 2$, sia

     $$I := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,|\, a, b, c \in n\mathbb{Z} \right\}:$$

     mostrare che $I$ è un ideale bilatero di $A$. Verificare, inoltre, che non esiste alcun omomorfismo di anelli $\varphi : A \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ il cui nucleo sia $I$.

5. Si consideri l'ideale $(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$: si dica se $(X)$ è un ideale primo o massimale. Si dimostri, inoltre, che

   - $(X)$ è un ideale primo di $A[X]$ se e solo se $A$ è un dominio,
   - $(X)$ è un ideale massimale di $A[X]$ se e solo se $A$ è un campo.

   Suggerimento: sfruttare l'omomorfismo di anelli $\varphi : A[X] \to A$, $f(X) \mapsto f(0)$.

---

[†] Esercizio tratto dal testo di esonero dell'anno accademico 2009/2010.

[‡] Questo esercizio è una generalizzazione del p.to 4 nel tutorato 6.

[§] L'anello delle matrici quadrate $2 \times 2$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$.