Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

AL210: Tutorato 7

A.A. 2011-2012 – Docente: Prof.ssa F. Tartarone

Mirko Moscatelli – Giorgio Scattareggia

21.11.2011

1. Sia $\langle \sqrt[3]{2} \rangle \subseteq \mathbb{C}$ il più piccolo sottoanello di $\mathbb{C}$ che contiene $\sqrt[3]{2}$. Darne una descrizione esplicita.

2. Sia $A = \left\{ \frac{m}{10^t} \in \mathbb{Q} \,|\, m, t \in \mathbb{Z},\, t \geq 0 \right\}$.

   - Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.
   - Determinare gli elementi invertibili di A.
   - Se I è un ideale di A provare che $I \cap \mathbb{Z}$ è un ideale di $\mathbb{Z}$.
   - Provare che se $I \neq J$ sono ideali di A allora $I \cap \mathbb{Z} \neq J \cap \mathbb{Z}$.
   - Provare che se I è primo o massimale allora $I \cap \mathbb{Z}$ è primo o massimale.
   - Provare che per ogni $p \neq 2, 5$, con p primo, $(p) = pA$ è un ideale massimale in A e $(p) \cap \mathbb{Z}$ è un ideale primo di $\mathbb{Z}$.

3. Siano $A := \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_5$ e $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ l'applicazione definita da $\varphi(x) = ([x]_7, [x]_5)$. Dimostrare che φ è un omomorfismo di anelli, descriverne il nucleo e l'immagine e verificare se φ è iniettivo o suriettivo. Dimostrare, inoltre, che gli unici ideali primi di A sono

   $$P := [0]_7 \times \mathbb{Z}_5 \text{ e } Q := \mathbb{Z}_7 \times [0]_5.$$

   Determinare $\varphi^{-1}(P)$ e $\varphi^{-1}(Q)$ e verificare se sono ideali primi di $\mathbb{Z}$. Descrivere, infine, $\varphi^{-1}(([5]_7, [2]_5))$.

4. Siano A un anello commutativo unitario, I un ideale di A, $B := \frac{A}{I}$ e $\pi : A \to B$, $a \mapsto a + I$, la proiezione canonica. Dimostrare che:

   - π è un ben definito omomorfismo suriettivo di anelli;
   - $\forall J$ ideale di A, $\pi(J) = \dfrac{J+I}{I}$ è un ideale di B;
   - $\forall \bar{J}$ ideale di B, $\pi^{-1}\left(\bar{J}\right)$ è un ideale di A che contiene I;
   - esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali di B e gli ideali di A che contengono I;
   - B è un campo se e solo se $I \in \mathrm{Max}(A)$ (sfruttare il p.to precedente);
   - se M è l'unico ideale massimale di A, allora $A \setminus M = \mathcal{U}(A)$;
   - se P è un ideale primo di A contente I, allora $\pi(P)$ è un ideale primo di B;
   - se M è l'unico ideale di A che contiene I, allora B è locale (i.e. ha un unico ideale massimale).

5. Sia A un anello commutativo unitario; poniamo

$$\sqrt{I} := \{a \in A \,|\, a^k \in I, \, \exists k \in \mathbb{N}\}.$$

Mostrare che:

- $\sqrt{I}$ è un ideale di A;
- $I \subseteq \sqrt{I}$;
- $\pi(\sqrt{I}\,) = \mathrm{Nil}\left(\dfrac{A}{I}\right) := \left\{\text{elementi nilpotenti di } \dfrac{A}{I}\right\}.$