Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

AL210: Tutorato 6

A.A. 2011-2012 – Docente: Prof.ssa F. Tartarone

Mirko Moscatelli – Giorgio Scattareggia

14.11.2011

1. Siano I e J due ideali di un anello commutativo A. Dimostrare che:
   - IJ, $I+J$ e $I \cap J$ sono ideali di A;
   - $IJ \subseteq I \cap J$;
   - $(I \cup J) := \{\sum \alpha i + \beta j \,|\, \alpha, \beta \in A, i \in I, j \in J\}$ è un ideale;
   - $I + J = (I \cup J)$;
   - se $I + J = A$ allora $IJ = I \cap J$.

2. Si considerino in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gli insiemi $n\mathbb{Z} := (n) = \{nz \,|\, z \in \mathbb{Z}\}$:
   - dimostrare che $n\mathbb{Z}$ è un ideale $\forall n \in \mathbb{Z}$ e che $(n) = (-n)$;
   - determinare $(14) \cap (4), (2) \cap (7), (2) + (4), (2) + (7), (2)(7), (7) + (4)$.

3. Un elemento a di un anello si dice “idempotente” se $a^2 = a$. Siano R un anello commutativo unitario ed $a \in R$. Mostrare che:
   - se a è nilpotente, allora a è uno zero-divisore;
   - se a è idempotente, allora $1 - a$ è idempotente;
   - se a è idempotente e $a \neq 1$, allora a è uno zero-divisore;
   - se $a \neq 0$ e a è nilpotente, allora a non è idempotente;
   - se a è uno zero-divisore, allora ab è uno zero-divisore $\forall b \in R$;
   - se a, b sono nilpotenti, allora $a + b$ è nilpotente;
   - se a è nilpotente, allora ab è nilpotente, per ogni $b \in R$;
   - se $u \in R$ è invertibile e a è nilpotente, allora $u + ab$ è invertibile, per ogni $b \in R$.

   Dedurne che:
   - $\mathrm{Nil}(R) := \{$elementi nilpotenti di $R\}$ è un ideale;
   - $\mathrm{Z}(R) := \{$zerodivisori di $R\}$ non è un ideale.

4. Sia $n \geq 2$ e $n = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$ la sua fattorizzazione in numeri primi. Mostrare che $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ è nilpotente se e soltanto se $p_1 \dots p_s$ divide a.

5. Si considerino in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gli insiemi $(3) := \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$, $(7) := \{7h \mid h \in \mathbb{Z}\}$, $(9) := \{9l \mid l \in \mathbb{Z}\}$, $(21) := \{21f \mid f \in \mathbb{Z}\}$.

   - Verificare se gli insiemi descritti sono ideali di $\mathbb{Z}$.
   - Stabilire quali di essi sono ideali primi.
   - Stabilire quali di essi sono ideali massimali.
   - Determinare $(21) \cap (9)$, $(3) \cap (7)$, $(3) + (9)$, $(3) + (7)$.
   - Descrivere i relativi quozienti determinandone le proprietà: dire se sono domini, campi o se contengono divisori dello zero.
   - Calcolare la caratteristica di ogni anello quoziente e descriverne gli ideali.