Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

AL210: Tutorato 4

A.A. 2011-2012 – Docente: Prof.ssa F. Tartarone

Mirko Moscatelli – Giorgio Scattareggia

24.10.2011

1. Siano $(G, \cdot)$ un gruppo e $g \in G$ un suo elemento:
   - supponendo che g sia l'unico elemento di ordine n in G, mostrare che $g = 1$ oppure g è un'involuzione (i.e. $o(g) = 2$);
   - se G ha ordine pari, mostrare che vi sono un numero dispari di involuzioni in G.

2. Siano G un gruppo ed $H \leq G$. Il sottoinsieme di G, definito da
$$N(H) := \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\} \ ,$$
si dice "il normalizzante di H in G". Dimostrare che:
   - $N(H)$ è un sottogruppo di G;
   - $H \trianglelefteq N(H)$;
   - se $H \trianglelefteq K$, per qualche $K \leq G$, allora $K \subseteq N(H)$ (i.e. $N(H)$ è il più grande sottogruppo di G in cui H è normale).

3. Siano G un gruppo, $N, N_1 \trianglelefteq G$, $H \leq G$. Mostrare che:
   - $N \cap N_1 \trianglelefteq G$;
   - $NH = HN$ e, quindi, $NH \leq G$;
   - $NN_1 \trianglelefteq G$.

4. Sia G un gruppo e sia $\varphi : G \to G$ l'applicazione che manda ogni elemento nel suo inverso. Mostrare che
   - φ è biiettiva;
   - φ è un automorfismo se e solo se G è commutativo.

5. Sia G un gruppo ciclico con 20 elementi e sia $\varphi : G \to G \ , \ g \mapsto g^7$. Mostrare che $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ e calcolarne l'ordine (in $\mathrm{Aut}(G)$)†.

6. Siano $G = GL_3(\mathbb{F}_3)$ ed
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}.$$
Mostrare che H è sottogruppo di G, determinarne il numero degli elementi e calcolare $Z(H)^\dagger$.

†Esercizio tratto dal I esonero di AL2, anno accademico 2009/2010.

7. Siano date in S_9 le seguenti permutazioni:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 7 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

- Verificare che σ e τ sono coniugate in S_9.
- Trovare, se esistono, una permutazione pari ed una dispari che coniughino σ in τ.
- Stabilire se il sottogruppo ciclico generato da σ è normale in S_9[‡].

[‡]Esercizio tratto dal compito di recupero del I esonero di AL2, anno accademico 2008/2009.