Università degli Studi Roma Tre – Corso di Laurea in Matematica

AL210: Tutorato 3

A.A. 2011-2012 – Docente: Prof.ssa F. Tartarone

Mirko Moscatelli – Giorgio Scattareggia

17.10.2011

1. Sia $f_n : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, definita da $f_n(x) = nx$. Verificare che f_n è un omomorfismo di gruppi e determinarne il nucleo e l'immagine.

2. Mostrare che l'applicazione $\mathrm{Re} : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, definita da $\mathrm{Re}(a+ib) = a$, è un omomorfismo di gruppi; determinarne il nucleo N e l'immagine H. Infine, applicando il primo teorema di omomorfismo, definire l'isomorfismo canonico da essa indotto.

3. Sia $f : \mathbb{Z}_{30} \to G$ un omomorfismo, dove G è un gruppo di ordine 5. Determinare il nucleo di f.

4. Dire se le seguenti applicazioni da $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ in sé sono endomorfismi ed, in caso affermativo, verificare se sono anche automorfismi:

   - $f(a+ib) = a - ib$;
   - $g(a+ib) = a^2 + b^2$;
   - $h(a+ib) = \dfrac{a+ib}{a^2+b^2}$.

5. Determinare tutti gli omomorfismi suriettivi da $\mathbb{Z}_{50}$ in $\mathbb{Z}_{20}$.

6. Sia G un gruppo finito e sia $X := \mathcal{P}(G) \setminus \{\varnothing\}$. Verificare che G agisce su X mediante l'operazione

   $$g.S = gS \quad \forall g \in G\,,\, \forall S \in X.$$

   Se $H \leq G$ è un sottogruppo, descrivere lo stabilizzatore di H e l'orbita di H.

   Infine, sfruttare la relazione che lega la cardinalità dell'orbita, dello stabilizzatore e del gruppo per ottenere una dimostrazione alternativa del teorema di Lagrange.

7. Si è visto nel precedente tutorato che $V = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$ è un sottogruppo normale di A_4; in realtà, si può mostrare che $V \trianglelefteq S_4$[1]. Si descriva il gruppo quoziente S_4/V, determinandone esplicitamente tutti i sottogruppi, e si dica se esiste $n \geq 1$ tale che $S_4/V \cong S_n$.

---

[1]La normalità di V in S_4 si può verificare a mano, tuttavia, a chi vorrà dedicarsi in seguito alla teoria dei gruppi potrebbe interessare che "gli automorfismi di S_4 sono tutti interni" [A. Machì, 2.28, 2.88] e, dunque, in base al precedente tutorato, V è un sgr. caratteristico di A_4 [A. Machì, 1.62]: da quest'ultima osservazione segue abbastanza facilmente che $V \trianglelefteq S_4$ [A. Machì, pag. 64].