Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Soluzioni I Esonero

Esercizio 1. Sia n un intero positivo. Provare che se H è l'unico sottogruppo di G di ordine n allora H è normale in G.

Soluzione: Un sottogruppo H di G è normale se e solo se per ogni $g \in G$, $gHg^{-1} = H$, ovvero H coincide con ogni suo coniugato. È sufficiente fare vedere che i coniugati di H sono sottogruppi di G che hanno lo stesso ordine di H e dall'unicità dell'ordine di H seguirà la tesi.

Sia $g \in G$, $e_G = ge_Gg^{-1} \in gHg^{-1}$ perché $e_G \in H$. Se $h_1, h_2 \in gHg^{-1}$, allora $h_1 = gk_1g^{-1}$ e $h_2 = gk_2g^{-1}$ per qualche $k_1, k_2 \in H$. Ne segue che:

$$h_1h_2 = (gk_1g^{-1})(gk_2g^{-1}) = gk_1(g^{-1}g)k_2g^{-1} = gk_1k_2g^{-1} \in gHg^{-1}.$$

Inoltre $h_1^{-1} = (gk_1g^{-1})^{-1} = gk_1^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$.

Resta da far vedere che $|gHg^{-1}| = |H|$, ovvero che $gk_1g^{-1} = gk_2g^{-1}$ se e solo se $k_1 = k_2$:

$$gk_1g^{-1} = gk_2g^{-1} \Leftrightarrow g^{-1}gk_1g^{-1} = g^{-1}gk_2g^{-1} \Leftrightarrow k_1g^{-1} = k_2g^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k_1g^{-1}g = k_2g^{-1}g \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1234)(1526)(1738) \in S_8$.

(a) (2 pt) Quale è la struttura dei cicli di σ e di σ^3 ?

(b) (2 pt) Esiste qualche potenza σ^k, con $k \in \mathbb{Z}$ e $\sigma^k \neq \sigma$, coniugata (in S_8) con σ?

(c) (2 pt) Quanti sono gli elementi coniugati di σ^3?

(d) (2 pt) Esiste un omomorfismo $\phi : S_8 \to S_8$ che abbia come nucleo il sottogruppo generato da σ^3?

Soluzione:

(a) $\sigma = (1, 7, 4)(2, 6)(3, 8, 5)$ e $\sigma^3 = (2, 6)$.

(b) Poiché $\sigma^6 = id$, essendo $6 = \text{ord}(\sigma) = \text{MCD}(3, 2)$, allora $\sigma^5 = \sigma^{-1}$. Ma σ e σ^{-1} sono coniugati, quindi hanno la stessa struttura ciclica. La potenza cercata è, ad esempio, $k = 5$.

(c) Gli elementi coniugati con σ^3 sono tanti quanti sono gli elementi di S_8 che hanno la stessa struttura ciclica di σ^3. In tal caso sono tutte le trasposizioni, cioè $28 = \binom{8}{2}$.

(d) Il sottogruppo generato da σ^3 è $\{id, (2,6)\}$ e si vede facilmente che non è normale in S_8, quindi non può essere il nucleo di alcun omomorfismo.

Esercizio 3. Sia G il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$. Esistono due interi $a; b > 1$ tali che $G \cong \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$?

Soluzione: Il gruppo $U(\mathbb{Z}_{16})$ ha $\varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8$ elementi. Esplicitamente tali elementi sono $\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}\}$.

Innanzitutto verifichiamo se $U(\mathbb{Z}_{16})$ è ciclico. Si ha:

$$\begin{aligned}
< \overline{3} > &= \{\overline{3}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{1}\} \supset < \overline{9} >, < \overline{11} > \\
< \overline{5} > &= \{\overline{5}, \overline{9}, \overline{13}, \overline{1}\} \supset < \overline{9} >, < \overline{13} > \\
< \overline{7} > &= \{\overline{7}, \overline{1}\} \\
< \overline{15} > &= \{\overline{15}, \overline{1}\}.
\end{aligned}$$

Quindi $U(\mathbb{Z}_{16})$ non è ciclico.

I sottogruppi $< \overline{3} > \cong \mathbb{Z}_4$ e $< \overline{7} > \cong \mathbb{Z}_2$ sono certamente normali in $U(\mathbb{Z}_{16})$ che è abeliano, inoltre la loro intersezione è $\{\overline{1}\}$. Facciamo vedere che ogni elemento $x \in U(\mathbb{Z}_{16})$ si scrive come $a \cdot b$ con $a \in < \overline{3} >$ e $b \in < \overline{7} >$. Questo è certamente vero per tutti gli elementi di $< \overline{3} >$ e per quelli di $< \overline{7} >$, inoltre:

$$\overline{5} = \overline{3} \cdot \overline{7}, \ \overline{15} = \overline{9} \cdot \overline{7}, \ \overline{13} = \overline{11} \cdot \overline{7}.$$

Quindi $U(\mathbb{Z}_{16}) \cong < \overline{7} > \times < \overline{3} > \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

È bene notare che si perviene alla stessa conclusione per una qualsiasi coppia di copie isomorfe a $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_4$ in $U(\mathbb{Z}_{16})$ purché non si scelga la copia di $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_4$.

Esercizio 4. Sia data l'applicazione

$$\phi : (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +); \quad (n, m) \mapsto 2n + 3m.$$

(a) (2 pt)Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di gruppi.

(b) (3 pt) Descrivere il nucleo e l'immagine di ϕ e dare una rappresentazione di $Im(\phi)$ tramite il Teorema Fondamentale di Omomorfismo di gruppi.

Soluzione:

(a) Basta dimostrare che presi comunque $(n, m), (n', m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, allora $\phi((n, m) + (n', m')) = \phi((n, m)) + \phi((n', m'))$. Questo si verifica svolgendo i calcoli:

$$\phi((n, m) + (n', m')) = \phi((n + n', m + m')) = 2(n + n') + 3(m + m') =$$

$$2n + 2n' + 3m + 3m' = (2n + 3m) + (2n' + 3m') = \phi((n, m)) + \phi((n', m'))$$

- $Im(\phi) = \{2n+3m : n, m \in Z\}$, ma esistono $n', m' \in \mathbb{Z}$ tali che $2n'+3m' = 1$ (Identità di Bezout), quindi $1 \in Im(\phi)$. Ma allora $Im(\phi) = \mathbb{Z}$ perché ne contiene un generatore.

  $ker(\phi) = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 2n + 3m = 0\} = \{(3k, -2k); k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

  Per il Teorema Fondamentale di Omomorfismo dei gruppi abbiamo che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \ker(\phi) \cong \mathbb{Z}$.

Esercizio 5. (a) (2 pt) Dire quali sono i generatori di $\mathbb{Z}_{36}$ e descrivere i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{36}$.

(b) (3 pt) Dire quanti sono gli omomorfismi da $\mathbb{Z}_{36}$ a $\mathbb{Z}_{18}$, dire quanti sono gli omomorfismi iniettivi, suriettivi e descriverne esplicitamente uno non nullo.

Soluzione:

(a) (2 pt) I generatori di $\mathbb{Z}_{36}$ sono tutte le classi rappresentate da interi n che sono coprimi con 36. I sottogruppi di $\mathbb{Z}_{36}$ sono tutti ciclici e sono $< 1 >= \mathbb{Z}_{36}$, $< 2 >$, $< 3 >$, $< 4 >$, $< 6 >$, $< 9 >$, $< 12 >$, $< 18 >$.

(b) Gli omomorfismi da $\mathbb{Z}_{36}$ a $\mathbb{Z}_{18}$ sono pari al $\mathrm{MCD}(36, 18) = 18$. , Non esistono omomorfismi iniettivi perché $36 \nmid 18$. Esistono $\varphi(18) = 6$ omomorfismi suriettivi perché $18 \mid 36$.

Esercizio 6. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia $P(G)$ l'insieme dei suoi sottogruppi. Sia data l'applicazione:

$$\star : G \times P(G) \to P(G), \quad (g, H) \mapsto gHg^{-1}.$$

(a) (1 pt) Dimostrare che $\star$ è un'azione di G su $P(G)$.

(b) (2 pt) Dimostrare che H è normale in G se e solo se $St_H = G$.

(c) (2 pt) Nel caso particolare in cui $G = D_4$, si consideri il sottogruppo $H := \{\mathrm{id}, (14)(23)\}$. Descrivere lo stabilizzatore e l'orbita di H.

Soluzione:

(a) Per ogni $H \in P(G)$ si ha: $e_G H e_G^{-1} = e_G H e_G = H$. Siano $g, h \in G$, allora:

$$g \star (h \star H) = g \star (hHh^{-1}) = g(hHh^{-1})g^{-1} = (gh)H(gh)^{-1} = (gh) \star H,$$

dunque $\star$ è un'azione.

(b) Per come è definita l'azione $\star$, $gHg^{-1} = g \star H$, quindi $gHg^{-1} = H = g \star H$ per ogni $g \in G$ se e solo se $g \in \mathrm{St}_H$ per ogni $g \in G$, ovvero se e solo se $\mathrm{St}_H = G$. (Più in particolare è bene notare che lo stabilizzatore di $H \in P(G)$ coincide con il normalizzante di H in G, $N_G(H)$).

(c) Il sottogruppo $H = \{\mathrm{id}, (14)(23)\} \subset V_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$. Il sottogruppo H è banalmente normale in V_4 che è abeliano, mentre non è normale in D_4, infatti $(1234)(14)(23)(1432) = (12)(34) \notin H$. Dunque $\mathrm{St}_H = V_4$.

Necessariamente $|O(H)| = [D_4 : V_4] = 2$ e utilizzando quanto calcolato sopra si conclude che $O(H) = \{H, \{\mathrm{id}, (12)(34)\}\}$.