UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
AL210 - Algebra 2 - Gruppi, Anelli e Campi - A.A. 2011/2012
II Esonero

MATRICOLA: ....
COGNOME: .... **NOME:** ....

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e giustificando tutte le affermazioni fatte. Non è consentito l'utilizzo di libri e appunti.

ESERCIZIO 1. Un elemento $x \neq 0$ contenuto in un anello A si dice nilpotente se esiste un intero $n > 1$ tale che $x^n = 0$. Se A è un anello commutativo e unitario,
(a) (1 pt) provare che se $x \in A$, l'elemento $1 + x$ è divisore di $1 - x^{2k}$, per qualsiasi intero $k \geq 0$.
(b) (2 pt) provare che se $b \in A$ è un elemento nilpotente, allora $1 + b$ è invertibile;
(c) (2 pt) provare che se $a \in A$ è un elemento invertibile e $b \in A$ è un elemento nilpotente, allora $a + b$ è invertibile.

ESERCIZIO 2. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'ideale $I := (5 + i, 1 + 3i)$.
(a) (3 pt) Stabilire se I è un ideale principale e, in tal caso, trovare un suo generatore.
(b) (2 pt) Stabilire se I è un ideale primo oppure no.

ESERCIZIO 3. Sia n un intero positivo e $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Sia data la seguente applicazione:

$$\varphi_n : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}_9, \quad a + b\sqrt{-5} \mapsto a + 5bn \pmod 9.$$

(a) (4 pt) Stabilire per quali $n (\bmod 9)$, φ_n è un omomorfismo di anelli.
(b) (2 pt) Scegliere un n per il quale φ_n è un omomorfismo di anelli e trovare il nucleo e l'immagine di tale φ_n.
(c) (5 pt) Utilizzando lo stesso n del punto (b), trovare la controimmagine $\varphi_n^{-1}(6\mathbb{Z}_9)$ e, utilizzando il Teorema Fondamentale di Omomorfismo, descrivere il quoziente $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\varphi_n^{-1}(6\mathbb{Z}_9)$.
Dire, infine, se $\varphi_n^{-1}(6\mathbb{Z}_9)$ è un ideale primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

ESERCIZIO 4. (4 pt) Sia dato il polinomio irriducibile $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$. Sia α una radice di $f(X)$ in una estensione di $\mathbb{Z}_3$. Costruire un campo di cardinalità 81, $\mathbb{F}_{81} = \mathbb{Z}_3(\alpha)$, e determinare l'inverso di α^2.

ESERCIZIO 5. Sia $I = \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid f(\sqrt{2}) = 0 \text{ e } f(\sqrt{3}) = 0\}$.
(a) (3 pt) Provare che I è ideale di $\mathbb{R}[X]$ e descrivere un suo sistema di generatori.
(b) (2 pt) Provare che I non è ideale primo.