

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012**  
**AL210 - Algebra 2**  
**Esercitazione 9 (25 Novembre 2011)**

**Esercizio 1.** Sia dato l'anello  $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ . Dimostrare che 3 è un elemento irriducibile di  $A$  che non è primo. Dedurne che  $A$  non è fattoriale.

**Esercizio 2.** Sia  $d \in \mathbb{Z}$ . Dimostrare che  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  è il campo dei quozienti di  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ .

**Esercizio 3.** Sia  $p$  un primo. Dimostrare che:

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\}$$

è un sottoanello di  $\mathbb{Q}$ . Dimostrare che  $\mathbb{Z}_{(p)}$  ha un unico ideale massimale, ovvero  $p\mathbb{Z}_{(p)}$ .

**Esercizio 4.** Sia  $A := \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ .

(a) Dato l'ideale  $I = (5)$ , descrivere  $A/I$ .

(b) Sia  $M := \{z \in A : 2 \mid N(z)\}$ . Stabilire se  $M$  è un ideale di  $A$  e, in caso affermativo, stabilire se è primo e/o massimale.