Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 8 (18 Novembre 2011)

Esercizio 1. Siano $S \neq \emptyset$ un insieme ed $(A, +, \cdot)$ un anello. Si definiscano sull'insieme:

$$A^S := \{f : S \longrightarrow A : f \text{ applicazione}\}$$

le operazioni di somma e prodotto puntuali:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \ (fg)(x) := f(x)g(x), \quad f, g \in A^S.$$

Si dimostri che:

(a) A^S con le operazioni sopra definite è un anello.

(b) Se A è unitario allora A^S è unitario.

(c) Se A è commutativo allora A^S è commutativo.

Fornire un esempio in cui A è un dominio d'integrità, ma A^S non è integro.

Esercizio 2. Sia A un anello unitario e sia $a \in U(A)$. Dimostrare che:

(a) L'applicazione $\varphi_a : A \to A$ definita da $\varphi_a(x) := a^{-1}xa$ è un omomorfismo di anelli.

(b) Per $a, b \in U(A)$ si ha $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ba}$.

(c) φ_a è un isomorfismo per ogni a.

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo unitario e I un ideale di A.

(a) Dimostrare che $\sqrt{I} := \{x \in A : x^n \in I, \exists\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ è un ideale di A, detto *radicale* di I.

(b) Dimostrare che se P è un ideale primo di A allora $\sqrt{P} = P$.

(c) Determinare $\sqrt{6\mathbb{Z}}$ e dedurne che il viceversa del punto (b) è falso.

(d) Dimostrare che se P è un ideale primo di A che contiene I, allora $P \supseteq \sqrt{I}$.

Esercizio 4. Siano A_1, A_2 anelli unitari e $f : A_1 \to A_2$ un omomorfismo. Dimostrare che se f è suriettivo, oppure $f(1) = 1$, allora $f(U(A_1)) \subseteq U(A_2)$ e trovare un esempio in cui tale contenimento è proprio.

Esercizio 5. Sia p un primo. Dimostrare che:

(a) $p\mathbb{Z}[X]$ ed $X\mathbb{Z}[X]$ sono ideali primi di $\mathbb{Z}[X]$.

(b) (p, X) è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[X]$.