Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 5 (21 Ottobre 2011)

Esercizio 1. Utilizzando l'azione per coniugio dimostrare che se $n \geq 3$, allora $Z(S_n) = \{\text{id}\}$.

Soluzione: Dato un gruppo G e l'azione per coniugio di G sul suo insieme supporto, $g \in Z(G)$ se e solo se $\text{St}_g = G$. Inoltre due elementi σ, $\tau \in S_n$ sono coniugati se e solo se hanno la stessa struttura ciclica. Se $n \geq 3$ e $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq \text{id}$ esiste sempre $\tau \neq \sigma$ che ha la stessa struttura ciclica di σ ed è dunque coniugata a σ. Senza perdere di generalità è sufficiente far vedere che dato comunque un ciclo γ, esiste un ciclo $\gamma' \neq \gamma$ coniugato con γ. Siano $a, b, c \in X$, con $S_n = S(X)$, allora $\gamma = (ab) \sim \gamma' = (ac)$ e per un qualsiasi ciclo di lunghezza $3 \leq k \leq n$, si ha $\gamma = (\dots abc \dots) \sim (\dots acb \dots) = \gamma'$.

Esercizio 2. Sia data l'azione per coniugio del gruppo Q_8 delle unità dei quaternioni sul suo insieme supporto.

(a) Descrivere l'orbita e lo stabilizzatore di ogni elemento di Q_8.

(b) Stabilire quanti elementi ha il centro $Z(Q_8)$ e determinarli esplicitamente.

(c) Dimostrare che tutti i sottogruppi di Q_8 sono normali in Q_8.

Soluzione:

(a) Date le regole di moltiplicazione per le unità dei quaternioni si ha:

$$\mathcal{O}(\pm i) = \{\pm i\},\ \mathcal{O}(\pm j) = \{\pm j\},\ \mathcal{O}(\pm k) = \{\pm k\},\ \mathcal{O}(1) = \{1\},\ \mathcal{O}(-1) = \{-1\}.$$

Ed i rispettivi stabilizzatori:

$$\text{St}_i =< i >= \text{St}_{-i},\ \text{St}_j =< j >= \text{St}_{-j},\ \text{St}_k =< k >= \text{St}_{-k}, \text{St}_1 = Q_8 = \text{St}_{-1}.$$

(b) Dallo studio degli stabilizzatori segue che $Z(Q_8) = \{1, -1\}$.

(c) Non è difficile verificare che tutti e soli i sottogruppi di Q_8 sono $< i >, < j >, < k >, \{1, -1\}, \{1\}, Q_8$. I sottogruppi ciclici di ordine 4 hanno indice 2 in Q_8 e sono quindi normali, invece il sottogruppo $\{1, -1\} = Z(Q_8)$ ed è quindi anch'esso normale. I restanti due sottogruppi sono quelli banali.

Esercizio 3. Dato il sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : ad \neq 0 \right\},$$

si consideri l'applicazione:

$$\begin{array}{rcl} \star : H \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (A,(x,y)) & \longmapsto & A \star (x,y) := A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Dimostrare che $\star$ è un'azione (*azione naturale*) e determinare l'orbita dei seguenti elementi:

$$(0,0), (1,0), (-1,1).$$

Soluzione: Non è difficile dimostrare che $\star$ è un'azione, infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

quindi $e_G \star x = x$ per ogni $x \in X$. Inoltre:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} abx \\ cdy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & cd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda le orbite richieste si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}((0,0)) &= \{A \star (0,0) : A \in H\} = \{(0,0)\}, \\ \mathcal{O}((1,0)) &= \{A \star (1,0) : A \in H\} = \mathbb{R}^* \times \{0\}, \\ \mathcal{O}((-1,1)) &= \{A \star (-1,1) : A \in H\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia G un gruppo abeliano e H, K sottogruppi di G. Sia $\psi : H \times K \to HK$, $(x,y) \mapsto xy$. Dimostrare che:

(a) ψ è un omomorfismo di gruppi.

(b) ψ è iniettivo se e solo se $H \cap K = \{e_G\}$.

(c) Il prodotto $H \times K$ è diretto se e solo se ψ è un isomorfismo.

Soluzione:

(a) Poiché G è abeliano, H è un sottogruppo normale di G (così come lo è anche K), dunque $HK = KH$ è un sottogruppo di G. Facciamo vedere che ψ è un omomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi((x,y)\cdot(u,v)) &= \psi((xu,yv)) = (xu)(yv) = x(uy)v \overset{(\bullet)}{=} x(yu)v = \\ &= (xy)(uv) = \psi((x,y))\psi((u,v)), \end{aligned}$$

dove in $(\bullet)$ si è usato il fatto che G è abeliano.

(b) Denotiamo $1 := e_G$ e facciamo vedere che $\ker\psi = \{(1,1)\}$ se e solo se $H \cap K = \{1\}$. Innanzitutto si ha che $(x,y) \in \ker\psi$ se e solo se $xy = 1$, se e solo se $y = x^{-1}$. La conclusione segue osservando che la coppia $(x,x^{-1}) \in H \times K$ se e solo se $x \in H \cap K$.

(c) Affinché il prodotto sia diretto si deve avere che $H \cap K = \{e_G\}$, che è vero se e solo se ψ è iniettivo, e $H \times K = HK$, che è vero se e solo se ψ è biiettivo, dunue un isomorfismo. Il fatto che H e K siano normali in G è già stato osservato sopra e segue direttamente dall'abelianità di G.

Esercizio 5. Dimostrare che il gruppo $(\mathbb{R}^*, \cdot) = H \times K$, dove:

$$H := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \quad K := \{1, -1\}.$$

Soluzione: Il gruppo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ è abeliano dunque H e K sono certamente normali in $\mathbb{R}^*$. Inoltre, poiché $-1 \notin H$, si ha che $H \cap K = \{1\}$. Sia $x \in \mathbb{R}^*$ allora:

$$x = \begin{cases} |x| \cdot 1 & \text{se } x > 0 \\ |x| \cdot (-1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dunque, in ogni caso $x = u \cdot v$ con $u \in H$ e $v \in K$, ovvero $\mathbb{R}^* = HK$.

Esercizio 6. Sia G un gruppo abeliano e $\varphi : G \to G$ un omomorfismo. Dimostrare che se $\varphi \circ \varphi = \varphi$ allora $G = \ker \varphi \times \operatorname{Im} \varphi$.

Soluzione: Di nuovo, dal fatto che G è abeliano, si ha che $\operatorname{Im} \varphi$ è normale in G ($\ker \varphi$ è sempre normale). Facciamo vedere che $\ker \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi = \{e_G\}$. Sia $x \in \ker \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi$, allora $x = \varphi(y)$ per qualche $y \in G$, in quanto $x \in \operatorname{Im} \varphi$. Allora, utilizzando l'ipotesi che $\varphi \circ \varphi = \varphi$ si ha:

$$\varphi(x) = \varphi(\varphi(y)) = \varphi(y) = x.$$

Dunque, poiché $x \in \ker \varphi$, $e_G = \varphi(x) = x$, da cui $\ker \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi = \{e_G\}$.

Resta da dimostrare che $G = \ker \varphi \operatorname{Im} \varphi$, ovvero che per ogni elemento $g \in G$, $g = xy$ con $x \in \ker \varphi$ ed $y \in \operatorname{Im} \varphi$. Certamente $y := \varphi(g) \in \operatorname{Im} \varphi$, inoltre:

$$\varphi(y) = \varphi(\varphi(g)) = \varphi(g) \Rightarrow \varphi(gy^{-1}) = e_G \Rightarrow gy^{-1} \in \ker \varphi.$$

Quindi $g = (gy^{-1})y$.

Esercizio 7. Sia p un numero primo. Determinare il numero di sottogruppi di $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Soluzione: Siccome $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ha p^2 elementi, tutti i sottogruppi non banali di $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ hanno p elementi. Siano $H \neq K$ sottogruppi di $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, necessariamente $H \cap K = \{e_G\}$, in quanto l'intersezione di $H \cap K$ può avere solo 1, oppure p elementi, ma quest'ultimo caso è escluso perché $H \neq K$. Allora i sottogruppi di $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ sono tutti ciclici di ordine p e si intersecano a due a due nel sottogruppo banale $\{e_G\}$, ne segue che, se $\overline{H} := H \backslash \{e_G\}$ si ha una partizione (in <u>sottoinsiemi</u>, non sottogruppi):

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p = \bigcup \{\overline{H} : H \leq G\} \cup \{e_G\}.$$

Se il numero dei sottogruppi non banali di $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ è uguale a k:

$$p^2 = k(p-1) + 1 \Rightarrow k = \frac{p^2 - 1}{(p-1)} = p + 1.$$

Aggiungendo i 2 sottogruppi banali si ottengono $p + 3$ sottogruppi di $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.