

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
AL210 - Algebra 2
Esercitazione 12 (16 Dicembre 2011)

Esercizio 1. Costruire un campo con 25 elementi.

Esercizio 2. Sia dato il polinomio $f(X) = X^3 + X^2 + 3X + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$.

(a) Discutere la riducibilità di $f(X)$ in $\mathbb{Z}_7[X]$.

(b) Costruire $\mathbb{F}_{343} \cong \mathbb{Z}_7(\alpha)$.

(c) Determinare l'inverso di $2\alpha + 5 \in \mathbb{F}_{343}$.

Esercizio 3. Sia dato il polinomio $f(X) = 5X^3 + X^2 + X + 7 \in \mathbb{Z}_{11}[X]$.

(a) Descrivere $A := \mathbb{Z}_{11}[X]/(f(X))$ e stabilire se è un campo.

(b) Determinare tutti gli elementi invertibili e i divisori dello zero di A .

Esercizio 4. Siano dati i polinomi $f(X) = X^2 + 1$ e $g(X) = X^2 + 2X + 2$ in $\mathbb{Z}_3[X]$.

(a) Dimostrare che $f(X)$ e $g(X)$ sono irriducibili in $\mathbb{Z}_3[X]$.

(b) Determinare una radice di $g(X)$ in $\mathbb{Z}_3(\alpha) \cong \mathbb{Z}_3[X]/(f(X))$ e una radice di $f(X)$ in $\mathbb{Z}_3(\beta) \cong \mathbb{Z}_3[X]/(g(X))$.

(c) Costruire gli isomorfismi $\varphi : \mathbb{Z}_3(\alpha) \rightarrow \mathbb{Z}_3(\beta)$ e $\psi : \mathbb{Z}_3(\beta) \rightarrow \mathbb{Z}_3(\alpha)$.