

UC-NRLF



QB 531 065

EX LIBRIS





LEZIONI

SULLA

TEORIA GEOMETRICA DELLE EQUAZIONI

E DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE

DI

FEDERIGO ENRIQUES

PUBBLICATE PER CURA DEL DOTT. OSCAR CHISINI

VOLUME I



BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

PRINTED IN ITALY

PREFAZIONE

548963

Scopo e titolo del trattato. — Le questioni che qui vengono studiate sotto il titolo di « teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche » hanno formato oggetto d'un insegnamento, proseguito durante più anni all'Università di Bologna. Il dott. OSCAR CHISINI che ha raccolto dapprima quelle lezioni, ha atteso lungamente a svolgerne il disegno traendone anche occasione a ricerche originali; così il suo lavoro ha costituito la trama del trattato, di cui oggi offriamo al pubblico il primo volume, frutto di un'intima ed assidua collaborazione.

Il titolo dell'opera non deve intendersi come promessa di toccare ad un termine ove abbiano risposta i problemi più elevati dalla scienza, ma vuol significare lo spirito generale e lo scopo delle ricerche rispetto a cui il trattato può riguardarsi come introduzione.

A quel modo che la geometria differenziale, i problemi delle tangenti e delle aree, hanno dato origine ad un Calcolo infinitesimale, che si svolge di poi in stretta connessione colle idee geometriche direttrici, allo stesso modo la geometria algebrica — ove confluiscono il metodo delle coordinate e quello delle proiezioni, tutti i diversi ordini di concetti suggeriti dallo studio delle curve — riesce ormai ad una *dottrina qualitativa* delle equazioni e delle funzioni algebriche, che costituisce il naturale prolungamento dell'Algebra e che vorremmo pur designare con questo nome, superando la signifi-

cazione più ristretta che vi attribuiscono gli specialisti. Siffatta dottrina possiede invero la sua base ugualmente negli algoritmi dell' Aritmetica e nei principî dell' Analisi infinitesimale; anzi lo studio delle singolarità, e in genere delle proprietà *differenziali* delle curve e delle varietà algebriche, forma un capitolo di quell' Analisi, che si maturò — com'è noto — per opera della scuola newtoniana. Ma lo sviluppo ulteriore della dottrina è dominato dalla veduta sintetica delle funzioni considerate nella loro *integrità*, e perciò si riattacca naturalmente al campo delle variabili complesse; del pari a questa concezione d'insieme si sono andati via via conformando i metodi geometrici, elaborati durante il secolo decimonono sotto l'impulso delle idee direttive di MONGE e di PONCELET.

Purismo e ideale classico del trattato. — Lo sviluppo di concetti e di metodi diversi, coltivati per lungo tempo come rami distinti del sapere matematico, la varietà dei linguaggi che riflette differenti intuizioni, tutta la immane somma degli acquisti fatti, impone grave carico allo studioso che miri oggi a far progredire in qualche maniera i problemi attinenti alla più generale considerazione dell' Algebra.

Non è più il tempo in cui possa presumersi di dominare l'intera materia con una sola veduta, come il trattato di SALMON volle fare ordinando lo studio delle curve algebriche sulla base della teoria delle forme invariantive e il CREMONA movendo da pochi principî sintetici sulle polari. La nostra epoca ha superato decisamente il purismo delle scuole analitiche e geometriche, traendo da ciascuna gl'istrumenti della ricerca; il ravvicinamento dei metodi che risponde al programma eclettico di CLEBSCH, ha segnato un reale e fecondo progresso.

Tuttavia i criterî scientifici e didattici onde sorse l'aspirazione puristica non hanno perduto il loro valore, sebbene si esprimano oggi in modi di pensiero meno esclusivi. L'opportunità del successo euristico, che domina ogni altra consi-

derazione, pare a non pochi una ragione di compromesso, sulla quale mal saprebbe fondarsi il trattato organico di un ramo delle Matematiche; anche perchè fra i metodi sopra accennati ve ne sono alcuni che, ottimamente aiutando alla scoperta, sembrano rispondere meno bene al rigore della prova.

Presupposto di tali aspirazioni resta infine l'antico modello classico del trattato, che si riattacca alla venerabile tradizione dell'EUCLIDE: l'idea di una scienza razionale logicamente ordinata come teoria deduttiva, che debba apparire in ogni sua parte chiusa e perfetta, che, discendendo dai concetti più generali alle applicazioni particolari, respinga da sè le incerte e mutevoli suggestioni del concreto, tutto quanto ricordi il passato oscuro della ricerca o scopra nuove difficoltà, rompendo l'armonia del sistema.

Ma questo ideale del sistema, che sembra male adattarsi alla particolare materia delle nostre Lezioni, contrasta d'altra parte colla generale filosofia della scienza, frutto della critica moderna. Infatti la critica logica e gnoseologica riesce in ultima analisi a definire il campo della logica ed a riconoscere in ciascuna teoria gli elementi intuitivi di diverso ordine che le conferiscono significato e valore; infine approfondendo la veduta della scienza nel suo divenire, codesta critica oltrepassa l'opposizione fra metodo deduttivo e metodo induttivo, giungendo a considerare la deduzione stessa come fase d'un processo unico, che sale dal particolare al generale per ridiscendere al particolare.

Vi è luogo a chiedere se questo concepimento dinamico del sapere, che ognor più prende il posto del vecchio concepimento statico, non debba comporre in qualche modo anche l'antitesi tradizionale fra ricerca ed esposizione sistematica, e così fra scienza e storia della scienza. Chi accolga un tale ordine d'idee sarà naturalmente condotto ad un nuovo modo di pensare il trattato, più vicino alla realtà del progresso scientifico.

Criterî trattatistici: rigore e generalità. — Anzitutto giova chiarire che non si vuol togliere al trattato il proprio carattere letterario, che esso deve rimanere esposizione — quanto è possibile perfetta — dei risultati conseguiti in un ordine di problemi, cioè resoconto e sistemazione dello stato attuale della scienza. Ma, come questo stato viene pensato qual grado di uno sviluppo, così diventa importante di esporre accanto alla verità le vie — spesso diverse — che vi conducono, senza escludere dal confronto dei metodi i procedimenti parziali o imperfetti, ed anzi col preciso intendimento di correggerli e chiarirli l'uno coll'altro, facendo risultare quanto vi sia di manchevole in ogni concezione parziale delle teorie.

Ciò non significa punto che si voglia far gettito del *rigore* matematico, che esprime la suprema esigenza di conservazione del nostro sapere; ma al culto del rigore formale che — affettando di bandire ogni manchevolezza — talora riesce soltanto a nascondere le vere difficoltà o le cause d'errore, vuolsi sostituire il culto sincero del rigore concepito come abito di correzione e di critica. Da questo punto di vista acquistano speciale interesse gli errori storici, i paradossi, i sofismi, che spesso hanno segnato la via delle più importanti scoperte.

Anche l'aspirazione comune alla *generalità*, compare in nuova luce secondo i criterî della nostra trattatistica.

Il criterio di ricerca così splendidamente fatto valere da ABEL « porre i problemi nell'aspetto più generale per scoprirne la vera natura », designava l'indirizzo dell'Analisi che vuol liberare la conoscenza dei rapporti qualitativi dalle complicazioni accidentali dei calcoli, cioè appunto quell'indirizzo di cui è massima attuazione la teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.

Ma il precetto delle generalità ha ricevuto altra interpretazione presso i geometri contemporanei, specialmente nel nostro paese. Si è eretto a principio di massima che ogni teorema debba enunciarsi sempre nella forma più generale

di cui è suscettibile, e cioè per n variabili anzichè per due o per tre, e per un qualsivoglia grado in cambio che per i primi gradi, e così di seguito.

Convieni riconoscere che quest'abito ha diminuito l'efficacia propulsiva di ottimi maestri, e merita di essere seriamente contrastato. Giacchè in primo luogo, la forma troppo astratta dell'enunciato riesce ad oscurare il vero significato del teorema nascondendone le origini, ed — in secondo luogo — crea nei giovani studiosi la lusinga delle facili generalizzazioni, puramente formali.

La storia della scienza c'insegna che altro è l'ideale della generalità nei grandi fattori del progresso matematico; pei quali il senso vero della conoscenza generale si commisura al particolare significativo che vi è contenuto. Così ad ogni problema compete in qualche modo un proprio grado di generalità, che è il primo grado in cui il problema stesso rivela la sua vera natura; ed importa che lo studioso apprenda a riconoscere come potenzialmente data in questo la generalizzazione ulteriore.

Comprensione storica della scienza. — Una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia. La rigida distinzione che si fa di consueto fra scienza e storia della scienza, è fondata sul concetto di questa come pura erudizione letteraria; così intesa la storia reca alla teoria un estrinseco complemento d'informazione cronologica e bibliografica. Ma assai diverso significato ha la comprensione storica del sapere che mira a scoprire nel possesso l'acquisto, e si vale di quello per chiarire il cammino dell'idea, e concepisce questo come prolungantesi oltre ogni termine provvisoriamente raggiunto. Una tale storia diviene parte integrante della scienza, ed ha posto nell'esposizione delle dottrine, per quanto giovi spogiarla — nella misura del possibile — da troppo ingombrante ricchezza di citazioni, che tolga la visione sintetica del progresso nelle sue grandi linee.

Il richiamo al passato non si disgiunge qui dall'interesse del presente, che vi attinge solo la visione di una più larga realtà, e la vivifica ricreando la scoperta.

Uso del trattato. — Il programma che siamo venuti designando, conviene ad un'opera ideale d'insegnamento, che nella pratica può esplicarsi per gradi, ed in parte con metodo ciclico, promovendo la partecipazione attiva degli allievi, a cui la verità non deve porgersi come qualcosa di dato, bensì come mèta da guadagnare da sè. Ma il trattato, che vuole fissare una tale opera nella forma immobile dello scritto, urta contro difficoltà che occorre considerare più da vicino. Giacchè il modo d'esposizione che ci è parso ovviare — quanto è possibile — a tali difficoltà, mira a contemperare le esigenze di diversi lettori, anche principianti, ma chiede a ciascuno un'intelligenza attiva nell'uso del trattato, quasi una collaborazione all'opera.

Anzitutto lo studioso deve prefiggersi chiaramente lo scopo della lettura: se questo sia di ottenere rapida informazione di certi risultati o metodi, ovvero di approfondire lo studio di qualche teoria, lumeggiandola sotto più aspetti. Nel primo caso egli trascorrerà senz'altro sulle varie dimostrazioni attenendosi alla più semplice, che è spesso la verifica analitica diretta col riferimento ad uno speciale sistema di coordinate, e — se si tratti d'un principiante — tralascerà gli sviluppi complementari e le note che si riferiscono a questioni più delicate o difficili. La designazione di « *Nota* » attribuita a taluni capitoli e paragrafi o parti di paragrafo, serve appunto di guida all'accennata scelta.

Le varie introduzioni, i richiami, gl'indici (strumenti di orientamento sintetico!) saranno oggetto di particolare riflessione per chi voglia apprendere l'uso di queste Lezioni. Come criterio di massima ogni libro, ed anche ogni capitolo, sono costruiti in guisa che possano venire studiati come qualcosa a sè, ben inteso nella misura del possibile. Ma, se non andiamo

errati, l'unità degli scopi balzerà fuori dalla varietà delle trattazioni, per lo studioso che ne approfondisca l'esame.

Al lettore che ricerchi qui particolarmente le notizie storiche conviene avvertire:

1) Che per la esatta indicazione bibliografica soliamo spesso rinviare ai trattati classici e a monografie informative appositamente scritte per servire come istrumenti di lavoro; di tali opere si trovano — nei luoghi opportuni — elenchi particolareggiati.

2) Che accanto alle citazioni aventi carattere storico occorre spesso (per uso dei principianti) di riferirci a trattati correnti, facilmente distinguibili dall'attento lettore.

3) Che infine il richiamo di un lavoro serve a designare in termini generici la scoperta di un teorema o l'introduzione di un concetto di dimostrazione; resta inteso che — anche in quest'ultimo caso — la dimostrazione viene da noi elaborata e ripensata indipendentemente dall'originale, e — dove occorra — resa completa e rigorosa.

Il vero significato di quest'ultima avvertenza si capirà facilmente ove si ricordi che qui la storia viene guadagnata attraverso la scienza, in servizio della scienza, e non viceversa: anzi vogliam dire che prima abbiamo ripensato — e talora svolto — la materia con piena libertà di spirito costruttivo, poi abbiám cercato di comprenderla storicamente, rendendoci conto dell'origine delle idee. Comunque questo metodo di lavoro possa venir giudicato da altri, esso è proprio a spiegare i pregi e i difetti che per avventura possano riconoscersi al nostro trattato, ed importa perciò che sia noto al lettore: infatti l'epoca in cui gli uomini di scienza nascondevano le tracce del proprio cammino è ormai oltrepassata; la nostra generazione considera giustamente come un dovere di render chiaro in ogni opera scientifica il sistema delle idee costruttive.

Programma. — Resterebbe da spiegare l'estensione ed i limiti del nostro programma. Ma a tale scopo ci sembra che

bene provvedano gli elenchi dei capitoli e paragrafi e gl'indici analitici che accompagnano i successivi volumi; come già si può giudicare per il presente.

Diremo soltanto che a questo volume ne seguiranno due altri, attualmente in preparazione; il primo dei quali conterrà lo sviluppo algebrico della teoria delle curve, in rapporto alla polarità e ai covarianti che vi si collegano, le questioni di realtà e di continuità, e l'analisi approfondita dei punti singolari; nell'altro (terzo ed ultimo della serie) avrà come oggetto lo studio delle proprietà delle curve, invarianti per trasformazioni birazionali.

È nella natura di un'opera come questa che il più assiduo studio non valga ad evitare difetti e lacune, che soltanto in seguito a successive revisioni e mediante un uso continuato possono avvertirsi e correggersi. A coloro che vorranno in tal guisa aiutarci, in vista di una eventuale edizione ulteriore, esprimiamo fin d'ora la più viva riconoscenza. Frattanto siamo cordialmente grati al sig. AMEDEO AGOSTINI per l'aiuto datoci nella correzione delle bozze di stampa nonchè nel raccogliere ed ordinare il materiale degl'indici.

Bologna, Giugno 1915.

FEDERIGO ENRIQUES

LEZIONI
SULLA
TEORIA GEOMETRICA DELLE EQUAZIONI
E DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE

Libro Primo
Introduzione

LIBRO PRIMO

INTRODUZIONE

TRATTATI DI GEOMETRIA PROIETTIVA E ANALITICA

utili a consultarsi

« Les Vérités mathématiques ne sont pas si faciles à trouver, qu'on doive chercher du mérite à se fermer quelque-une des routes qui peuvent y conduire ». (CRAMER, « *Introduction à l'Analyse....* », p. VII).

- J. V. PONCELET - *Traité des propriétés projectives des figures* - Parigi, 1822.
- A. F. MÖBIUS - *Der barycentrische Calcul* - Lipsia, 1827.
- J. STEINER - *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* - Berlino, 1832.
- J. PLÜCKER - *System der analytischen Geometrie* - Berlino, 1835.
- G. STAUDT - *Geometrie der Lage* - Norimberga, 1847. Traduzione italiana di M. Pieri - Torino, 1889.
— *Beiträge zur Geometrie der Lage* - Norimberga, 1856.
- M. CHASLES - *Traité de Géométrie supérieure* - Parigi, Bachelier, 1852.
- TH. REYE - *Geometrie der Lage*. - Lipsia 1866. Traduzione italiana di Faifofer, Venezia, Tip. Emiliana, 1884.
- G. SALMON - *A Treatise on Conic Sections*. Traduzione italiana di S. Dino - Napoli, Pellerano (4^a ristampa, 1885).
- BRIOT et BOUQUET - *Leçons de Géométrie Analytique* - Parigi, 1865.
- O. HESSE - *Vorlesungen aus der analitischen Geometrie der gerade Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene* - Lipsia, 1873.

- A. CLEBSCH - « *Vorlesungen über Geometrie* » bearbeitet von
F. Lindemann - Lipsia, 1875-76. Trad. francese di A. Benoist
- Parigi, 1876, (t. I).
- E. D'OVIDIO - *Geometria Analitica* - Torino, 1885.
- A. SANNIA - *Lezioni di Geometria Proiettiva* - Napoli, Pelle-
rano, 1891.
- F. ENRIQUES - *Lezioni di Geometria Proiettiva* - Bologna,
Zanichelli, 1898, (3^a ed. 1909).
- *Lezioni di Geometria Descrittiva*, per cura di U. Concina -
Bologna, Zanichelli, 1902, (2^a ed. 1908).
- G. CASTELNUOVO - *Lezioni di Geometria Analitica* - Roma,
Albrighi e Segati, 1903, (3^a ed. 1915).
- L. BIANCHI - *Lezioni di Geometria Analitica* - Pisa, Spoerri, 1915.
- E. CIANI - *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello
studio degli enti algebrici* - Pisa, Spoerri, 1915.
-

CAPITOLO I

Le equazioni $f(x) = 0$ e i gruppi di punti sulla retta

1. Il teorema fondamentale dell'Algebra e la definizione dei gruppi di punti sulla retta. — L'equazione algebrica di grado n , a coefficienti reali o complessi,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

si può interpretare come equazione d'un gruppo di punti sopra la retta o , in generale, di un gruppo di elementi in una forma di prima specie.

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che:

Ogni equazione di grado n .

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

possiede, nel campo complesso, n radici x_1, x_2, \dots, x_n , distinte o coincidenti, in corrispondenza delle quali il polinomio $f(x)$ si decompone nel prodotto di n fattori lineari

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Dunque: l'equazione di grado n $f(x) = 0$ rappresenta un gruppo di n punti (distinti o coincidenti) le cui ascisse sono le radici dell'equazione stessa.

Ricordiamo che le radici multiple della $f(x) = 0$ sono anche radici della sua derivata, $f'(x) = 0$, e precisamente: se una radice è i -pla per la $f(x) = 0$ è $(i - 1)$ -pla per la $f'(x) = 0$, e quindi è radice di tutte le successive derivate fino alla $(i - 1)$ -esima; viceversa ogni radice della $f(x) = 0$ che sia i -pla per la $f'(x) = 0$, è multipla per la $f(x)$ secondo $i + 1$. Così l'esame delle eventuali radici comuni alla $f(x)$ e alla $f'(x)$ serve a stabilire se esistano e quali siano i punti multipli, nel gruppo rappresentato dalla

$$f(x) = 0,$$

e la considerazione delle derivate successive permette di determinarne le molteplicità.

Si consideri la classe delle equazioni di grado n

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

dove $a_0 a_1 \dots a_n$ figurano come parametri variabili.

Ad ogni gruppo di valori di questi parametri corrisponde un'equazione, che è di grado n se $a_0 \neq 0$, di grado $n - 1$ se, essendo $a_0 = 0$, è $a_1 \neq 0$ ecc.

Ora l'equazione

$$a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

considerata come limite della

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

si riterrà *convenzionalmente* come un'equazione di grado n che ha una *radice infinita*.

Questa convenzione si giustifica osservando che: condizione perchè il prodotto

$$a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

abbia come limite

$$a_1(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

è che sia

$$\lim a_0(x - x_n) = a_1$$

e quindi, per $a_0 = 0$,

$$\lim x_n = \infty.$$

Più generalmente se, non solo a_0 , ma i primi r coefficienti

$$a_0 a_1 \dots a_{r-1}$$

si annullano, sì che l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

si riduca all'equazione di grado $n - r$

$$a_r x^{n-r} + a_{r+1} x^{n-r-1} + \dots + a_n = 0,$$

considereremo quest'ultima equazione come un'equazione di grado n in cui si ha una *radice r -pla all'infinito*.

Qualora si voglia eliminare l'uso dell'infinito, conviene sostituire alla coordinata ascissa x le coordinate omogenee x_1, x_2 , ponendo $x = \frac{x_1}{x_2}$. L'equazione $f(x) = 0$ viene così trasformata nella equazione omogenea che si ottiene annullando la forma d'ordine n :

$$f(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n = 0.$$

Se i coefficienti a_0, a_1, \dots, a_{r-1} si riducono allo 0, allora la $f(x_1 x_2)$ risulta divisibile per x_2^r , e quindi in questo caso r fra gli n punti del gruppo rappresentato da $f(x_1 x_2) = 0$ vanno a cadere nel punto $x_2 = 0$, cioè in $x = \infty$. Le condizioni perchè il gruppo rappresentato da $f(x_1 x_2) = 0$ abbia un punto r -plo $(\bar{x}_1 \bar{x}_2)$ si esprimono in generale annullando le derivate d'ordine r :

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^i \partial x_2^k} = 0 \quad (r = i + k),$$

nel punto $(\bar{x}_1 \bar{x}_2)$; infatti decomponendo f nei suoi fattori lineari, dovrà f contenere il fattore $(x_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_1 x_2)^r$, donde seguono appunto le condizioni precedenti (dalle quali viceversa, facendo $x_2 = 1$, segue $f(x) = 0, \frac{\partial^r f}{\partial x_1^r} = \frac{d^r f}{dx^r} = 0$). Ora calcolando le derivate r -me di f , rispetto ad x_1 e x_2 per $x_1 = 0, x_2 = 1, (x = \infty)$, si trovano appunto i coefficienti a_0, a_1, \dots, a_{r-1} .

Alla considerazione di equazioni algebriche $f(x) = 0$ rappresentanti gruppi di punti in cui va incluso il punto all'infinito, si perviene anche quando si studino le equazioni o i gruppi di punti, in rapporto alle trasformazioni omografiche sopra la retta.

Operiamo sulla coordinata x la sostituzione lineare:

$$1) \quad x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}, \quad \text{cioè} \quad x' = \frac{\delta x - \beta}{\gamma x - \alpha}$$

che si sottintende a determinante non nullo, cioè rappresentante una proiettività non degenera fra le rette x, x' .

Con ciò a $f(x)$ viene trasformata in una funzione fratta

$$2) \quad \left(\frac{1}{\gamma x' + \delta} \right)^n \bar{f}(x').$$

Si verifica facilmente che, se $f(x)$ non si annulla per $x = \frac{\alpha}{\gamma}$, la $\bar{f}(x')$ risulta di grado n come la $f(x)$, e se, invece, $x = \frac{\alpha}{\gamma}$ è radice r -pla per la $f(x)$, la $\bar{f}(x')$ si riduce di grado $n - r$. Ora la 2) si annulla per i valori che annullano $\bar{f}(x')$ e inoltre per il valore $x' = \infty$, quindi le radici della $f(x) = 0$ si trasformano nelle radici della $\bar{f}(x')$ ed eventualmente nel punto $x' = \infty$.

Noi considereremo il polinomio $\bar{f}(x')$ come *trasformato di* $f(x)$: per poter considerare le radici di $\bar{f}(x')$ come le trasformate di tutte le radici di $f(x)$, considereremo *convenzionalmente* $\bar{f}(x)$ *sempre di grado* n , ritenendo che $\bar{f}(x) = 0$ abbia una radice (semplice o multipla) all'infinito quando $x = -\frac{\alpha}{\gamma}$ sia radice della $f(x) = 0$.

Questa convenzione può essere eliminata mediante l'introduzione delle coordinate omogenee, che già abbiám visto proprie a chiarire le difficoltà del punto all'infinito. Infatti se sulla forma

$$f(x_1, x_2)$$

si opera la trasformazione omografica

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{\alpha \frac{x_1}{x_2} + \beta}{\gamma \frac{x_1}{x_2} + \delta},$$

cioè

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$x_2' = \gamma x_1 + \delta x_2,$$

la $f(x_1, x_2)$ viene trasformata in una $\bar{f}(x_1', x_2')$ il cui grado è *sempre* il grado n della f , e le cui radici sono tutte e sole le trasformate delle radici della $f(x_1, x_2) = 0$.

Osservazione. Le cose dette innanzi vengono chiarite ove si ricordi che: se si interpreta la coordinata ascissa di un punto X come coordinata proiettiva, cioè come il birapporto $(\infty 0 1 X)$ che il punto X forma coi tre punti $\infty 0 1$, la trasformazione proiettiva 1) equivale a un *cambiamento di coordinate*, dove si assuma come coordinata del punto X il birap-

porto $\left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\beta}{\delta} \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} X\right)$ che X forma coi tre punti $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}$ (trasformati di $\infty, 0, 1$).

2. Invarianti e covarianti. — Ad un gruppo di n punti sopra la retta:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

appartengono in generale — oltre ai *caratteri* proiettivi *numerici* dipendenti dall'ordine n — delle proprietà proiettive, che si esprimono per mezzo di invarianti e covarianti.

Consideriamo la forma binaria (polinomio omogeneo) associata al polinomio $f(x)$:

$$f(x_1 x_2) = x_2^n f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n = 0$$

$$\left(x = \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Se si opera la sostituzione lineare

$$1) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2' \end{cases}, \quad \text{ossia } x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta},$$

la forma $f(x_1 x_2)$ e il polinomio $f(x)$ si cambiano rispettivamente in

$$f(x_1 x_2) = \bar{f}(x_1' x_2') = a_0' x_1'^n + a_1' x_1'^{n-1} x_2' + \dots + a_n' x_2'^n = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{(\gamma x' + \delta)^n} \bar{f}(x') = \frac{1}{(\gamma x' + \delta)^n} (a_0' x^n + a_1' x^{n-1} + \dots + a_n'),$$

dove $\bar{f}(x')$ si considera come polinomio *trasformato* di $f(x)$ (§ 1).

Data una funzione razionale dei coefficienti di f :

$$\varphi(a_0 a_1 \dots a_n),$$

si consideri la medesima funzione dei coefficienti di \bar{f} :

$$\varphi(a_0' a_1' \dots a_n').$$

Si dice che φ è un *invariante* (proiettivo) di *peso* p , della forma, o del polinomio, f , se accade che identicamente

$$\varphi(a_0' a_1' \dots a_n') = M^p \varphi(a_0 a_1 \dots a_n),$$

designando

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

il modulo o determinante della sostituzione 1) ($M \neq 0$ per sostituzioni non degeneri), e p un intero arbitrario.

Se φ è un invariante, la particolare sostituzione

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' \\ x_2 = \alpha x_2' \end{cases} \quad (M = \alpha^2),$$

ha per effetto di moltiplicare i coefficienti $a_0 a_1 \dots a_n$ per $t = \alpha^n$. Si avrà dunque

$$\varphi(t a_0, t a_1, \dots, t a_n) = t^{\frac{2p}{n}} \varphi(a_0 a_1 \dots a_n);$$

cioè un invariante di peso p è funzione (razionale) omogenea di grado $g = \frac{2p}{n}$ dei coefficienti di f . Ciò significa che $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$,

ponendo $t = \frac{1}{a_0}$, si riduce ad una funzione

$$\varphi(a_0 a_1 \dots a_n) = a_0^g \varphi\left(\frac{a_1}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}\right).$$

Ora $\bar{\varphi}$ sarà in generale il quoziente di due funzioni intere

$$\frac{\varphi_1\left(\frac{a_1}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}\right)}{\varphi_2\left(\frac{a_1}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}\right)},$$

e moltiplicando numeratore e denominatore per la più alta potenza a cui compare a_0 , si dedurrà

$$\varphi(a_0 a_1 \dots a_n) = \frac{\varphi_1(a_0 a_1 \dots a_n)}{\varphi_2(a_0 a_1 \dots a_n)},$$

dove φ_1 e φ_2 sono due forme i cui gradi differiscono di g ; risulterà poi che queste φ_1, φ_2 sono separatamente degl' invarianti.

Abbiamo intanto che: ogni *invariante razionale intero* è una forma nelle $a_0 a_1 \dots a_n$. A questi invarianti-forme si riferiscono le considerazioni seguenti.

Se $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$ è una forma invariante, ogni forma $f(x_1, x_2)$ i cui coefficienti soddisfino l'equazione

$$\varphi(a_0 a_1 \dots a_n) = 0,$$

si trasforma — per una qualsiasi sostituzione lineare non degenera — in una f per cui è similmente

$$\varphi(a_0' a_1' \dots a_n') = 0.$$

Reciprocamente sussiste il

Teorema. Se, essendo $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$ una forma nei coefficienti di $f(x_1 x_2)$, l'equazione

$$\varphi(a_0 a_1 \dots a_n) = 0$$

è invariante per sostituzioni lineari non degeneri, eseguite sopra le variabili omogenee $x_1 x_2$, la forma $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$ è un'invariante di f .

Supponiamo dapprima che φ sia un polinomio irriducibile, o primo, cioè non decomponibile nel prodotto di due polinomi (forme) φ_1, φ_2 ; a questo caso ridurremo poi quello escluso.

Occorre richiamare un noto principio sulla divisibilità dei polinomi: se il polinomio $\psi(a_0 a_1 \dots a_n)$, di grado r , si annulla per tutti i valori delle a_i che annullano un polinomio primo di grado $s \leq r$, $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$, il polinomio ψ è divisibile per φ , cioè si ha

$$\psi = \varphi \theta,$$

designando θ un polinomio di grado $r - s$ nelle stesse variabili a_i .

La dimostrazione di questo principio si riconduce ai noti teoremi dell'Algebra sulla teoria della divisione (¹). Dividendo ψ per φ , considerata come variabile la a_0 e come costanti le $a_1 \dots a_n$, viene

$$\psi = \varphi \theta + R,$$

dove R si annulla identicamente perchè $\varphi(a_0)$ e $\psi(a_0)$ hanno radici comuni.

La legge di formazione del quoziente mette in evidenza che $\theta(a_0)$ ha i suoi coefficienti funzioni razionali intere di $a_1 \dots a_n$, ogni qual volta accada che il coefficiente di a_0 elevato alla massima potenza non contenga $a_1 \dots a_n$; e ci si può sempre ridurre a questo caso con una semplice trasformazione lineare intera sulle variabili a_i .

(¹) Cfr. p. es. A. CAPELLI - *Istituzioni di Analisi algebrica* - Pellegrano, Napoli, 1906 - Cap. VI, § 12.

Ciò posto, prendiamo a considerare la forma irriducibile $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$ nell'ipotesi di invarianza dell'equazione $\varphi = 0$, secondo il nostro enunciato; costruiamo la forma $\varphi(a'_0 a'_1 \dots a'_n)$, dove le a'_i si esprimono visibilmente come funzioni lineari omogenee delle a_i . Sostituendo queste espressioni, avremo

$$\varphi(a'_0 a'_1 \dots a'_n) = \bar{\varphi}(a_0 a_1 \dots a_n),$$

dove $\bar{\varphi}$ è una forma dello stesso ordine di φ , i cui coefficienti sono funzioni razionali intere ed omogenee di $\alpha \beta \gamma \delta$, coefficienti della trasformazione lineare eseguita su $x_1 x_2$. Secondo l'ipotesi fatta, si ha $\bar{\varphi} = 0$ ogniqualevolta $\varphi = 0$, per $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$; si deduce che $\bar{\varphi}$ è divisibile per φ e si ha

$$\bar{\varphi} = \varphi \theta,$$

dove θ risulta, in questo caso, d'ordine 0, cioè indipendente dalle a_i , ma funzione razionale intera ed omogenea di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ora $\theta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ si annulla per

$$M = \alpha \delta - \beta \gamma = 0,$$

e soltanto per $M = 0$; perciò (essendo M primo) sarà θ divisibile per M , e la divisione potrà ripetersi un certo numero, p , di volte, fino a che si pervenga ad un quoziente h , il quale non dipenda più da $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, cioè sia una costante numerica:

$$\theta = h M^p.$$

Facendo poi la sostituzione identica

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1, \quad M = 1,$$

si deduce

$$h = 1$$

e però

$$\theta = M^p.$$

Resta infine da estendere il teorema al caso in cui l'equazione $\varphi = 0$ sia riducibile:

$$\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_r,$$

dove si designano con φ_i i fattori primi di φ . In tal caso basta

osservare che per una sostituzione generica $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ non può accadere che un fattore φ_1 venga trasformato in un altro φ_i distinto da esso, giacchè facendo variare con continuità $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, la sostituzione anzidetta può ridursi all'identità.

Pertanto le equazioni $\varphi_i = 0$ sono invarianti, perciò risultano invarianti le forme φ_i e il loro prodotto. c. d. d.

Corollario. Un invariante razionale fratto (di peso p e grado $g = \frac{2p}{n}$) è il quoziente di due forme invarianti (di peso p_1, p_2 , e grado $g_1 = \frac{2p_1}{n}, g_2 = \frac{2p_2}{n}$, con $p_1 - p_2 = p, g_1 - g_2 = g$).

Infatti abbiamo già veduto che il numeratore e il denominatore di φ sono forme (omogenee) nelle a_i ; possiamo ora affermare che il carattere invariante di φ porta l'invarianza delle equazioni $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$, (supposte senza fattori comuni) per sostituzioni lineari non degeneri eseguite sulle variabili $x_1 x_2$; da ciò segue che le forme φ_1 e φ_2 sono invarianti.

La definizione degli invarianti si lascia generalizzare ove si considerino funzioni razionali

$$\begin{aligned} & \psi(x a_0 a_1 \dots a_n) \\ \text{o} & \\ & \psi(x_1 x_2 a_0 a_1 \dots a_n) \end{aligned}$$

(omogenee in $x_1 x_2$). Consideriamo la medesima funzione ψ delle nuove variabili $x'_1 x'_2$ e dei coefficienti della trasformata di f :

$$\psi(x'_1 a'_0 a'_1 \dots a'_n) \quad \text{o,} \quad \psi(x'_1 x'_2 a'_0 a'_1 \dots a'_n);$$

si dice che ψ è un *covariante* (proiettivo) di peso p , se accade che

$$\psi(x'_1 x'_2 a'_0 a'_1 \dots a'_n) = M^p \psi(x_1 x_2 a_0 a_1 \dots a_n)$$

dove p è un intero (positivo o negativo).

Si prova come innanzi il

Teorema. Una funzione razionale $\psi(x_1 x_2 a_0 a_1 \dots a_n)$ è covariante di f , se l'equazione $\psi = 0$ gode della proprietà d'invarianza rispetto alle sostituzioni lineari non degeneri su $x_1 x_2$.

Quindi si dimostra parimente che:

Un covariante ψ è funzione razionale omogenea di $a_0 a_1 \dots a_n$

e quoziente di due forme covarianti, intere ed omogenee, nelle due serie di variabili $a_0 a_1 \dots a_n$ ed $x_1 x_2$.

Così lo studio degli invarianti e covarianti si riduce a quello di forme invarianti e covarianti, che si raccolgono sotto la designazione comune di *forme invariantive*.

Una forma covariante $\psi(x_1 x_2 a_0 \dots a_n)$ (o $\psi(x a_0 \dots a_n) = = x_2^m \psi(x a_0 \dots a_n)$) conterrà le $x_1 x_2$ ad un certo grado m , che prende il nome di *ordine* del covariante; si riserva il nome di *grado* g al grado di ψ rispetto ad $a_0 \dots a_n$. (Per $m = 0$, ψ si riduce a un invariante). *Il peso di un covariante ψ vale*

$$p = \frac{ng - m}{2},$$

come si prova eseguendo la sostituzione di modulo α^2 :

$$x_1 = \alpha x'_1, \quad x_2 = \alpha x'_2,$$

che ha per effetto di moltiplicare $a_0 \dots a_n$ per α^n .

Una estensione naturale del concetto d'invariante e di covariante, si ha considerando *invarianti e covarianti simultanei* di più forme

$$f_1(x_1 x_2), \quad f_2(x_1 x_2) \dots$$

In modo affatto generale sussiste evidentemente la proprietà che:

Funzioni invariantive di funzione invariantive sono invariantive.

L'annullamento d'un invariante:

$$\varphi = 0$$

per una certa f , esprime una *particolare condizione proiettiva* a cui deve soddisfare il gruppo G_n di punti:

$$f(x) = 0;$$

tale condizione venendo soddisfatta ugualmente da tutti i gruppi proiettivi a G_n (trasformati di G_n per proiettività non degeneri).

L'annullamento d'un covariante

$$\psi(x) = 0,$$

che sia di ordine $m (> 0)$ in x , rappresenta un gruppo di m punti, G_m , che ha col $G_n, f=0$, una definita *relazione proiettiva*, poichè una proiettività (non degenera) trasformante G_n in G_n' , trasforma il G_m in un G_m' , che si rappresenta annullando il medesimo covariante ψ .

Similmente l'annullamento d'un invariante simultaneo di due (o più) forme (o polinomi) f_1, f_2 , esprime una relazione proiettiva dei due gruppi di punti

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0,$$

e l'annullamento d'un covariante simultaneo d'ordine m rappresenta un gruppo di m punti che ha con essi una definita relazione proiettiva.

Le forme invariantive risultano definite reciprocamente dalle relazioni proiettive da esse espresse, a meno di un fattore numerico arbitrario.

Esempi. Eliminando x fra le equazioni di ordine n_1, n_2 ,

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0$$

oppure $x_1 x_2$ fra le equazioni omogenee

$$f_1(x_1 x_2) = 0, \quad f_2(x_1 x_2) = 0,$$

si ottiene la condizione perchè i due gruppi abbiano un punto comune, la quale viene espressa dall'annullamento del *resultante*. Il resultante R è un invariante simultaneo di f_1, f_2 , notoriamente del grado $n_1 n_2$; nel caso di forme lineari

$$f_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$$f_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

si ha

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Si consideri un gruppo di n punti:

$$f(x_1 x_2) = 0;$$

per una sostituzione lineare

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2' \end{cases}$$

le derivate di f si trasformano come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \alpha \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = \beta \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2}; \end{array} \right.$$

si deduce di qui che il resultante di

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

è un invariante di f ; esso dicesi *discriminante* di f , e col suo annullarsi esprime la condizione perchè il gruppo $f=0$ possenga un *punto doppio*.

Se si passa alle coordinate non omogenee:

$$x = \frac{x_1}{x_2},$$

il discriminante D di $f(x)$ si può definire come *resultante* di f e della sua derivata $\frac{\partial f}{\partial x}$ (cfr. §. 1), d'accordo colla relazione d'EULERO

$$nf = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2.$$

Per il polinomio di 2° grado

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2,$$

il discriminante vale (a meno d'un fattore numerico):

$$D = a_1^2 - 4a_0 a_2,$$

e per il polinomio cubico ridotto

$$f(x) = x^3 - px + q,$$

si ha

$$D = 27q^2 - 4p^3,$$

come risulta dalla risoluzione delle rispettive equazioni $f(x) = 0$ (cfr. §. 5).

Un covariante simultaneo delle due forme

$$f(x_1, x_2) \quad \varphi(x_1, x_2),$$

è il determinante funzionale o *jacobiano* ⁽¹⁾

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

come risulta dalle formole di trasformazione delle derivate, che abbiamo scritto di sopra.

Si deduce che lo *jacobiano* delle derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

cioè il determinante *hessiano* ⁽²⁾:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

è un invariante della forma f .

Il peso dello *jacobiano* è 1, quello dello *hessiano* è 2.

Fra gli invarianti di $f(x_1, x_2)$ o di $f(x)$, sono da notare in special modo gl'*invarianti assoluti* o di peso (e quindi di grado) 0, i quali permangono assolutamente invariati per una trasformazione proiettiva eseguita su f .

Si può formare un *invariante assoluto* di $f(x)$ quando siano dati due invarianti φ_1, φ_2 di peso p_1, p_2 che non siano potenze di un medesimo; tale è infatti il quoziente

$$\varphi = \frac{\varphi_1^{p_2}}{\varphi_2^{p_1}}$$

che, per una sostituzione di modulo M , diventa

$$\frac{M^{p_1 p_2} \varphi_1^{p_2}}{M^{p_1 p_2} \varphi_2^{p_1}} = \frac{\varphi_1^{p_2}}{\varphi_2^{p_1}}.$$

Giova avvertire esplicitamente che — a differenza degli

⁽¹⁾ Da JACOBI (*Journal für Math.* 22).

⁽²⁾ Da HESSE (*Journal für Math.* 28, 38, 49, 56).

invarianti relativi (di peso o grado $\neq 0$) — gl' *invarianti assoluti* sono *definiti*, non tanto *in funzione* dei coefficienti $a_0 a_1 \dots a_n$ di f , quanto dei loro rapporti, e anzi *del gruppo di punti* G_n rappresentato dall'equazione

$$f(x_1 x_2) = 0 \quad \text{o} \quad f(x) = 0,$$

indipendentemente dalla scelta del sistema di coordinate in cui è scritta l'equazione suddetta. Per un invariante di peso o grado $\neq 0$, ha senso soltanto chiedere se esso si annulli o no per un dato G_n , ma non — nella seconda ipotesi — quale sia il suo valore, che dipende dal fattore di proporzionalità contenuto nei coefficienti di f e — più in generale — dalla scelta del sistema di coordinate omogenee a cui si è riferito il G_n .

Un covariante $\psi(x_1 x_2)$ di $f(x_1 x_2)$ è definito dall'equazione $\psi(x_1 x_2) = 0$ a meno d'un fattore costante, e perciò — a meno d'un tale fattore — si può ritenere definito dalla relazione proiettiva che lega il gruppo di punti $\psi = 0$ a $f = 0$.

3. Espressione delle forme invariantive di $f(x)$ per mezzo delle differenze delle radici. — La costruzione effettiva delle forme invariantive di $f(x)$, si può basare sopra l'osservazione fondamentale che esse si esprimono come funzioni razionali intere delle differenze delle radici di

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

$$\alpha_i - \alpha_k = |i k|,$$

e delle differenze

$$x - \alpha_k = |0 k|.$$

Infatti tali invarianti e covarianti φ, ψ , sono funzioni razionali intere omogenee di $a_0 a_1 \dots a_n$ che, divise per una potenza di a_0 di esponente uguale al grado g , si riducono funzioni razionali intere di $\frac{a_1}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}$, e perciò funzioni simmetriche di $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$; ma, poichè le φ, ψ debbono restare assolutamente invariate per ogni trasformazione proiettiva di modulo $M = 1$ ed in particolare per una traslazione

$$x = x' + \alpha_h,$$

così esse potranno farsi dipendere soltanto dalle differenze

$$x - \alpha_k, \quad \alpha_i - \alpha_k.$$

Vediamo come questa osservazione permetta di costruire effettivamente le forme invariantive φ, ψ , riferendoci al caso più semplice degli invarianti.

Si abbia

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

La sostituzione

$$1) \quad x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}$$

cambia f in

$$f(x) = \frac{1}{(\gamma x' + \delta)^n} \bar{f}(x'),$$

dove

$$\bar{f}(x') = a_0'(x' - \alpha_1')(x' - \alpha_2') \dots (x' - \alpha_n') = (\gamma x' + \delta)^n f(x).$$

Si deduce

$$\begin{aligned} \bar{f}(x') &= (\gamma x' + \delta)^n x^n \left\{ a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right\} = \\ &= (\alpha x' + \beta)^n \left\{ a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right\}. \end{aligned}$$

Poniamo

$$x = \infty, \quad x' = -\frac{\delta}{\gamma};$$

si ricava

$$f\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^n a_0 M^n, \quad (M = \alpha\delta - \beta\gamma),$$

quindi

$$a_0' \left(-\frac{\delta}{\gamma} - \alpha_1'\right) \left(-\frac{\delta}{\gamma} - \alpha_2'\right) \dots \left(-\frac{\delta}{\gamma} - \alpha_n'\right) = \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^n a_0 M^n$$

ossia, moltiplicando i due membri per $(-\gamma)^n$,

$$2) \quad a_0' (\gamma \alpha_1' + \delta) (\gamma \alpha_2' + \delta) \dots (\gamma \alpha_n' + \delta) = a_0 M^n.$$

Ciò posto si consideri p. es. la differenza

$$\alpha_i - \alpha_k = |i k|.$$

Per la sostituzione 1) questa si cambia in

$$\frac{(x x_i' + \beta)(\gamma x_k' + \delta) - (x x_k' + \beta)(\gamma x_i' + \delta)}{(\gamma x_i' + \delta)(x \gamma_k' + \delta)} = \frac{M(x_i' - \alpha_k')}{(\gamma \alpha_i' + \delta)(\gamma \alpha_k' + \delta)}.$$

Risulta di qui che: si ottiene un invariante di f di peso p , moltiplicando per a_0^g un prodotto di p differenze $|i k|$, costruito per modo che ogni indice i compaia nel prodotto uno stesso numero g di volte; siffatti prodotti dipendono in generale irrazionalmente dai coefficienti di f , ma essi permettono di formare delle funzioni simmetriche che porgono invarianti razionali.

L'enunciato precedente risulta dall'osservare che, nelle ipotesi fatte, il prodotto di p differenze $|i k|$ vale

$$\Pi(x_i - \alpha_k) = \frac{M^p \Pi(x_i - \alpha_k')}{\{\gamma \alpha_1' + \delta\} \{\gamma \alpha_2' + \delta\} \dots \{\gamma \alpha_n' + \delta\} \{g\}}$$

dove $2p = ng$; quindi, applicando la formola 2) si ha

$$M^{ng} a_0^g \Pi(x_i - \alpha_k) = M^p a_0'^g \Pi(x_i - \alpha_k')$$

cioè

$$M^p a_0^g \Pi(x_i - \alpha_k) = a_0'^g \Pi(x_i - \alpha_k'),$$

vale a dire che

$$a_0^g \Pi(x_i - \alpha_k)$$

è un invariante, in generale irrazionale, di f , di peso p e grado g .

Si consideri ora una somma, funzione *simmetrica* delle radici,

$$I = \Sigma a_0^g \Pi |i k|,$$

i cui termini, costruiti coi prodotti di p differenze $|i k|$, contengano ciascuno lo stesso numero $g \left(= \frac{2p}{n} \right)$ di volte gli indici $1, 2, \dots, n$. Allora, come si è già avvertito, I risulta un *invariante razionale* di

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

L'espressione effettiva di I per i coefficienti $a_0 a_1 \dots a_n$ si ottiene servendosi delle formole di NEWTON che danno le somme delle potenze simili delle radici per mezzo delle fun-

zioni simmetriche elementari:

$$\Sigma x_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\Sigma x_i x_k = \frac{a_2}{a_0}$$

.....

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0};$$

le funzioni simmetriche intere di $x_1 \dots x_n$ risultano così funzioni razionali *interi* di $\frac{a_1}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}$ (1).

Si avrà quindi

$$I = a_0^g \varphi \left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right),$$

dove φ è una funzione razionale intera, cioè l'*invariante* I è esso stesso una forma (polinomio omogeneo) del grado g in a_0, a_1, \dots, a_n .

Reciprocamente è facile riconoscere che una forma invariante di f , espressa per le $|i k|$, deve contenere in ciascun termine lo stesso numero di volte ogni indice i .

Un semplice esempio della costruzione precedente relativa ad

$$f(x) = a_0(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

è porto dal *discriminante* (§§ 1, 2) che, dovendo annullarsi per i gruppi $f=0$ dotati di punto doppio, si potrà esprimere (a meno d'un fattore numerico) sotto la forma:

$$D = a_0^{2(n-1)} \Pi |i k|,$$

cioè come prodotto dei quadrati delle differenze delle radici. In D compaiono $p = n(n-1)$ fattori; essendo funzione simmetrica delle radici di f , si vede che D è esprimibile razionalmente per i coefficienti, come è ben noto dall'algebra.

(1) Cfr. per esempio: S. PINCHERLE: *Lezioni di Algebra Complementare*. Bologna, Zanichelli, 1906 - Cap. 2. — A. CAPELLI: *Istituzioni di Analisi Algebrica*. Napoli, Pellerano, 1902. Cap. - XII - §§ 4, 5 — H. WEBER: *Traité d'Algèbre Supérieure*. Trad. fr., Paris, Gauthier Villars, 1898, Cap. IV.

Ora dalla precedente espressione risulta che il discriminante è precisamente un invariante di grado $2(n-1)$ e di peso $n(n-1)$.

La costruzione indicata si estende ai covarianti.

Si ottiene un covariante (razionale) ψ di

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n),$$

combinando, in guisa da ottenere una funzione simmetrica di $\alpha_0 \dots \alpha_n$, i prodotti delle differenze

$$\begin{array}{c} | 0 1 | | 0 2 | \dots | 0 n | \\ | 1 2 | | 1 3 | \dots | n-2, n |, \end{array}$$

costruiti in modo che gl'indici $1, 2, \dots, n$ compaiano in ogni prodotto uno stesso numero g di volte; supponendo che l'indice 0 vi compaia m volte, il covariante avrà l'ordine m , il grado g , e il peso $p = \frac{ng - m}{2}$, d'accordo col § 2.

4. **Quaterne di punti.** — Consideriamo un polinomio di 4° grado

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4),$$

e il gruppo di quattro punti $G_4 = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ rappresentato da

$$f(x) = 0.$$

Il procedimento spiegato innanzi ci conduce a considerare gl'invarianti irrazionali del tipo

$$a_0 | 1 2 | | 3 4 |.$$

Il quoziente

$$\frac{| 1 3 | | 2 4 |}{| 2 3 | | 1 4 |} = (1 2 3 4),$$

che non dipende da a_0 , è un invariante assoluto dipendente dalla posizione e (per la sua irrazionalità anche) dall'ordine dei quattro punti. In esso si riconosce il *birapporto* dei punti suddetti, che è notoriamente invariante per trasformazioni proiettive della retta.

Se si muta l'ordine dei quattro punti, per le 24 permutazioni di $1, 2, 3, 4$, il birapporto assume 6 valori *general-*

mente distinti; designatone uno qualunque con α , i detti valori sono:

$$1) \quad \alpha, \quad 1 - \alpha, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad \frac{1}{1 - \alpha}, \quad \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Il birapporto $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4)$ resta invariato per 4 permutazioni diverse

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 1\ 4\ 3) = (3\ 4\ 1\ 2) = (4\ 3\ 2\ 1),$$

corrispondentemente a 3 involuzioni permutabili π_1, π_2, π_3 determinate dalle coppie

$$12 \cdot 34, \quad 13 \cdot 24, \quad 14 \cdot 23$$

che trasformano in se stessa la quaterna G_4 .

Le tre coppie di punti doppi di codeste involuzioni, si separano armonicamente a due a due; essendo $\pi_2\pi_1 = \pi_3$ ecc., esse formano un gruppo di 6 punti, G_6 , che viene rappresentato dall'annullarsi di un covariante del 6° ordine di f , detto *covariante T* (cfr. § 7).

Le tre involuzioni π_1, π_2, π_3 , insieme all'identità, formano un gruppo ⁽¹⁾ di 4 operazioni Γ_4 che (per un motivo che vedremo più avanti) si denomina *gruppo trirettangolo* e dal KLEIN viene chiamato *Vierergruppe*. Infatti il prodotto di due fra le operazioni suddette appartiene al gruppo:

$$\begin{aligned} \pi_2\pi_1 &= \pi_3, & \pi_3\pi_1 &= \pi_2, & \pi_3\pi_2 &= \pi_1 \\ \pi_1^2 &= \pi_2^2 &= \pi_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

In generale il gruppo Γ_4 è il gruppo di tutte le proiettività della retta che lasciano invariato il G_4 .

Ma — per valori particolari di α — i 6 valori del birapporto possono non essere più distinti, e corrispondentemente si avrà un gruppo più ampio di proiettività che lasciano invariato il G_4 . Ciò accadrà evidentemente se il G_4 è costi-

(1) Le nozioni elementari che qui ricorrono sui gruppi di operazioni, e in particolare di proiettività, trovansi definite in ENRIQUES, « G. proiettiva ». Appendice.

Per uno sviluppo della teoria dei gruppi di sostituzioni in rapporto alla risoluzione delle equazioni algebriche, cfr.

L. BIANCHI. « Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche ». Pisa, Spoerri, 1900.

tuito da un ciclo di una proiettività ciclica del terz'ordine e da un suo punto unito, oppure da un ciclo di una proiettività del quart'ordine (1). Viceversa risulterà che questi sono i soli casi possibili.

Per determinare i valori particolari di α corrispondenti alla possibilità sopra indicata, osserviamo che i 6 valori 1) si deducono da uno qualunque di essi, designato con α , mediante le due sostituzioni fondamentali

$$\alpha' = 1 - \alpha,$$

$$\alpha'' = \frac{1}{\alpha}.$$

Se fra i 6 valori 1) ve ne sono due uguali dovrà dunque aversi per uno di questi valori, α ,

$$\alpha = 1 - \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

oppure

$$\alpha = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \pm 1,$$

o finalmente

$$1 - \alpha = \frac{1}{\alpha}, \quad \text{cioè} \quad \alpha^2 - \alpha + 1 = 0,$$

$$\alpha = 1 + \varepsilon \quad \text{o} \quad \alpha = 1 + \varepsilon^2 \quad \text{con} \quad \varepsilon = e^{\frac{\pm 2\pi i}{3}} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Corrispondentemente a questi valori di α si ottengono le *quaterne particolari il cui birapporto ha meno di 6 valori*, cioè:

I) la quaterna con un *punto doppio* per cui il birapporto ha i *tre* valori distinti:

$$1, \quad 0, \quad \infty;$$

II) la quaterna *armonica*, per cui il birapporto ha solo *tre* valori:

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad 2;$$

(1) Ricordiamo che una proiettività π si dice ciclica d'ordine o di periodo n se ripetuta n volte (e non meno) dà luogo all'identità ($\pi^n = 1$). Cfr. ENRIQUES, op. c., § 42. BIANCHI, « G. analitica », § 103, oppure il § 8 del Libro 2° di questo volume, ove si troverà pure l'equazione della proiettività ciclica d'ordine n coi punti uniti $0, \infty$ sotto la forma $x' = \varepsilon x$

con $\varepsilon = e^{\frac{2t\pi i}{n}}$, (t primo con n).

III) la quaterna *equianarmonica* (così designata da LUIGI CREMONA) per cui il birapporto ha solo *due* valori:

$$1 + \varepsilon, \quad \frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 + \varepsilon^2.$$

(I detti valori essendo immaginari una quaterna equianarmonica non può avere più di tre punti reali).

Osservazione. Il birapporto di una quaterna di punti G_4 , $\alpha = (1234)$, diventa *indeterminato*, e può ritenersi avere qualunque valore, soltanto nel caso in cui la G_4 possieda un *punto triplo* (o in particolare *quadruplo*).

Tutte le G_4 armoniche sono proiettive fra loro, e una tale G_4 risulta proiettiva a se stessa per $\frac{24}{3} = 8$ permutazioni diverse, quindi *il gruppo delle proiettività che lasciano invariata una G_4 armonica è un Γ_8 che consta:*

- 1) dell'identità;
- 2) delle 3 involuzioni permutabili $\pi_1 \pi_2 \pi_3$, in cui si corrispondono le tre coppie di G_4 ;
- 3) di altre 2 involuzioni permutabili ω_1, ω_2 aventi come coppie di punti doppi le due coppie di punti di G_4 che si separano armonicamente;
- 4) di 2 proiettività cicliche del 4° ordine ottenute moltiplicando una $\pi = (23)(14)$ per una $\omega = (13)$ o $\omega = (24)$:

$$(23)(14) \cdot (13) = (1234).$$

In tutto si hanno così

$$3 + 2 + 2 + 1 = 8$$

proiettività.

La possibilità di riguardare un gruppo armonico G_4 come ciclo d'una proiettività del 4° ordine appare anche dall'osservazione che un tale G_4 è proiettivamente identico al gruppo armonico

$$(1 \quad -1 \quad i \quad -i),$$

che è un ciclo della proiettività $x' = ix$.

Tutte le G_4 equianarmoniche sono proiettive fra loro e una tale G_4 risulta proiettiva a se stessa per $\frac{24}{2} = 12$ permutazioni, quindi *il gruppo delle proiettività che lasciano invariata una G_4 equianarmonica è un Γ_{12} che consta:*

riate una quaterna G_4 equianarmonica è un Γ_{12} che consta delle 12 proiettività seguenti:

1) l'identità;

2) 3 involuzioni permutabili π_1, π_2, π_3 ;

3) 8 proiettività cicliche del 3° ordine che posseggono un punto unito appartenente a G_4 e scambiano ciclicamente gli altri tre punti. Infatti per una scelta opportuna delle coordinate si può assumere come tipo della G_4 equianarmonica la quaterna $(0 \ 1 \ \varepsilon \ \varepsilon^2)$ avente il birapporto

$$(0 \ 1 \ \varepsilon \ \varepsilon^2) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} : \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} = 1 + \varepsilon^2;$$

codesta G_4 è trasformata in sè dalla proiettività ciclica del 3° ordine coi punti uniti $0, \infty$:

$$y = \varepsilon x.$$

Riassumendo:

Una quaterna G_4 armonica è ciclo di una proiettività del 4° ordine (e della sua inversa).

Una quaterna G_4 equianarmonica è costituita da un ciclo di una proiettività del 3° ordine (e della sua inversa) e da un suo punto unito; la G_4 può considerarsi così definita in 4 modi diversi, prendendo come unito uno qualunque dei suoi punti.

Ora ritorniamo alla considerazione generale del gruppo di 4 punti:

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) = 0.$$

Possiamo scrivere una espressione razionale del birapporto

$$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = (1234),$$

la quale rimanga invariata quando si cambia α in uno degli altri valori 1); tale è l'espressione

$$J = \frac{4(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(x + 1)^2(1 - 2x)^2(2 - \alpha)^2},$$

dove il fattore numerico, 4, è determinato in guisa che si abbia, per

$$\alpha = 1, \quad J = 1.$$

Si avrà così un invariante assoluto J che, essendo funzione simmetrica di 1, 2, 3, 4, si esprimerà razionalmente pei coefficienti di f . Questo invariante razionale J si designa generalmente col nome di *invariante assoluto* di f .

Osservazione. Ogni altro invariante assoluto razionale di f è funzione razionale del birapporto α che determina la condizione di proiettività di due quaterne, e — restando invariato quando si sostituisce ad α uno degli altri valori 1) — si prova dipendere razionalmente da J .

Per quanto si è detto nel § 2, J si esprime come quoziente di due forme invarianti dello stesso grado; dimostriamo che *si ha precisamente*:

$$J = \frac{4i^3}{j^2}$$

dove i, j sono due invarianti *razionali* interi, rispettivamente di grado 2, 3.

A tale scopo scriviamo

$$1 - \alpha + \alpha^2 = 1 - \frac{|13| |24|}{|23| |14|} + \frac{|13|^2 |24|^2}{|23|^2 |14|^2}.$$

Moltiplichiamo per l'invariante irrazionale

$$a_0^2 |23|^2 |14|^2$$

che è sempre *diverso da zero* se la quaterna è costituita di punti distinti; si avrà un invariante

$$\begin{aligned} i &= a_0^2 |23|^2 |14|^2 (1 - \alpha + \alpha^2) = \\ &= a_0^2 \{ |23|^2 |14|^2 + |13|^2 |24|^2 - |23| |14| |13| |24| \}. \end{aligned}$$

Vogliamo provare che i è un invariante *razionale* (di peso 4 e di grado 2).

Perciò considereremo

$$\begin{aligned} i' &= a_0^2 \{ |14|^2 |23|^2 + |12|^2 |34|^2 - |14| |23| |12| |34| \} \\ i'' &= a_0^2 \{ |12|^2 |34|^2 + |13|^2 |24|^2 - |12| |34| |13| |24| \}; \end{aligned}$$

sarà $i + i' + i''$ funzione simmetrica delle radici $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ e quindi razionale nei coefficienti di f ; basterà dimostrare che

$$i = i' = i'',$$

e perciò

$$i = \frac{1}{3}(i + i' + i'').$$

La verifica che $i = i'$ (e analogamente $i = i''$) si compie facilmente osservando che, ove si dividano le espressioni di i e i' per $|23|^2|14|^2$, viene

$$\frac{|13|^2|24|^2}{|23|^2|14|^2} - \frac{|13||24|}{|23||14|} = (1234)^2 - (1234) = \alpha^2 - \alpha$$

$$\frac{|12|^2|34|^2}{|23|^2|14|^2} - \frac{|12||34|}{|23||14|} = (1324)^2 - (1324) = (1 - \alpha)^2 - (1 - \alpha),$$

$$\alpha^2 - \alpha = (1 - \alpha)^2 - (1 - \alpha).$$

Ciò posto avremo

$$J = \frac{4i^3}{j^2}$$

dove

$$j = a_0^3 |23|^3 |14|^3 (z + 1)(1 - 2z)(2 - \alpha);$$

e — essendo J , i invarianti razionali — risulterà pure j un invariante razionale (di peso 6 e di grado 3).

Quanto all'espressione di $i = \frac{1}{3}(i + i' + i'')$, vediamo che essa si compone di due parti contenenti simmetricamente le $|ik|$, ciascuna delle quali porge già un invariante razionale (dello stesso grado 2 e peso 4). Ma questi due invarianti non sono distinti perchè differiscono soltanto per un fattore numerico (come vedremo più tardi accadere necessariamente per due invarianti razionali qualsiasi di grado 2); si verifica infatti che

$$|23|^2|14|^2 + |13|^2|24|^2 + |14|^2|23|^2 + |12|^2|34|^2 + |12|^2|34|^2 + |13|^2|24|^2$$

e

$$|23||14| + |13||24| + |14||23||12||34| + |12||34||13||24|,$$

ove siano divisi per $|23|^2|14|^2$, danno rispettivamente

$$1 + \alpha^2 + 1 + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha + 4$$

e

$$\alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + \alpha(1 - \alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1,$$

cioè la prima espressione risulta quattro volte la seconda;

quindi, sostituendo a quest'ultima il suo valore, si ottiene l'espressione normale di i :

$$i = \frac{a_0^2}{2} \left\{ |23|^2 |14|^2 + |13|^2 |24|^2 + |12|^2 |34|^2 \right\}.$$

Questa espressione permette il calcolo effettivo di i per i coefficienti di f , calcolo che eseguiremo riferendoci a un caso particolare nel parag.° seg.°, limitandoci qui a indicarne il risultato:

$$i = a_2^2 - 3a_1 a_3 + 12a_0 a_4.$$

In modo analogo si può dare una espressione simmetrica di j per le differenze $|ik|$, che si lascia ridurre alla espressione normale

$$j = a_0^3 \Sigma |12|^2 |34|^2 |13| |42| = |12|^2 |34|^2 |13| |42| + |13|^2 |24|^2 |12| |43| + \\ + |14|^2 |23|^2 |12| |34| + |12|^2 |43|^2 |14| |32| + \\ + |13|^2 |42|^2 |14| |23| + |14|^2 |32|^2 |13| |24|,$$

dove i termini della somma si deducono l'uno dall'altro con le sostituzioni che permettono di dedurre da (1234) gli altri 5 valori del birapporto. Si troverebbe

$$j = 27a_1^2 a_4 + 27a_0 a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0 a_2 a_4 - 9a_1 a_2 a_3,$$

formula che si può scrivere anche:

$$j = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 12a_0 & 3a_1 & 2a_2 \\ 3a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ 2a_2 & 3a_3 & 12a_4 \end{vmatrix}.$$

L'annullarsi dell'invariante di secondo grado, i , esprime la condizione perchè il gruppo $f(x) = 0$ sia equianarmonico:

$$1 - \alpha + \alpha^2 = 0;$$

L'annullarsi dell'invariante di terzo grado j dice invece che il gruppo è armonico:

$$(\alpha + 1)(1 - 2\alpha)(2 - \alpha) = 0.$$

Dall'espressione dell'invariante assoluto: $J = \frac{4i^3}{j^2}$, si deduce che il discriminante di f :

$$D = a_0^6 \Pi |ik|^2 \equiv 4i^3 - j^2,$$

dove col segno \equiv designamo l'uguaglianza a meno di un fattore numerico k .

Infatti, la condizione perchè la quaterna $f=0$ abbia un punto doppio ($x=1$), si esprime ugualmente ponendo $D=0$ oppure $J=1$, cioè

$$J = \frac{4(1-x+x^2)^3}{(x+1)^2(1-2x)^2(2-x)^2} = \frac{4i^3}{j^2} = 1,$$

$$4i^3 - j^2 = 0.$$

Si può calcolare effettivamente il fattore numerico k che entra nella relazione precedente, riferendoci, per esempio, al gruppo armonico $(0, 1, \frac{2}{3}, 2)$ dato da:

$$x(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2) = 0;$$

infatti in questo caso si trova

$$j = 0 \quad (\text{condizione di armonicità})$$

$$i = \frac{4}{3}, \quad D = \frac{16^2}{27^2}, \quad k = \frac{4i^3}{D} = 27.$$

Si conclude che si ha in generale

$$27D = 4i^3 - j^2.$$

(Per il calcolo del fattore numerico k può anche valere la quaterna armonica di punti $(-1, 1, 0, \infty)$ rappresentata dall'equazione in cui $a_0 = 0$:

$$x^3 - x = 0,$$

dove si ponga $a_0 \alpha_4 = 1$, conformemente al parag.° seguente).

Osservazione. Giova notare che la possibilità di esprimere D per mezzo di i, j si riconosce *a priori* in base al fatto che una quaterna di punti ammette un solo invariante assoluto, funzione del birapporto, e quindi possiede soltanto *due invarianti indipendenti*; altrimenti le potenze convenienti di due invarianti, divise per potenze di un terzo invariante, fornirebbero *due invarianti assoluti*.

5. Risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado. — La nota risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, $f(x) = 0$,

si può riattaccare alla teoria proiettiva delle quaterne di punti sulla retta, mediante le considerazioni che seguono.

Anzitutto osserviamo che l'equazione cubica

$$x^3 = t,$$

ammette tre radici

$$\alpha = \sqrt[3]{t}, \quad \varepsilon\alpha, \quad \varepsilon^2\alpha,$$

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

per modo che la terna $x^3 - t = 0$ costituisce un ciclo della proiettività del 3° ordine

$$x' = \varepsilon x$$

(e della sua inversa $x' = \varepsilon^2 x$) dotata dei punti uniti

$$x = 0, \quad x = \infty;$$

in altre parole la terna di punti

$$x^3 = t,$$

presa insieme ai punti $0, \infty$ dà luogo ad una quaterna equianarmonica (cfr. §. 4).

Reciprocamente, se un'equazione cubica rappresenta tre punti che insieme a $0, \infty$ formino un gruppo equianarmonico, cioè tre punti

$$\alpha, \quad \varepsilon\alpha, \quad \varepsilon^2\alpha,$$

l'equazione stessa è della forma

$$(x - \alpha)(x - \varepsilon\alpha)(x - \varepsilon^2\alpha) = x^3 - \alpha^3 = x^3 - t = 0.$$

Ciò posto si consideri un'equazione cubica generale, che — com'è noto — può ridursi alla forma

$$1) \quad x^3 - px + q = 0.$$

Designando con $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ le tre radici, troviamo i due punti m, n che insieme ad $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ formano una quaterna equianarmonica, cioè i due punti uniti della proiettività ciclica del 3° ordine $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ ed insieme dell'inversa $(\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2$.

A tale scopo scriviamo l'equazione di una proiettività ciclica del 3° ordine che abbia come punti uniti, non più $0, \infty$,

ma m, n ; sarà (in luogo di $x^3 = t$)

$$2) \quad \left(\frac{x-m}{x-n} \right)^3 = t.$$

L'equazione 1) si deve identificare colla 2) quando m, n soddisfino ad un'equazione di 2° grado in y che si ottiene annullando l'invariante i della quartica $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - y)$.

Questa equazione di 2° grado, da cui dipende la risoluzione dell'equazione cubica, viene senz'altro espressa dall'invariante suddetto che contiene simmetricamente le radici $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ e perciò dipende razionalmente dai coefficienti p, q . Ma si può anche identificare direttamente le equazioni 1) 2), dopo avere sviluppato la 2) che assume la forma

$$3) \quad x^3 - 3 \frac{m - tn}{1 - t} x^2 + 3 \frac{m^2 - tn^2}{1 - t} x - \frac{m^3 - tn^3}{1 - t} = 0.$$

Avremo così le equazioni di condizione:

$$4) \quad m - tn = 0$$

$$5) \quad \frac{m^2 - tn^2}{1 - t} = -\frac{p}{3}$$

$$6) \quad \frac{m^3 - tn^3}{1 - t} = -q.$$

Dividendo 6) per 5) e ponendo al posto di t il valore $\frac{m}{n}$ ricavato dalla 4) si ha

$$7) \quad \frac{m^3 - mn^2}{m^2 - mn} = m + n = \frac{3q}{p}$$

e ponendo nella 5) al posto di t il suo valore $\frac{m}{n}$ si ha:

$$8) \quad \frac{m^2 - mn}{1 - \frac{m}{n}} = -m n = -\frac{p}{3}$$

Dalle 7) e 8) si deduce che m e n sono le radici dell'equazione di secondo grado

$$9) \quad y^2 - \frac{3q}{p} y + \frac{p}{3} = 0,$$

e quindi è

$$10) \quad \begin{cases} m = \frac{1}{2} \left(+\frac{3q}{p} + \sqrt{\frac{9q^2}{p^2} - \frac{4p}{3}} \right) \\ n = \frac{1}{2} \left(+\frac{3q}{p} - \sqrt{\frac{9q^2}{p^2} - \frac{4p}{3}} \right). \end{cases}$$

Pertanto dalla 2) si ha

$$x = \frac{m - n\sqrt[3]{t}}{1 - \sqrt[3]{t}}$$

e sostituendo a m e n i valori dati dalla 10) si trova per x la nota espressione in funzione dei coefficienti p e q dell'equazione proposta.

Notiamo infine che l'equazione risolvente di 2° grado 9) si ottiene anche annullando il covariante hessiano di

$$f(x_1 x_2) = x_1^3 - px_1 x_2^2 + qx_2^3,$$

che è

$$\begin{aligned} H &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x_1 & -2px_2 \\ -2px_2 & -2px_1 + 6qx_2 \end{vmatrix} = \\ &= -12px_1^2 + 36qx_1 x_2 - 4p^2 x_2^2; \end{aligned}$$

dividendo per $12px_2^2$ e ponendo $\frac{x_1}{x_2} = y$, l'equazione $H = 0$ si riduce alla 9).

La teoria della risoluzione dell'equazione quartica, si può far dipendere dallo studio delle quaterne di punti (x_1, x_2, x_3, x_4) con un punto all'infinito: $x_4 = \infty$.

Una tale quaterna è rappresentata dall'equazione cubica

$$f_3(x) = x^3 - px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0,$$

considerata come limite d'un'equazione $f_4 = 0$ di 4° grado, ove si ponga

$$a_0 \alpha_4 = 1, \quad a_0 = 0, \quad \alpha_4 = \infty,$$

e quindi

$$a_0 |14| = a_0 |24| = a_0 |34| = 1.$$

Ora si possono calcolare gl'invarianti di f_4 :

$$i = \frac{1}{2} \Sigma |12|^2 |34|^2 = \frac{1}{2} (|12|^2 + |23|^2 + |31|^2),$$

$$j = \Sigma |12|^2 |34|^2 |13| |42| = -|12|^2 |13| - |13|^2 |12| + \\ + |23|^2 |12| + |12|^2 |32| + |13|^2 |23| + |32|^2 |13|;$$

si trova

$$i = \Sigma x_i^2 - \Sigma x_i \alpha_h.$$

Ma per una nota formola di NEWTON

$$\Sigma x_i^2 = (\Sigma x_i)^2 - 2 \Sigma x_i \alpha_h,$$

e qui (essendo il coefficiente di x^2 , $-\Sigma x_i = 0$):

$$\Sigma x_i^2 = -2 \Sigma x_i \alpha_h,$$

$$i = -3 \Sigma x_i \alpha_h,$$

cioè

$$i = 3p,$$

d'accordo col fatto che per $p=0$ le radici di $f=0$, cioè $\sqrt[3]{q}$, $\varepsilon \sqrt[3]{q}$, $\varepsilon^2 \sqrt[3]{q}$, formano, come già abbiamo notato, un gruppo equianarmonico insieme al punto $x = \infty$.

Con un calcolo analogo si trova

$$j = 27q,$$

d'accordo col fatto che per $q=0$, le radici di $f=0$ sono

$$0, \quad +\sqrt{p}, \quad -\sqrt{p}$$

e formano un gruppo armonico insieme col punto $x = \infty$.

In luogo dei calcoli effettivi che forniscono i e j , possiamo osservare che le relazioni scritte innanzi risultano dimostrate *a priori*, in base al fatto che le condizioni di equianarmonicità e di armonicità si traducono in

$$p = 0, \quad q = 0.$$

$$\text{Infatti si avrà} \quad i = kp^s, \quad j = hq^r,$$

dove h , k sono fattori numerici. Ma il discriminante del-

l'equazione di 4° grado con una radice all'infinito, ove si faccia $a_0 z_4 = 1$, diviene il discriminante dell'equazione cubica

$$D = 4p^3 - 27q^2;$$

sarà quindi

$$4i^3 - j^2 = 4k^3 p^{3s} - 27h^2 q^{2r},$$

e si deduce intanto

$$r = s = 1,$$

$$i = kp, \quad j = hq.$$

Ora per valutare i fattori numerici k, h , si consideri il gruppo dotato di punto doppio $(-2, 1, 1, \infty)$, che è dato dall'equazione

$$x^3 - 3x - 2 = 0;$$

per esso è

$$p = 3 \quad q = -2,$$

e si trova

$$i = \frac{1}{2}(3^2 + 3^2 + 0^2) = 9$$

$$j = -54,$$

quindi

$$k = 3, \quad h = 27.$$

Dalle espressioni ottenute di p, q per i e j , segue che, quando è data un'equazione di 4° grado

$$f_4(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

che rappresenta una quaterna di punti G_4 , si può formare *razionalmente* l'equazione cubica (*risolvente*)

$$f_3(x) = x^3 - px + q = 0,$$

cui corrisponde una quaterna G_4' con un punto all'infinito, proiettiva a G_4 . Questo risultato è tanto più degno di nota in quanto che i coefficienti della sostituzione lineare

$$x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta},$$

che fa passare da G_4 a G_4' , dipendono dalle coordinate dei punti di G_4 cioè sono irrazionali.

Calcolate le radici della *risolvente* $f_3 = 0$, si possono scrivere le equazioni delle tre involuzioni che hanno per

centro un punto della terna corrispondente e scambiano gli altri due punti; tali involuzioni sono trasformate dalla sostituzione $x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}$ nelle tre involuzioni che lasciano invariato il G_4 , e così le equazioni di queste risultano espresse *razionalmente* per le radici di $f_3 = 0$.

Su tale circostanza si può fondare *la risoluzione dell'equazione di quarto grado*. Infatti, suppongasi che la quaterna di punti rappresentata dall'equazione $f_4(x) = 0$ sia trasformata in se stessa da una involuzione

$$xx' - m(x + x') + n = 0.$$

Cambiando x, x' in $x + m, x' + m$, questa involuzione diviene

$$xx' = m^2 - n = k,$$

e l'equazione $\bar{f}_4(x) = 0$, trasformata della data, avrà le radici

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \frac{k}{\alpha_1}, \alpha_4 = \frac{k}{\alpha_2}.$$

Scriviamo

sarà
$$\bar{f}_4(x) = x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3 = 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -b_1$$

ponendo

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 = b_2 - 2k;$$

risulterà

$$y_1 = \alpha_1 + \alpha_3, \quad y_2 = \alpha_2 + \alpha_4,$$

$$y_1 + y_2 = -b_1$$

$$y_1y_2 = b_2 - 2k$$

e perciò y_1, y_2 saranno le radici dell'equazione di 2° grado:

$$y^2 - b_1y + (b_2 - 2k) = 0;$$

in funzione di queste radici si esprimeranno le $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, risolvendo ancora l'equazione di 2° grado

$$z + \frac{k}{z} = y,$$

cioè

$$z^2 - yz + k = 0.$$

In conclusione, dopo determinate le radici della risolvibile cubica $f_3(x) = 0$, la risoluzione dell'equazione proposta, $f_4(x) = 0$, si riduce a quella di due successive equazioni di 2° grado, e si ritrovano così le formole note.

Della risoluzione dell'equazione di 4° grado e della sua riduzione ad una risolvibile cubica, avremo luogo d'incontrare più avanti un'altra più chiara illustrazione geometrica.

6. Nota sul calcolo effettivo delle forme invariantive e sulla rappresentazione simbolica. — L'espressione degli invarianti e covarianti di $f(x)$ o di $f(x_1, x_2)$ per mezzo delle *distanze* (differenze) $|0k|$, $|ik|$, costruite colle radici di $f(x) = 0$ permette, come abbiamo notato, il calcolo effettivo di codeste forme.

Ma a supplire calcoli laboriosi determinandone *a priori* il risultato, si può anche far uso del procedimento di *notazione simbolica* di CAYLEY-ARONHOLD, che risponde a questa esigenza economica porgendo un modo sistematico di formazione.

Nella teoria geometrica delle equazioni, che è una *analisi qualitativa*, il problema di codeste formazioni si considera in qualche modo come secondario, giacchè occorre di rado di fondare conclusioni sopra il calcolo effettivo di un invariante o di un covariante, bastando in generale di sapere che esso dipende razionalmente dai coefficienti di f , o che questi entrano nella sua espressione ad un certo grado ecc.

Nondimeno interessa:

1°) di saper leggere le espressioni simboliche d'invarianti e di covarianti, quali si trovano in memorie e trattati classici;

2°) — e soprattutto — di conoscere l'idea fondamentale contenuta nella rappresentazione simbolica, che costituisce un fecondo *principio di conservazione formale rispetto alle degenerazioni*.

Consideriamo una forma f di ordine n , cioè il polinomio omogeneo (di grado n in x_1, x_2)

$$1) \quad \sum a_{ik} x_1^i x_2^k \quad (i + k = n),$$

dove la sommatoria contiene

$$\frac{n!}{i!k!} = \binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i}$$

termini simili in $x_1^i x_2^k$, che si raccolgono in un unico termine ponendo in evidenza il fattore numerico $\binom{n}{i}$.

Consideriamo in particolare la forma f degenerata in un potenza n^{ma} , che scriveremo

$$2) \quad f = a_x^n = (a_1 x_2 + x_1 a_2)^n.$$

La forma 1) s'identifica colla 2), se sono compatibili le equazioni

$$3) \quad a_1^i a_2^k = a_{ik},$$

in cui a_1, a_2 compaiono come incognite.

Ogni forma, espressione razionale omogenea, φ , di grado g nelle a_{ik} , si riduce per la 2) ad una forma di grado ng nelle a_1, a_2 :

$$\varphi_g(a_{ik}) = \varphi_g(a_1^i a_2^k), \quad (i + k = n),$$

e dalla $\varphi_g(a_1^i a_2^k)$ potrà dedursi la $\varphi_g(a_{ik})$ ove sieno messi in evidenza, senza ambiguità, i prodotti $a_1^i a_2^k$ da sostituire con a_{ik} .

Volendo adoperare sistematicamente il procedimento di calcolo fondato sulla indicata sostituzione, riguarderemo la forma degenera 2) come una *notazione simbolica* della 1), scrivendo dunque — anche per forme non degeneri — l'eguaglianza simbolica

$$f = a_x^n,$$

e fissando che questa rappresentazione debba servire a formare delle espressioni razionali dei prodotti $a_1^i a_2^k$ ($i + k = n$), nelle quali i prodotti suddetti sieno da sostituire coi coefficienti effettivi a_{ik} .

Ora vediamo come la rappresentazione simbolica conduca ad un procedimento di formazione delle forme invariantive, di f . Per semplicità di discorso ci riferiremo agli invarianti, e stabiliremo i seguenti teoremi:

Lemma di CAYLEY (1). Se

$$I = I(a_0 a_1 \dots a_n)$$

è un invariante della forma

$$f = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n,$$

(1) Fourth memoir upon quantics (Philos. Transactions, 148).

e se si considera un'altra forma

$$\varphi = b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + b_n x_2^n,$$

l'espressione

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial I}{\partial a_1} b_1 + \dots + \frac{\partial I}{\partial a_n} b_n$$

sarà un invariante simultaneo di f , φ .

Infatti, se si cambia nell'espressione di f , a_i in $a_i + \lambda b_i$, si otterrà un invariante della forma $f + \lambda \varphi$, cioè per una sostituzione lineare di modulo M che trasformi

$$\begin{aligned} & a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots, \quad b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots \\ \text{in} \quad & a'_0 x_1^n + a'_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots, \quad b'_0 x_1^n + b'_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots, \end{aligned}$$

si avrà

$$\begin{aligned} I(a'_0 + \lambda b'_0, a'_1 + \lambda b'_1, \dots, a'_n + \lambda b'_n) = \\ = M^n I(a_0 + \lambda b_0, a_1 + \lambda b_1, \dots, a_n + \lambda b_n). \end{aligned}$$

Questa equazione vale qualunque sia λ e perciò, sviluppando i due membri per le potenze di λ , dovranno uguagliarsi i coefficienti di λ^r per $r = 0, 1, 2, \dots$. Ma, uguagliando i coefficienti di λ , si ottiene

$$\frac{\partial I}{\partial a'_0} b'_0 + \frac{\partial I}{\partial a'_1} b'_1 + \dots + \frac{\partial I}{\partial a'_n} b'_n = M^n \left(\frac{\partial I}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial I}{\partial a_1} b_1 + \dots + \frac{\partial I}{\partial a_n} b_n \right),$$

ciò che dimostra l'enunciato.

Il lemma precedente si estende al caso in cui I sia un invariante simultaneo di due o più forme, f, f_1, \dots , che contenga i coefficienti a di una di queste, f , ad un grado $g > 1$; aggiungendo una forma $\varphi = b_0 x_1^n + b_1 x_2^{n-1} + \dots$, si prova analogamente che $\Sigma \frac{\partial I}{\partial a_i} b_i$ è un invariante simultaneo di $\varphi f f_1 \dots$.

Se ora s'identifica la forma φ con f ponendo dunque

$$b_i = a_i,$$

l'invariante $\Sigma \frac{\partial I}{\partial a_i} b_i$ — per il teorema d'EULERO — ricade in I .

Ciò posto il nostro lemma conduce ad un procedimento ripetibile da cui si deduce il

Teorema. Ad ogni invariante I (razionale intero) di grado g (> 1), di una forma f , corrisponde un invariante simultaneo di g forme $ff_1 \dots f_{g-1}$, che contiene linearmente i coefficienti di queste forme. Se le forme $f_1 f_2 \dots f_{g-1}$ s'identificano con f , questo invariante lineare si riduce ad I . In altre parole:

Ogni invariante di grado g (> 1) della forma f , si può considerare come limite di un invariante lineare simultaneo di g forme, che s'identifichino con f .

Facciamo un altro passo introducendo la notazione simbolica delle forme.

Si abbiano dunque g forme rappresentate simbolicamente da

$$f = a_x^n, \quad f_1 = b_x^n, \quad f_2 = c_x^n, \dots$$

Se I è un invariante lineare simultaneo di $ff_1 f_2 \dots$, esso si può esprimere simbolicamente come un invariante lineare simultaneo delle forme degeneri $a_x^n, b_x^n, c_x^n, \dots$, e quindi come un invariante delle forme lineari $a_x, b_x, c_x \dots$ omogeneo di grado n rispetto alle coppie di variabili $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2 \dots$.

Invarianti simultanei siffatti si ottengono combinando le *distanze* dei punti $a_x = 0, b_x = 0, c_x = 0, \dots$ rese omogenee, cioè i determinanti elementari

$$(ab) = (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad (ac) = (a_1 c_2 - a_2 c_1), \dots,$$

i quali — per una sostituzione lineare su $x_1 x_2$ — si riproducono moltiplicati semplicemente per il modulo. Reciprocamente ogni invariante simultaneo I delle forme lineari $a_x, b_x, c_x \dots$, omogeneo di grado n rispetto alle coppie di variabili $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2 \dots$, si esprime per mezzo dei suddetti determinanti elementari, potendosi ripetere qui l'osservazione fondamentale del § 3. Infatti I , diviso per $a_1^n b_1^n c_1^n \dots$, si riduce ad una funzione razionale di $\frac{a_2}{a_1}, \frac{b_2}{b_1}, \frac{c_2}{c_1} \dots$ che deve restare assolutamente invariata per le traslazioni $x = x' + k$, le quali sono particolari sostituzioni lineari di modulo 1, e quindi dipende soltanto dalle differenze

$$\frac{b_2}{b_1} - \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{c_2}{c_1} - \frac{a_2}{a_1} \dots;$$

si deduce che I è una combinazione razionale dei determinanti $(ab), (ac) \dots$. c. d. d.

Si avrà dunque

$$I = \sum \alpha \Pi(ab),$$

dove gli α designano coefficienti numerici.

In ogni prodotto $\Pi(ab)$, ciascun simbolo a compare n volte, sicchè — sviluppando — ogni termine della somma si ridurrà al tipo

$$a_1^i a_2^k b_1^r b_2^s,$$

dove

$$i + k = r + s = \dots = n.$$

Quindi, sostituendo ad

$$a_1^i a_2^k, \quad b_1^r b_2^s, \dots$$

i coefficienti

$$a_{ik} = b_{ik} = \dots$$

si otterrà l'espressione effettiva di I per i coefficienti di f .

Riassumendo si ha il

Teorema fondamentale di CLEBSCH ⁽¹⁾. Ogni invariante di grado $g (> 1)$ di una forma f , si può rappresentare simbolicamente, introducendo g forme equivalenti

$$f = a_x^n = b_x^n = \dots,$$

mediante una somma di prodotti di determinanti simbolici del tipo (ab) , (ac) , (bc) , ..., in guisa che ciascun termine della somma contenga tra i suoi fattori n volte i simboli a , b , c , ...

Reciprocamente una espressione di questo tipo, rappresenta un invariante di grado g della forma f .

Osservazione. Non esistono invarianti lineari d'un'unica forma f perchè — ponendo $f = a_x^n$ — si ridurrebbero ad invarianti della forma lineare a_x ; infatti un punto non può soddisfare ad alcuna condizione proiettiva, quale sarebbe espressa — per il punto $a_x = 0$ — dall'annullamento di un siffatto invariante.

Il teorema fondamentale si estende senza difficoltà ai covarianti:

(1) *Journal für Math.* Bd 59.

Ogni covariante (razionale intero) di

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots,$$

ammette una rappresentazione simbolica in cui entrano fattori del tipo (ab) e c_x .

7. Applicazioni ed esempi: forme invariantive delle binarie cubiche e quartiche. — Mostriamo l'importanza del teorema fondamentale di CLEBSCH sulla rappresentazione simbolica delle forme invariantive, accennando rapidamente come si costruiscano i principali invarianti e covarianti delle forme $f = a_x^n$ d'ordine $n = 2, 3, 4$.

Cominciamo dagli *invarianti*.

La forma *quadratica* $f(x_1, x_2)$ possiede un solo invariante, proporzionale al quadrato della distanza fra i due punti $f = 0$, cioè il *discriminante* D .

Questo è un invariante di 1° grado nei coefficienti di f , quindi si otterrà la sua rappresentazione simbolica ponendo

$$f = a_x^2 = b_x^2.$$

C'è un unico invariante lineare delle due forme, che è

$$(ab)^2,$$

perciò si avrà (a meno di un fattore numerico arbitrario)

$$D \equiv (ab)^2.$$

Sviluppando e ponendo

$$f = \sum_{ik} x_1^i x_2^k = a_0 x_1^2 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$

viene

$$D \equiv (ab) = \frac{1}{2} (a_1^2 - 4a_0 a_2),$$

che si accorda colla espressione del § 2.

Per due forme quadratiche distinte

$$f = a_x^2, \quad \varphi = b_x^2$$

si trova similmente un unico invariante lineare simultaneo, cioè l'*armonizzante* $(ab)^2$, che uguagliato a 0 esprime la sepa-

razione armonica delle due coppie

$$f = 0, \quad \varphi = 0.$$

Passiamo alla *forma cubica*:

$$f = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = \dots$$

Non vi possono essere invarianti di 2° grado, perchè un tale invariante sarebbe rappresentato da

$$(ab)^3,$$

mentre *il determinante* (ab) *cambia di segno permutando i simboli equivalenti a, b e quindi si ha identicamente*

$$(ab)^3 = - (ab)^3 = 0.$$

Un invariante del 3° grado sarebbe una somma di termini del tipo

$$(ab)^i (bc)^r (ca)^s$$

dove

$$i + r = r + s = i + s = 3.$$

Queste equazioni non sono solubili con numeri interi i, r, s , fra i quali non ve ne siano due nulli; perciò la f non possiede invarianti del 3° grado. Ciò è d'accordo coll'osservazione generale che le forme d'ordine dispari (n), posseggono soltanto invarianti di grado (g) pari, essendo $ng = 2p$ (§. 2).

Un invariante di f , del 4° grado, è espresso da

$$(ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd),$$

ed è facile vedere che non ce ne sono altri essenzialmente diversi.

Del resto la forma cubica, non avendo invarianti assoluti, non può possedere due invarianti che non sieno l'uno potenza dell'altro. Da ciò si deduce che l'invariante precedente (a meno di un fattore numerico) esprime il *discriminante* D di f , il quale — non avendo radici multiple — non può certo ridursi ad una potenza d'una forma di grado inferiore; dunque si può prendere:

$$D \equiv (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd) \equiv$$

$$\equiv a_1^2 a_2^2 - 18a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 - 27a_0^2 a_3^2.$$

Passiamo alla *forma quartica*:

$$f = a_{xx}^4 = b_{xx}^4 = c_{xx}^4.$$

Qui si ha un *primo invariante di 2° grado*,

$$(ab)^4,$$

che è evidentemente unico e perciò coincide con i a meno di un fattore numerico; si trova, sviluppando i calcoli

$$i \equiv (ab)^4 \equiv a_2^2 - 3a_1 a_3 + 12a_0 a_4$$

d'accordo con l'espressione del §. 4.

Si ha poi un *secondo invariante, del 3° grado*,

$$(ab)^2(bc)^2(ca)^2,$$

ed è chiaro che un prodotto del tipo

$$(ab)^i(bc)^r(ca)^s$$

non può dare un invariante del 3° grado di f se non per

$$i + r = r + s = i + s = 4$$

$$i = r = s = 2,$$

cioè non vi sono altri invarianti di 3° grado di f .

L'invariante trovato coinciderà dunque con j , a meno d'un fattore numerico, e si avrà, in accordo col § 4:

$$j \equiv (ab)^2(bc)^2(ca)^2 \equiv 27a_1^2 a_4 + 27a_1 a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0^3 a_4 - 9a_1 a_2 a_3.$$

Citeremo ora i principali *covarianti* delle forme binarie cubiche e quartiche: la forma quadratica non possiede covarianti all'infuori delle potenze di se stessa, giacchè le infinite proiettività che lasciano invariata una coppia di punti (scambiandoli fra loro o lasciandoli fermi) non lasciano invariato alcun altro gruppo di punti della retta.

Per una binaria *cubica*

$$f = a_{xx}^3 = b_{xx}^3 = c_{xx}^3$$

non esistono covarianti del prim'ordine. Ciò risulta geometricamente dal fatto che i due punti uniti delle proiettività

cicliche che lascian invariata una terna di punti (ABC) sono scambiati fra loro dall'involuzione che ha un punto doppio in A e come coniugati i punti BC , sicchè non esiste alcun punto che sia unito insieme per le proiettività lascianti invariata la terna (ABC). Ma quando si procede col metodo di formazione simbolica, si presenta a prima vista un covariante del primo ordine

$$a_x(ab)(ac)(bc)^2;$$

occorre dunque mostrare che questo è identicamente nullo. Ora scambiando i simboli

$$a \text{ e } b, \quad a \text{ e } c$$

e sommandò le tre espressioni equivalenti così ottenute, si trova

$$a_x(ab)(ac)(bc)^2 = \frac{1}{3} (ab)(ac)(bc) \{ (bc)a_x + (ca)b_x + (ab)c_x \},$$

dove si ha l'identità

$$(bc)a_x + (ca)b_x + (ab)c_x = \begin{vmatrix} a_x & a_1 & a_2 \\ b_x & b_1 & b_2 \\ c_x & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

essendo i termini della prima colonna del determinante combinazioni lineari di quelli delle altre due:

$$(a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots).$$

Esiste per f un solo covariante di 1° ordine (a prescindere da un fattore invariante arbitrario); questo è lo hessiano di f (§. 2) e si esprime con

$$H = (ab)^2 a_x b_x,$$

come si trova anche sviluppando

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

nel modo che vedremo per le quartiche.

Posto uguale a 0, H rappresenta i due punti che presi insieme alla terna $f=0$ costituiscono un gruppo equianarmonico (cfr. §. 5); si ha qui una nuova dimostrazione di tale proprietà, dall'osservazione che i due punti suddetti formano l'unica coppia covariante di $f=0$.

Lo jacobiano di f e H è un covariante cubico di f ,

$$Q = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix};$$

posto

$$f = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3$$

e

$$H = (bc)^2 b_x c_x,$$

si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3a_1 a_x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3a_2 a_x^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = (bc)^2 (b_1 c_x + c_1 b_x), \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} = (bc)^2 (b_2 c_x + c_2 b_x),$$

quindi

$$Q \equiv (ab)^2 (cb) c_x^2 a_x.$$

Per trovare il significato geometrico di $Q=0$, basta notare che la f non possiede altri covarianti cubici all'infuori di f stessa e di Q , d'accordo coll'annullarsi identicamente di

$$(ab)(bc)(ca) a_x b_x c_x.$$

Infatti è agevole riconoscere che il gruppo Γ_6 delle proiettività (del terz'ordine ed involutorie) che lasciano invariata la terna di punti (ABC) rappresentata da $f=0$, lasciano invariata soltanto un'altra terna, costituita dai coniugati armonici A', B', C' dei singoli punti A, B, C rispetto agli altri due. Si deduce che $Q=0$ rappresenta appunto la terna $(A'B'C')$.

Si dimostra poi che tutte le forme invariantive di f si possono esprimere razionalmente in funzione del discriminante D , e di f, H, Q .

Per una binaria *quartica*

$$f = a_x^4 = b_x^4 = c_x^4,$$

si riconosce anzitutto che *non esistono covarianti di ordine dispari 1, 3....*; ciò vale in generale per ogni *forma d'ordine m pari*, stante la relazione $2p = ng - m$ fra grado g , peso p , ordine m , che abbiamo trovata al § 2.

Ora si vede che per la quartica non esistono neppure covarianti del secondo ordine, annullandosi identicamente $(ab)^3 a_x b_x$, ed $(ab)(ac)(bc) a_x^2$, che cambiano segno per le trasposizioni dei simboli (ab) e (bc) . Invece vi è luogo a considerare un covariante del 4° ordine di f che è fornito dallo hessiano di cui vedremo più tardi l'interpretazione geometrica. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6a_1^2 a_x^3, \dots$$

quindi

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_x^2 a_1^2 & a_x^2 a_1 a_2 \\ b_x^2 b_2 b_1 & b_x^2 b_2^2 \end{vmatrix} = (ab) a_1 b_2 a_x^2 b_x^2;$$

e, siccome questa espressione non deve mutare permutando gli indici a b , si avrà

$$H \equiv (ab)^2 a_x^2 b_x^2.$$

Lo jacobiano della quartica f e dello hessiano H porge un covariante del sesto ordine

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix} \equiv (ab)^2 (bc) c_x^3 a_x^2 b_x.$$

Vedremo nel reguito che $T = 0$ rappresenta le tre coppie di punti doppi delle tre involuzioni che lasciano invariata la quaterna $f = 0$.

Si dimostra che tutte le forme invariantive della quartica f si esprimono razionalmente per i, j, f, H, T .

8. Nota storica sulla teoria degli invarianti. — Cfr. i trattati di:

G. SALMON « Lessons introductory to the modern higher algebra » 4^a ed. Dublino 1885 (ed. tedesca aumentata di

W. FIEDLER « Algebra der linearen Transformationen », Lipsia, 1877).

A. CLEBSCH « Theorie der binären algebraischen Formen » Lipsia, 1872. « Vorlesungen über Geometrie » per cura di F. LINDEMANN, Lipsia, 1875, trad. francese, Parigi, 1879.

FAÀ DI BRUNO « Teoria delle forme binarie » (traduzione tedesca con note bibliografiche di WALTER e NOETHER Lipsia 1881).

P. GORDAN « Vorlesungen über Invariantentheorie », Lipsia, 1885-1887.

H. WEBER « Lehrbuch der Algebra », Braunschweig 1895-96, (trad. francese. Parigi, 1898).

A. CAPELLI « Lezioni sulla teoria delle forme algebriche », Napoli, 1902.

Vedi pure i rapporti storici di

FR. MEYER « Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung » Berlino 1890-91, 1892 (trad. italiana, Giornale di Matematiche, Napoli, vol. 1 32-33).

H. E. TIMERDING in Pascal's Repertorium I Kap. V, Lipsia e Berlino 1910.

La teoria degli invarianti (estesa più tardi in varii sensi ed anche — fuori dei confini dell'algebra — in ordine ai gruppi di trasformazioni qualsiasi) trae origine essenzialmente dallo sviluppo della Geometria proiettiva (PONCELET, CHASLES, MÖBIUS, PLÜCKER, STEINER) e dalla necessità di tradurre in forma analitica le proprietà proiettive degli enti algebrici; una menzione speciale meritano a questo proposito la teoria del birapporto e la polarità. Tuttavia l'invarianza per trasformazioni lineari dei discriminanti delle forme quadratiche di due e tre variabili, si era già presentata in ricerche aritmetiche di LAGRANGE (Memorie di Berlino 1773) e di GAUSS « Disquisitiones arithmeticae » (1801).

Gli inizi della teoria degli invarianti propriamente detta si sogliono riattaccare alle memorie di BOOLE (Cambridge Math. Journal 1841-42-44) in cui l'autore considera in generale i discriminanti di forme d'ordine qualunque e ne deduce la formazione di altri invarianti simultanei di più forme.

A queste prime ricerche seguono quelle di CAYLEY, iniziate nel 1845, riprese e proseguite nelle « Memoirs upon quantics » 1854-1861 (Cfr. nelle « Collected math. papers » particolarmente le memorie 4^a e 5^a del 1858), quindi le ricerche di

ARONHOLD (*Journal für Mathematik* 1849-1863), di SYLVESTER (1851-54), di CLEBSCH (iniziate nel 1861), di GORDAN (iniziate nel 1868) ecc.

CAYLEY ed ARONHOLD hanno osservato che le forme invariantive, p. es. una

$$\psi(x_1 x_2 a_0 a_1 \dots a_n)$$

relativa ad una binaria

$$f(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n,$$

si possono definire come *soluzioni razionali di certe equazioni differenziali*, che si ottengono eliminando $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dall'espressione di ψ trasformata mediante la sostituzione

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2' \end{cases}$$

L'uso del *simbolismo* per il calcolo effettivo degli invarianti compare già in CAYLEY; ma ARONHOLD (1858) lo ha riattaccato alla possibilità di sostituire alle forme considerate delle potenze di forme lineari. A CLEBSCH (1861) appartiene il teorema fondamentale della rappresentazione simbolica, che permette di definire le forme invariantive come prodotti simbolici di determinanti di tipo dato.

Ancora a proposito della definizione delle forme invariantive $\psi(x_1 x_2 a_0 a_1 \dots a_n)$, deve essere menzionato il teorema dovuto ad ARONHOLD (*Journ. für Math.* Bd 62), e di cui si hanno dimostrazioni di CLEBSCH, GRAM, CAPELLI, che: « se trasformando $\psi(x_1 x_2 a_0 a_1 \dots a_n)$ con una sostituzione lineare

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2' \end{cases}$$

la ψ si riproduce moltiplicata per una funzione $\theta(\alpha\beta\gamma\delta)$, deve essere θ una potenza del modulo $M = \alpha\delta - \beta\gamma$. Il contenuto essenziale di questo teorema è il teorema che abbiamo dato al § 2 che « le funzioni invariantive sono i primi membri di equazioni invarianti, esprimenti col loro annullamento proprietà proiettive di $f(x_1 x_2) = 0$ ».

Vogliamo ora specialmente notare i progressi conseguiti nella teoria degli invarianti in ordine a due problemi gene-

rali: il problema dell'*equivalenza*, e la questione della *base* di un sistema di forme invariantive.

Il problema generale dell'*equivalenza* o trasformabilità con sostituzioni lineari per forme, e fasci di forme, quadratiche e bilineari con un numero qualunque di variabili, ha dato luogo ad un celebre teorema di WEIERSTRASS (Berliner Berichte 1868). Per forme d'ordine superiore, CLEBSCH (Math. Annalen Bd II, 1870) sembra pel primo aver proposta la questione se l'uguaglianza degli invarianti assoluti, necessaria secondo ARONHOLD, sia anche condizione sufficiente per la possibilità di trasformare linearmente l'una forma nell'altra. Riferendoci al caso delle forme binarie d'ordine n , $f(x_1, x_2)$, $\varphi(x_1, x_2)$, si tratta di esprimere le condizioni di proiettività dei due gruppi di n punti:

$$f = 0, \quad \varphi = 0,$$

Se i due gruppi non contengono punti doppi, cioè *per forme con discriminante non nullo*, l'*equivalenza* è caratterizzata dall'uguaglianza di $n - 3$ invarianti assoluti indipendenti, funzioni dei birapporti che i punti d'un gruppo formano con tre di essi; gl'invarianti relativi indipendenti sono $n - 2$. Ma la proprietà anzidetta non sussiste più in generale per forme con discriminante nullo. Infatti ci sono delle *proprietà proiettive* dei gruppi di punti che non si possono esprimere semplicemente annullando degli invarianti, ma si traducono nell'*annullamento identico di covarianti*.

L'esempio più semplice è offerto dalla condizione perchè una terna o una quaterna di punti si riduca ad un solo punto (triplo o quadruplo). Infatti la binaria cubica f ha un solo invariante, il discriminante, annullando il quale si esprime che la terna $f = 0$ possiede un punto doppio, sicchè manca il modo di esprimere, col'annullamento d'un altro invariante, che la terna si riduca ad un punto triplo. Similmente se una quaterna $f = 0$ ha un punto triplo, si annullano insieme i due invarianti indipendenti i ed j , l'invariante assoluto diventando indeterminato, e manca un altro invariante per mezzo del quale possa esprimersi l'esistenza d'un punto quadruplo. Vedremo più tardi che la condizione perchè una forma f d'ordine n si riduca alla potenza n^{ma} d'una forma lineare, si esprime in generale annullando identicamente il covariante

hessiano. La risposta generale al problema d'equivalenza è offerta dal

Teorema di GRAM ⁽¹⁾. *Le condizioni d'equivalenza di due forme o sistemi di forme (con un numero qualunque di variabili) si esprimono in tutti i casi uguagliando i loro invarianti e annullando identicamente i medesimi covarianti.*

Passiamo al problema della base di un sistema di forme invariantive.

Dopochè CAYLEY e SYLVESTER avevano dimostrato che le forme binarie d'ordine $n \leq 4$ posseggono un numero finito di formazioni invarianti di cui tutte le altre sono combinazioni *razionali*, CAYLEY nel 1856 affrontò la questione generale concernente il sistema degl'invarianti e covarianti d'una forma qualunque e credette erroneamente di poter dare una risposta negativa alla domanda se esista un *numero finito* di forme (costituenti una *base* del sistema) per cui tutte le forme invariantive si esprimano *razionalmente* ».

GORDAN nel 1868 dimostrò per la prima volta il teorema fondamentale che « il sistema degl'invarianti, e covarianti d'una binaria qualunque ammette sempre come base un numero finito di forme ». La dimostrazione dell' A. (da lui stesso ripresa e semplificata più tardi) consiste in una serie di procedimenti di costruzione effettiva delle forme invariantive appartenenti ad una data f , fondati sulla rappresentazione simbolica; vi giuocano in specie i così detti *scorrimenti* (CAYLEY) di due forme $f = a_x^n \varphi = b_x^m$ ($n \geq m$), cioè i covarianti simultanei rappresentati simbolicamente da $(ab)^h a_x^{n-h} b_x^{m-h}$ (per $h = 0, 1, \dots, m$).

Soltanto nel 1886 MERTENS (Journal für Math. Bd. 100), abbandonando il punto di vista simbolico dell'Algebra formale e l'interesse pratico dell'esecuzione dei calcoli, ha introdotto l'idea di fondare il teorema di GORDAN sull'espressione degl'invarianti e covarianti per mezzo della radici di f . La dimostrazione, in questo ordine d'idee, è stata ulteriormente semplificata da HILBERT (Math. Annalen, Bd 33, 1888).

Diamo un rapido cenno di questa dimostrazione del teorema di GORDAN, riferendoci — per semplicità di discorso — agl'invarianti (razionali interi) di

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n).$$

(1) Math. Annalen, Bd 7.

Ogni invariante I è un aggregato simmetrico delle differenze delle radici $|ik|$, e precisamente di prodotti del tipo

$$P = |12|^{e_{12}} |13|^{e_{13}} \dots |n-1, n|^{e_{n-1, n}},$$

dove ciascuno degl'indici $1, 2, \dots, n$ deve figurare uno stesso numero di volte.

Questa condizione si traduce in un sistema di equazioni lineari diofantee

$$\begin{aligned} e_{12} + e_{13} + \dots + e_{1n} &= e_{21} + e_{23} + \dots + e_{2n} = \dots \\ &= e_{n1} + e_{n2} + \dots + e_{n, n-1}. \end{aligned}$$

Tutte le soluzioni (interi e) positive di questo sistema si compongono con un numero finito m di esse, mediante combinazioni lineari a coefficienti interi e positivi

$$e_{ik} = p_1 e_{ik}^{(1)} + p_2 e_{ik}^{(2)} + \dots + p_m e_{ik}^{(m)}.$$

Se ora P_r designa l'invariante irrazionale

$$P_r = \prod_{i, k} |ik|^{e_{ik}^{(r)}},$$

P_r soddisferà ad un'equazione algebrica di grado $n!$ e, per un noto teorema, una potenza qualsiasi di P_r di ordine p_r , si potrà esprimere come funzione lineare omogenea delle potenze d'ordine $0, 1, \dots, n! - 1$, con coefficienti funzioni razionali intere delle somme di potenze simili

$$P_r + \dots, P_r^2 + \dots, P_r^{n!-1} + \dots$$

In virtù dell'espressione delle e_{ik} mediante le $e_{ik}^{(r)}$ anzidette, l'invariante I si riduce ad una funzione simmetrica

$$I = \Sigma \omega_1^{p_1} \omega_2^{p_2} \dots \omega_m^{p_m};$$

quindi — introducendo i valori indicati delle potenze $\omega_r^{p_r}$ — si riconosce che I è funzionale intera d'un numero finito d'invarianti costruiti in modo analogo, dove nessuno degli esponenti di ω_r supera $n!$.

Il teorema di GORDAN si estende al caso di forme e di sistemi di forme con un numero qualunque di variabili. Pre-

cisamente HILBERT (Math Annalen Bd 36, 1890) è giunto a tale estensione stabilendo il seguente teorema generalissimo:

Ogni sistema di forme ad n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$:

$$F_1 F_2 \dots,$$

costruito con una legge qualsiasi, contiene sempre un numero finito di forme

$$F_{i_1} F_{i_2} \dots F_{i_m},$$

costituenti una *base*; cioè tutte le F_s si possono esprimere come combinazioni lineari:

$$F_s = A_{s_1} F_{i_1} + A_{s_2} F_{i_2} + \dots + A_{s_m} F_{i_m},$$

dove le A sono pure forme delle x (i cui coefficienti appartengono al campo di razionalità definito dai coefficienti delle F).

Chiederemo queste brevi note ricordando che i più semplici invarianti e covarianti delle forme binarie d'ordine $n = 3, 4$ sono stati trovati da EISENSTEIN (Journal für Math. 1844). La teoria sistematica di codeste forme, con riferimento alla risoluzione delle rispettive equazioni, è stata svolta da CAYLEY (1858).

Nel seguito daremo notizie sulla polarità, e sulle forme ternarie in rapporto alla teoria delle curve piane.

CAPITOLO II

Interpretazioni fondamentali dell'equazione $f(xy) = 0$: curve e corrispondenze.

9. Le equazioni $f(xy) = 0$ e le curve piane. — Consideriamo l'equazione algebrica

$$f(xy) = 0$$

dove f è un polinomio di grado n complessivamente, cioè l'equazione

$$1) \quad f(xy) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{0,n}y^n + \\ + a_{n-1,0}x^{n-1} + \dots + a_{0,n-1}y^{n-1} + \dots + a_{0,0} = 0$$

dove i coefficienti a_{ik} posson esser reali o complessi.

Interpreteremo x e y come le due coordinate di un punto, reale o complesso secondo che esse sono ambedue reali o una almeno complessa. Ciò posto chiameremo *curva (algebrica)* ⁽¹⁾ $f(xy) = 0$ l'insieme dei punti *reali* e *complessi* che soddisfano l'equazione 1) cioè le cui coordinate annullano il polinomio f .

Può accadere che il polinomio $f(xy)$ sia decomponibile nel prodotto di due altri polinomi f_1 e f_2 sì che si abbia

$$f(xy) = f_1(xy)f_2(xy):$$

in questo caso le coppie di valori x e y che annullano f sono tutte e sole le coppie che annullano f_1 o f_2 : abbiamo

(1) La definizione delle curve *algebriche*, distinte dalle *trascendenti*, risale a R. DESCARTES (« La Géométrie », Leida, 1637 - Oenves, Parigi, 1902, pg. 369). Però la considerazione dei punti immaginari delle curve è molto posteriore, essendosi introdotta soltanto nel secolo scorso, nelle scuole di MONGE e di PLÜCKER (più tardi nella teoria sintetica di STAUDT), mentre gli sviluppi di GAUSS e di CAUCHY hanno posto l'immaginario a base della moderna teoria delle funzioni.

quindi che la curva $f(xy) = 0$ è costituita da tutti e soli i punti che appartengono alla $f_1(xy) = 0$ o alla $f_2(xy) = 0$; la curva $f(xy) = 0$ dicesi *riducibile* o *spezzata* nelle due componenti f_1 e f_2 .

Più in generale, se

$$f(xy) = f_1(xy)f_2(xy) \dots f_r(xy)$$

diremo che la curva $f(xy)$ è spezzata nelle r curve f_1, f_2, \dots, f_r ; se poi i polinomi f_1, f_2, \dots, f_r non sono tutti diversi, sì che si può scrivere

$$f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \dots f_i^{r_i}$$

dove

$$f_1, f_2, \dots, f_i$$

sono tutti diversi fra loro, allora diremo che la curva $f = 0$ si compone della curva $f_1 = 0$ contata r_1 volte, più la curva $f_2 = 0$ contata r_2 volte, ..., più la curva $f_i = 0$ contata r_i volte.

Secondo NEWTON (1676), le curve algebriche si classificano secondo il loro « ordine »: si definisce come *ordine di una curva* (algebraica)

$$f(xy) = 0,$$

il *grado complessivo della* $f(xy)$ rispetto ad x, y . Se una curva algebrica si *spezza* in due o più altre, l'ordine della curva è dato dalla *somma degli ordini* delle curve che la compongono.

L'ordine di una curva algebrica si può definire geometricamente come il numero delle intersezioni della curva con una retta generica del suo piano. Sussiste infatti il

Teorema: *Una curva d'ordine n è incontrata in n punti da una retta generica.*

Consideriamo la retta

$$ax + by + c = 0:$$

essa incontra la

$$f(xy) = 0$$

nei punti le cui coordinate soddisfano al sistema

$$2) \quad \begin{cases} f(xy) = 0 \\ ax + by + c = 0. \end{cases}$$

Ricaviamo y dalla seconda di queste due equazioni e sostitui-

tuiamo il valore nella prima; otteniamo così un'equazione in x :

$$3) \quad A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

dove i coefficienti A_0, A_1, \dots, A_n risultano dipendenti dai parametri a, b, c che determinano la retta.

In particolare

$$A_0 = a_{n,0} - a_{n-1,1} \frac{a}{b} + a_{n-2,2} \frac{a^2}{b^2} + \dots + (-1)^n a_{0,n} \frac{a^n}{b^n}.$$

Tolti quindi valori particolari dei parametri a e b , risulta il coefficiente

$$A_0 \neq 0,$$

e l'equazione 3) ha n radici. Parimente, se f non contiene componenti multiple, tolti valori particolari dei parametri a, b, c , le radici della 3) risulteranno tutte distinte. Possiamo così dire che una retta *generica* del piano incontra la $f(xy) = 0$ in n punti.

Supponiamo ora di far variare con continuità i parametri a, b, c che individuano la retta

$$ax + by + c = 0.$$

Potrà accadere che per posizioni particolari della retta, un certo numero r delle radici della 3), $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, vengano a coincidere in un'unica radice α , che risulterà multipla d'ordine r ; allora i punti P_1, P_2, \dots, P_r , intersezioni della curva $f(xy) = 0$ con la retta, corrispondenti alle radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, coincideranno in un'unico punto P , il quale verrà considerato assorbente r intersezioni coincidenti della curva $f(xy) = 0$ con la retta.

Supponiamo in fine che la retta assuma una di quelle posizioni particolari per la quale A_0 è nullo. Corrispondentemente l'equazione 3) si riduce di grado $n - 1$, ed una delle sue radici se ne va all'infinito. In questo caso noi diremo che la *retta ha comune con la curva* $f(xy) = 0$ *un punto all'infinito*.

Per illuminare questa convenzione giova introdurre al posto di x e y le coordinate omogenee $\frac{x_1}{x_3}$ e $\frac{x_2}{x_3}$. La 3) allora diviene

$$A_0 \left(\frac{x_1}{x_3} \right)^n + \dots + A_n = 0,$$

e moltiplicando per x_3^n si riduce alla *forma d'ordine n*:

$$3') \quad f(x_1 x_2 x_3) = A_0 x_1^n + A_1 x_3 x_1^{n-1} + \dots + A_n x_3^n = 0.$$

Se $A_0 = 0$, la 3') si annulla per $x_3 = 0$. Essendo $x_3 = 0$ l'equazione della retta all'infinito, si ha che, quando $A_0 = 0$, la nostra retta e la curva f hanno un punto comune sulla retta all'infinito. Naturalmente se, invece del solo coefficiente A_0 , si annullassero tutti i primi r coefficienti, con che $x_3 = 0$ diverrebbe una radice r -pla della 3'), diremo che r delle intersezioni sono riunite all'infinito. Finalmente notiamo che, se una curva d'ordine n è incontrata da una retta in $n+1$ punti, essa contiene tutta la retta, cioè è *riducibile* nella retta e in una curva residua d'ordine $n-1$.

Infatti si assumano gli assi in modo che sia

$$y = k$$

l'equazione della retta che ha $n+1$ intersezioni con la curva d'ordine n

$$f(xy) = 0;$$

si ha allora che l'equazione di grado n :

$$f(x, k) = 0$$

ha $n+1$ radici, e quindi è identicamente soddisfatta.

Consideriamo ora $f(xy)$ come un polinomio in y

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n$$

i cui coefficienti

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

sono funzioni di x .

Questo polinomio si annulla per $y = k$, quindi è divisibile per $y - k$, cioè

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n = (y - k)(B_0 y^{n-1} + \dots + B_{n-1})$$

dove i coefficienti B sono funzioni razionali intere della x : quindi, ponendo

$$B_0 y^{n-1} + \dots + B_{n-1} = f_1(xy),$$

si ha

$$f(xy) = (y - k)f_1(xy).$$

Abbiamo così che la curva $f(xy) = 0$ si spezza nella retta

$y = k$ e nella curva residua

$$f_1(xy) = 0$$

che deve avere l'ordine $n - 1$ in quanto l'ordine di una curva riducibile è uguale alla somma degli ordini delle parti che la compongono.

Dopo ciò, ricordando le due convenzioni precedenti sulle intersezioni multiple e quelle all'infinito, potremo dire che « Una curva di ordine n è intersecata da ogni retta che non ne faccia parte in n punti, debitamente computandosi gli eventuali punti multipli e gli eventuali punti all'infinito.

Se nella equazione algebrica $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ si pongono al posto delle variabili le *coordinate di rette*, coefficienti della equazione

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

l'equazione

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0$$

rappresenta una *curva involuppo* le cui proprietà si desumono da quelle della $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ secondo il *principio di dualità* della *Geometria Proiettiva* ⁽¹⁾: all'ordine della curva $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ corrisponde la *classe* dell'involuppo $F(u_1, u_2, u_3) = 0$, che è il numero delle rette di questo che passano per un punto del piano (non facente parte dell'involuppo).

Consideriamo i coefficienti della $f(xy) = 0$ come parametri variabili: supponiamo che al loro variare la $f(xy)$ si riduca a una $\bar{f}(xy)$ di grado $n - r$. Noi considereremo ancora *convenzionalmente* la $\bar{f}(xy)$ come di grado n , e considereremo la curva

$$\bar{f}(xy) = 0$$

come composta della curva d'ordine $n - r$ i cui punti soddisfano la $\bar{f}(xy) = 0$ e della retta all'infinito contata r volte.

Questa convenzione è d'accordo con la convenzione analoga stabilita per i gruppi di punti sulla retta, e si può giustificare tanto notando che sopra ogni retta del piano r delle intersezioni con la curva $f(xy) = 0$ se ne vanno all'infinito quando l'equazione di questa si riduce di grado $n - r$, quanto

(1) Cfr. p. es. ENRIQUES. *G. Proiettiva*. Cap. II e CASTELNUOVO. *G. Analitica*. Parte III, Cap. I.

introducendo le coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 in luogo delle coordinate $x \left(= \frac{x_1}{x_3} \right), y \left(= \frac{x_2}{x_3} \right)$.

Infatti, se l'equazione di grado n

$$f(xy) = 0$$

si riduce all'equazione

$$\bar{f}(xy) = 0$$

di grado $n - r$, l'equazione

$$f(x_1 x_2 x_3) = x_3^n f(xy) = 0$$

si riduce all'equazione

$$x_3^r \bar{f}(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad \text{dove} \quad \bar{f}(x_1 x_2 x_3) = x_3^{n-r} \bar{f}(xy),$$

cioè all'equazione di una curva che si spezza nella retta $x_3 = 0$ contata r volte e nella curva residua

$$\bar{f}(x_1 x_2 x_3) = 0$$

d'ordine $n - r$.

Alla considerazione di curve riducibili contenenti come parte la retta all'infinito si è condotti anche dalle trasformazioni proiettive.

Dalla definizione geometrica dell'ordine di una curva, si desume che l'ordine di una curva non cambia per proiezioni della curva, in quanto una retta che tagli in n punti la curva si proietta in una retta che taglia ancora in n punti la proiezione della curva. Questo fatto si verifica assai facilmente se la curva è espressa in coordinate omogenee con l'equazione

$$f(x_1 x_2 x_3) = \sum a_{ik} x_1^i x_2^k x_3^{n-i-k} = 0.$$

Infatti, operando la trasformazione omografica

$$4) \quad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases}$$

il polinomio

$$f(x_1 x_2 x_3)$$

viene cambiato in un polinomio

$$f'(y_1 y_2 y_3)$$

che ha il medesimo grado del polinomio f e quindi la curva

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

e la sua proiezione

$$f'(y_1 y_2 y_3) = 0$$

hanno il medesimo ordine.

Supponiamo ora che la curva sia rappresentata in coordinate cartesiane con l'equazione

$$f(xy) = 0.$$

Operiamo l'omografia 4), cioè l'omografia

$$4) \quad \begin{cases} x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}. \end{cases}$$

Con questo la $f(xy) = 0$ viene trasformata nell'equazione

$$\left(\frac{1}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \right)^n \bar{f}(x'y') = 0.$$

Allo stesso modo che nel caso analogo per i gruppi di punti sulla retta, la $\bar{f}(x'y')$ risulta di grado n , come la $f(xy)$, se la $f(xy)$ non contiene il fattore $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}$; se invece la $f(xy)$ contiene il fattore $(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^r$, cioè se la curva $f(xy) = 0$ contiene la retta $a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$ contata r volte, allora la $\bar{f}(x'y')$ si riduce di grado $n - r$.

Siccome con l'omografia 4) la retta $a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$ viene trasportata nella retta all'infinito, così noi dobbiamo sempre riguardare convenzionalmente la $\bar{f}(x'y')$ come di grado n , sommando alla curva

$$\bar{f}(x'y') = 0,$$

di ordine $n - r$, la retta all'infinito contata r volte, per ottenere la trasformata della curva $f(xy) = 0$.

Osservazione. Osserviamo che la trasformazione omografica 4) può anche essere considerata come cambiamento di coordinate.

Consideriamo infatti x e y come coordinate proiettive, cioè consideriamo la coordinata X di un punto P del piano come il birapporto $(\infty 0 U_x X)$, dove U_x e X sono le proiezioni sull'asse x fatte dal punto all'infinito dell'asse y del punto P e del punto (unità) U di coordinate 1, 1, e parimenti riguardiamo la coordinata y dello stesso punto P come il birapporto $(\infty 0 U_y Y)$, dove Y e U_y sono le proiezioni sull'asse x del punto P e del punto U . Ciò posto, la sostituzione 4') equivale evidentemente ad assumere come coordinate x e y del punto P , i birapporti analoghi ai precedenti che si ottengono sostituendo ai punti O, x_∞, y_∞, U , i punti

$$x = \frac{a_{13}}{a_{33}}, y = \frac{a_{23}}{a_{33}}; \quad x = \frac{a_{11}}{a_{31}}, y = \frac{a_{21}}{a_{31}}; \quad x = \frac{a_{12}}{a_{32}}, y = \frac{a_{22}}{a_{32}};$$

$$x = \frac{a_{11} + a_{12} + a_{13}}{a_{31} + a_{32} + a_{33}}, y = \frac{a_{21} + a_{22} + a_{23}}{a_{31} + a_{32} + a_{33}}.$$

10. **Tangente ad una curva.** — Abbiamo visto che una curva d'ordine n

$$f(xy) = f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

è intersecata da ogni retta del suo piano (che non ne faccia parte) in n punti che possono anche non essere tutti distinti.

Supponiamo ora di avere una curva

$$1) \quad f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

irriducibile o, se riducibile, senza parti multiple.

Chiameremo *tangente* in un punto P della f , una retta

$$2) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

che abbia in P due intersezioni riunite.

Questa definizione risale a DESCARTES (« La Géométrie », 1637 — Oeuvres, t. VI, p. 408). Essa può essere interpretata in due modi che conducono ugualmente alla determinazione della tangente:

Si può considerare la tangente in un punto come *limite* di una secante condotta per esso, quando il secondo punto

d'intersezione si avvicina al primo. Questo modo di determinazione, che costituisce una delle origini del Calcolo differenziale, appartiene a BARROW, il maestro di NEWTON, (« *Lectiones Geometricae* » (1669) — 10^a Lezione) (1).

Ma, per le curve *algebraiche*, la definizione cartesiana della tangente si può interpretare anche indipendentemente dai concetti infinitesimali, come ha messo in luce l'abate G. P. DE GUA MALVES nel suo trattato « *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres* » (Parigi, 1740).

Infatti proponiamoci di determinare i parametri a, b, c , in guisa che la retta 2) risulti tangente alla curva 1).

Se la retta

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

ha nel punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ due intersezioni riunite con la curva $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, l'equazione omogenea $f\left(x_1, x_2, \frac{ax_1 + bx_2}{-c}\right) = 0$, (ottenuta sostituendo nella 1) al posto di x_3 il suo valore dato dalla 2), equazione la quale determina le intersezioni della curva $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ con la retta $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, deve avere \bar{x}_1, \bar{x}_2 come radice doppia, cioè il polinomio

$$4) \quad f\left(x_1, x_2, \frac{ax_1 + bx_2}{-c}\right)$$

deve esser divisibile per

$$(x_1 \bar{x}_2 - x_2 \bar{x}_1)^2,$$

e quindi le sue derivate nel punto $x = \bar{x}_1, x = \bar{x}_2$ devono essere

$$5) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 0.$$

(1) Gli scritti di LEIBNIZ e di NEWTON da cui si suol datare la costituzione dell'organismo del Calcolo differenziale sono, com'è noto: LEIBNIZ « *Nova methodus pro maximis et minimis...* » (*Acta Eruditorum*, Lipsia, 1684), NEWTON « *Philosophiae naturalis principia mathematica* » (Ginevra, 1688).

Ma è

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{a}{c}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{b}{c},$$

quindi, perchè la 5) sia soddisfatta, deve essere nel punto $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{b}{c}.$$

Si conclude adunque che i parametri a, b, c della tangente nel punto $(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3)$ sono proporzionali alle:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Se indichiamo ora con

$$y_1, y_2, y_3$$

le coordinate di un punto variabile sulla tangente, e semplicemente con

$$x_1, x_2, x_3$$

le coordinate del punto di contatto, abbiamo l'equazione della tangente nella solita forma

$$6) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0.$$

Dall'esame dell'equazione 6) si vede che *in ogni punto della curva*

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

per il quale non sia contemporaneamente

$$7) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

esiste sempre una e una sola tangente. Nei punti invece per

i quali sia

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

ogni retta ha due intersezioni riunite: questi punti si diranno *doppi* se le rette per essi hanno solo due intersezioni ivi riunite con la curva $f=0$, *multipli* se ne hanno di più.

Sorge quindi la distinzione seguente:

1) Si chiamano *tangenti proprie* (o semplicemente *tangenti*) le rette che hanno due intersezioni riunite con la curva in un punto *semplice* di essa (punto per cui non si annullano contemporaneamente le $\frac{\partial f}{\partial x_i}$);

2) Si chiamano *tangenti improprie*, le rette passanti per un punto doppio (o *i-plo*) della curva, che hanno ivi riunite due (o *i*) intersezioni con la curva.

Notiamo che l'insieme delle tangenti a una curva algebrica

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

costituisce un involuppo algebrico, cioè le coordinate plueckeriane

$$u_1, u_2, u_3$$

delle tangenti alla $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, soddisfano un'equazione algebrica

$$F(u_1 u_2 u_3) = 0.$$

Per costruire effettivamente quest'equazione basta eliminare $x_1 x_2 x_3$ fra le tre equazioni

$$\frac{u_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{u_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{u_3}{\frac{\partial f}{\partial x_3}}$$

che devono essere contemporaneamente soddisfatte, essendo u_1, u_2, u_3 le coordinate della tangente nel punto (x_1, x_2, x_3) variabile sulla $f(x_1 x_2 x_3) = 0$. La curva involuppo $F(u_1 u_2 u_3) = 0$ contiene i fasci delle tangenti improprie che hanno come centri i punti doppi (o multipli) della f . Staccati questi fasci, che figurano nell'equazione F un certo numero di volte, resta la *curva involuppo delle tangenti proprie* della f , e il

grado della sua equazione nelle u_1, u_2, u_3 ne designerà la classe.

Per approfondire la distinzione fra tangenti proprie ed improprie, vogliamo mostrare che le prime si presentano come *limiti di rette secanti* o rette che uniscono due *punti infinitamente vicini* della curva, nel senso dell'analisi infinitesimale (¹).

Infatti sia un punto P di coordinate x_1, x_2, x_3 , punto semplice della curva $f(x_1 x_2 x_3) = 0$: consideriamo la retta

$$8) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0;$$

questa passa per il punto P in quanto, essendo f omogenea (di ordine n), per il *teorema* di EULERO è

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = n f(x_1 x_2 x_3)$$

e quindi la 8) è soddisfatta se al posto di y_1, y_2, y_3 poniamo le coordinate x_1, x_2, x_3 del punto P che appartiene alla curva. Ora il punto *della curva* infinitamente vicino al punto $(x_1 x_2 x_3)$, ha le coordinate

$$x_1 + dx_1, \quad x_2 + dx_2, \quad x_3 + dx_3,$$

dove dx_1, dx_2, dx_3 devono essere tali da annullare, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, la

$$f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3).$$

Ma

$$\begin{aligned} f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) &= \\ &= f(x_1 x_2 x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \varepsilon \end{aligned}$$

dove ε designa un infinitesimo d'ordine superiore; quindi, essendo $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, i differenziali dx_1, dx_2, dx_3 devono esser

(¹) La considerazione della curva come involuppo delle sue tangenti, cioè luogo delle intersezioni di tangenti coincidenti (infinitamente vicine) si può far risalire a DESCARTES (Cfr. la lettera a DE BEAUME in « Lettres de Descartes », t. I, p. 137, segnalata da CHASLES « Aperçu historique... » ed. 3^a, p. 97).

tali che sia

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = 0.$$

Risulta adunque

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} (x_1 + dx_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_2 + dx_2) + \frac{\partial f}{\partial x_3} (x_3 + dx_3) = 0,$$

cioè la retta 8) passa effettivamente per il punto della curva $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ infinitamente vicino a P .

La deduzione precedente, relativa alla curva f , si può anche svolgere col riferirsi ad una equazione $f(xy) = 0$ in coordinate cartesiane, così come si suole nelle applicazioni del calcolo infinitesimale. È lecito anche supporre che la tangente nel punto semplice P non sia perpendicolare all'asse delle x , e quindi che la derivata

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

sia finita, cioè che si abbia

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

In questa ipotesi l'equazione della tangente in $P = (x_0, y_0)$ è

$$9) \quad y = a_0 + a_1(x - x_0)$$

dove

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Se il punto P viene assunto come origine delle coordinate, f assume la forma

$$f(xy) = a_{10}x + a_{01}y + \varphi_2(xy) + \dots + \varphi_n(xy)$$

dove φ_i designa una forma d'ordine i ; in tal caso l'equazione della tangente è

$$a_{10}x + a_{01}y = 0.$$

La tangente in un punto semplice $P = (x_0, y_0)$ rappresenta in *prima approssimazione*, cioè a meno di infinitesimi d'or-

dine superiore ad $x - x_0$, la curva $f(xy) = 0$ nell'intorno del punto P .

Infatti si ha, nell'intorno di quel punto,

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \varepsilon,$$

con ε infinitesimo d'ordine superiore rispetto $x - x_0$.

Si può anche verificare direttamente l'enunciata proprietà, nel modo che segue:

Si metta in P l'origine delle coordinate assumendo gli assi in posizione generica; l'equazione della tangente sarà

$$a_{10}x + a_{01}y = 0 \quad \text{con} \quad a_{10} \neq 0, \quad a_{01} \neq 0.$$

Osserviamo ora che, per un punto della curva prossimo all'origine, x e y sono infinitesimi dello stesso ordine: infatti se fosse, per esempio, y infinitesimo d'ordine superiore ad x , $a_{10}x + a_{01}y$ sarebbe infinitesimo del prim' ordine, mentre $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ sarebbero infinitesimi d'ordine superiore, e non potrebbe quindi essere

$$a_{10}x + a_{01}y + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = 0.$$

Essendo x e y infinitesimi del medesimo ordine, $\varphi_2 + \dots + \varphi_n$, e quindi anche $a_{10}x + a_{01}y$, risultano infinitesimi del second'ordine (almeno). Si conclude che la distanza del punto (xy) dalla retta $a_{10}x + a_{01}y$, che è

$$\frac{1}{\sqrt{a_{10}^2 + a_{01}^2}} (a_{10}x + a_{01}y),$$

risulta pur essa infinitesima del second'ordine.

Si può approssimare ulteriormente la curva f nell'intorno del punto P , tenendo conto degli infinitesimi d'ordine 2, 3,, mediante le *parabole osculatrici* d'ordine 2, 3,, Infatti essendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

con $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, esistono, e sono finite, nel punto, tutte le derivate successive della funzione implicita $y(x)$, e quindi vale nel-

l'intorno del punto x_0 la cosiddetta formula del TAYLOR abbreviata:

$$10) \quad y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_r(x - x_0)^r + \varepsilon$$

dove

$$a_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i y}{dx^i}$$

ed ε designa un infinitesimo d'ordine superiore ad $(x - x_0)^r$.
L'equazione

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_r(x - x_0)^r$$

rappresenta la *parabola d'ordine r osculatrice* alla curva nel punto P , cioè la parabola $y = f(x)$ che può essere determinata dalla condizione di possedere in P un contatto $(r + 1)$ - punto.

Nel caso particolare in cui

$$a_2 = \dots = a_r = 0,$$

la parabola osculatrice d'ordine r si riduce alla retta tangente (completata con la retta all'infinito contata $r - 1$ volte); pertanto una *tangente* che abbia con la curva un *contatto* $(r + 1)$ - punto porge un *approssimazione* della curva stessa a meno di infinitesimi d'ordine $r + 1$.

Nota. La questione di rappresentare con successive approssimazioni l'intorno di un punto semplice di una curva algebrica, si presenta in NEWTON⁽¹⁾, il quale adopera a tale scopo un diagramma, noto sotto il nome di *parallelogramma di Newton*, che dà il modo di formare praticamente le successive equazioni determinanti i coefficienti a_i . Queste considerazioni hanno posto nella storia delle origini del calcolo infinitesimale, segnando in sostanza la scoperta della derivazione delle funzioni implicite, che NEWTON per primo ebbe il merito di considerare, riferendosi a casi concreti di funzioni algebriche. Nella scuola stessa di NEWTON, TAYLOR e MAC-LAURIN⁽²⁾ spinsero più avanti il problema della rappresentazione di una curva algebrica f nell'intorno di un punto, considerandone la rappresentazione per mezzo della serie infinita a cui conduce

(1) « Methodus fluxionum serierum infinitarum ». Londra, 1736.

(2) B. TAYLOR. « Methodus incrementorum directa et inversa ». Londra, 1717. - « C. MAC-LAURIN. A treatise of fluxions ». Edimburgo, 1742.

il processo di approssimazioni accennate (Serie di TAYLOR e di MAC-LAURIN).

Qui giova avvertire che effettivamente la anzidetta serie

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_r(x - x_0)^r + \dots$$

converge in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 , e rappresenta in esso la funzione $y(x)$, cioè che le parabole osculatrici d'ordine crescente hanno per limite la curva in un intorno finito del punto di contatto. Per i rami reali, a cui solo si riferivano i geometri prima del secolo XIX, la cosa si può verificare applicando i criteri che a tale scopo si svolgono nella analisi infinitesimale; ma il problema si tratta più semplicemente nella teoria delle funzioni di variabile complessa, nel senso di CAUCHY e di PUISEUX, come vedremo più avanti.

11. Punti doppi. — Nel paragrafo precedente abbiamo visto che: condizione perchè la curva

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ammetta un punto doppio (o multiplo) è che le tre equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

abbiano una radice comune, e quindi che si annulli la loro risultante, cioè il *discriminante* della f , che — in base a un noto teorema sulla *risultante* — viene di *grado* $3(n - 1)^2$ nei coefficienti di f .

In altro aspetto si presenta la questione di riconoscere se la curva f possenga come punto doppio un punto O in posizione assegnata. Qui giova assumere coordinate cartesiane e porre l'origine nel punto O .

Se la $f(xy) = 0$ passa per l'origine, nel polinomio

$$f(xy) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{0n}y^n$$

deve mancare a_{00} .

Consideriamo una retta per O :

$$y = zx;$$

le sue intersezioni con la $f(xy) = 0$ si ottengono risolvendo l'equazione

$$1) \quad x(a_{10} + a_{01}x) + x^2(a_{20} + a_{11}x + a_{02}x^2) + x^3(a_{30} + \dots) + \dots = 0$$

risultante dalla eliminazione della y fra le due equazioni

$$f(xy) = 0$$

e

$$y = \alpha x.$$

Se la retta $y = \alpha x$ è tangente alla curva, deve avere, nell'origine, due intersezioni riunite con essa, e quindi $x = 0$ deve essere radice doppia della 1), cioè deve essere

$$a_{10} + a_{01}\alpha = 0.$$

Quindi se uno almeno dei coefficienti a_{10} e a_{01} è diverso da zero esiste un' unica tangente nell' *origine*, tangente che, avendo per coefficiente angolare $\alpha = -\frac{a_{10}}{a_{01}}$, ha per equazione l'insieme dei termini di primo grado della f uguagliato a zero, cioè

$$a_{10}x + a_{01}y = 0.$$

Invece, se $a_{10} = a_{01} = 0$, qualunque sia il valore di α la 1) comincia col termine in x^2 , quindi ogni retta $y = \alpha x$ ha, con la curva, due intersezioni riunite nell'origine.

Adunque *condizione perchè l'origine sia un punto doppio* è che

$$a_{10} = a_{01} = 0.$$

Consideriamo ora una curva

$$f(xy) = 0$$

che abbia l'origine come punto doppio: la sua equazione sarà

$$2) \quad a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots = 0.$$

Ci proponiamo di esaminare se esistono rette passanti per l'origine e aventi ivi — non due — ma tre intersezioni riunite.

Supponiamo che

$$3) \quad y = \alpha x$$

sia una retta siffatta.

Eliminando la y dalle 2) e 3), si ha l'equazione

$$x^2(a_{20} + a_{11}x + a_{02}x^2) + x^3(a_{30} + \dots) + \dots = 0,$$

che per ipotesi deve avere $x=0$ come radice tripla. Condizione perchè questo sia è

$$4) \quad a_{20} + a_{11}x + a_{02}x^2 = 0.$$

Siano α_1 e α_2 le due radici di quest'equazione: allora le due rette

$$y = \alpha_1 x$$

$$y = \alpha_2 x$$

hanno con la $f(xy)=0$ un contatto tripunto, e sono le uniche rette siffatte, tranne il caso che sia

$$a_{20} = a_{11} = a_{02} = 0,$$

nella quale ipotesi tutte le rette per l'origine avranno tre intersezioni riunite, e l'origine non sarà più propriamente un punto *doppio*, ma un punto *triplo* per la curva.

Le due rette osculatrici

$$y = \alpha_1 x$$

$$y = \alpha_2 x$$

chiamansi *tangenti principali* del punto doppio. Notiamo che il loro insieme costituisce una conica degenera, che ha per equazione i termini di secondo grado della $f(xy)$ uguagliati a zero, cioè

$$a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 = 0.$$

Le due tangenti principali in un punto doppio saranno distinte se

$$a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} \neq 0,$$

saranno invece coincidenti se

$$a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} = 0.$$

Chiamasi *nodo* (e talvolta anche semplicemente punto doppio) il punto doppio per cui le due tangenti principali siano distinte, *cuspidè* il punto doppio di cui le tangenti

principali coincidano. La distinzione di queste due specie di punti doppi, e i criterî analitici che vi corrispondono, risalgono al DE GUA (op. c., 1740).

Osservazione. Se i coefficienti della $f(xy)$ sono reali, secondo chè

$$a_{11}^2 \geq 4a_{02}a_{20},$$

i due valori di z sono reali o immaginari: quindi dal punto di vista della *realità* i nodi si possono distinguere in *nodi propriamente detti*, quando le due tangenti principali sono reali, e in *punti isolati*, quando le due tangenti principali sono immaginarie.

Singularità duali. Al punto doppio di una curva risponde per dualità la *tangente doppia* e precisamente:

1) Al nodo corrisponde la *tangente doppia propriamente detta* a contatti distinti (reali o no), che cadono generalmente in punti semplici della curva. Come caso particolare può accadere che uno dei punti di contatto si sovrapponga ad un nodo, e la tangente tocchi allora un ramo del nodo stesso.

2) Alla cuspide ordinaria corrisponde la *tangente di flesso* avente un contatto tripunto in un punto semplice della curva (punto di flesso o *flesso*).

Nota. Aggiungeremo ora alcune osservazioni sulla rappresentazione approssimata d'una curva nell'intorno d'un punto doppio.

Anzitutto: *nell'intorno di un nodo la curva può essere sostituita a meno di infinitesimi d'ordine superiore dalle sue due tangenti principali.*

Supponiamo per comodità il nodo posto nell'origine, e gli assi orientati in modo da non coincidere con nessuna delle due tangenti principali. Scriviamo l'equazione della curva, mettendo in evidenza i termini di secondo grado, nella forma

$$(y - z_1x)(y - z_2x) + \varphi_3(xy) + \dots + \varphi_n(xy) = 0, \quad (z_1 \neq z_2 \neq 0),$$

dove $\varphi_3(xy)$ rappresenta il complesso dei termini di terzo grado, ..., $\varphi_n(xy)$ il complesso dei termini di grado n -esimo.

Si può svolgere un ragionamento analogo a quello che si riferisce al caso dei punti semplici nel § 10. Siano x e y

le coordinate di un punto della curva vicino al punto doppio O sarà allora

$$5) \quad (y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x) + \varphi_3(xy) + \dots + \varphi_n(xy) = 0.$$

Anzitutto debbono essere x e y infinitesimi dello stesso ordine, altrimenti il prodotto $(y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x)$ sarebbe infinitesimo d'ordine inferiore alla somma degli altri termini. Si deduce che l'anzidetto prodotto $(y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x)$, comparato ad x , è un infinitesimo del terz' ordine almeno; ma non potendo essere

$$y - \alpha_1 x, \quad y - \alpha_2 x$$

entrambi infinitesimi d'ordine superiore al primo (perchè $(\alpha_1 - \alpha_2)x$ è infinitesimo del prim'ordine), una delle due differenze

$$y - \alpha_1 x, \quad y - \alpha_2 x$$

sarà infinitesima del second'ordine (almeno).

Se osserviamo ora che l'equazione

$$f(\bar{x}y) = 0$$

ha, per \bar{x} infinitesimo, due radici

$$y = y_1, \quad y = y_2$$

prossime allo zero, si conclude che nell'intorno del punto O , i punti della curva si distinguono in due categorie, cioè nei punti le cui coordinate x , y rendono infinitesimo del second'ordine

$$y - \alpha_1 x,$$

e in quelli che rendono infinitesimo del second'ordine

$$y - \alpha_2 x.$$

Si ha così che, nell'intorno di O , vi sono punti della curva che distano di infinitesimi del second'ordine in parte dalla retta

$$y = \alpha_1 x$$

e in parte dalla retta

$$y = \alpha_2 x.$$

Cioè: *nell'intorno del nodo la curva può essere approssi-*

mata, a meno di infinitesimi del second' ordine, dalle sue tangenti principali.

Ciò posto si può dire che l'equazione $f(xy) = 0$, considerata in un intorno finito sufficientemente piccolo del punto O , definisce due funzioni implicite distinte

$$y = y_1(x)$$

$$y = y_2(x),$$

che, per valori reali o complessi di x , sono prossime la prima a

$$y = \alpha_1 x$$

e l'altra a

$$y = \alpha_2 x.$$

Codeste funzioni rappresentano due curve distinte nell'intorno del punto O , che si chiamano *rami della curva*.

Le tangenti

$$y = \alpha_1 x, \quad y = \alpha_2 x$$

che hanno servito a separare i due rami li rappresentano anche, come si è visto, in prima approssimazione, cioè a meno di infinitesimi d'ordine superiore a x ; ora è facile riconoscere che ciascuna delle due funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$, ammette le derivate successive, e perciò i due rami suddetti possono venire rappresentati con approssimazioni d'ordine crescente mediante parabole osculatrici allo stesso modo dell'intorno di un punto semplice. Se non si vuol ricorrere all'analisi degli ordini di infinitesimo, si ottiene effettivamente l'equazione della parabola di second'ordine osculatrice al primo ramo, cioè avente con esso un contatto tripunto, scrivendo l'equazione

$$6) \quad y = \alpha_1 x + \beta_1 x^2,$$

(parabola tangente alla retta $y = \alpha_1 x$) e determinando β_1 in modo che questa venga ad avere quattro intersezioni riunite con la $f(xy) = 0$ nel punto O .

Posto

$$7) \quad f(xy) = (y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x) + \varphi_3(xy) + \dots + \varphi_n(xy)$$

$$\varphi_3 = c_0 x^3 + c_1 x^2 y + c_2 x y^2 + c_3 y^3,$$

si deve annullare il coefficiente di x^3 nella equazione resul-

tante, ottenuta eliminando la y fra le 6) 7); si trova così

$$8) \quad \beta_1 = - \frac{c_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1^2 + c_3 \alpha_1^3}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0).$$

In modo analogo si possono determinare le successive parabole osculatrici ai due rami della curva per O ; si può anche riconoscere che le parabole osculatrici al primo (e così al secondo) ramo hanno per limite il ramo stesso in un intorno finito di O , cioè che in quest'intorno i due rami $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono rappresentati da sviluppi in serie di TAYLOR convergenti. Ma non ci arrestiamo su questo punto che dovrà essere chiarito più tardi sotto un aspetto più generale (libro 4°).

Importa ora osservare che le cose dette per il nodo O cessano di valere ove il punto doppio divenga una cuspide; nel qual caso, essendo $\alpha_1 = \alpha_2$, si ha una sola retta osculatrice e quindi manca il fondamento della distinzione dei due rami stabilita di sopra.

Per approfondire lo studio della cuspide, supponiamo che la $f(xy) = 0$ posseda una cuspide nell'origine O ; si avrà

$$f(xy) = (y - \alpha x)^2 + \varphi_3(xy) + \dots + \varphi_n(xy) = 0,$$

o, prendendo come asse delle x la retta osculatrice (*tangente cuspidale*) $y = \alpha x$,

$$9) \quad f(xy) = y^2 + \varphi_3(xy) + \dots + \varphi_n(xy) = 0.$$

In generale la particolarizzazione imposta al punto doppio di diventare una cuspide, non porta che la tangente cuspidale (in cui vanno a coincidere le due tangenti principali) debba avere un contatto più che tripunto con la curva f ; infatti se nella 9) si fa $y = 0$ resta in φ_3 un termine in x^3 che in generale avrà un coefficiente diverso da zero. Una cuspide per cui la *tangente cuspidale* ha *contatto tripunto* (e non d'ordine superiore) con la curva, si dice *cuspide ordinaria*.

Nell'intorno di una cuspide ordinaria O la curva f non può essere separata in due rami distinti

$$y = y_1(x)$$

$$y = y_2(x),$$

per i quali esistano due diversi sistemi di parabole oscula-

trici; infatti due parabole dello stesso ordine dovrebbero avere in O la stessa tangente, e allora questa avrebbe un contatto quadripunto con la curva composta delle due parabole e quindi con f .

Il significato analitico della osservazione precedente è che l'equazione $f(xy) = 0$, nell'intorno del punto O , non definisce più due funzioni implicite distinte $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, corrispondenti a due rami della curva, ma invece una sola funzione a due valori, questi valori scambiandosi l'uno nell'altro quando si compie un giro con la variabile complessa x intorno al punto $x = 0$.

Ciò si verifica immediatamente per la curva

$$y^2 = kx^3,$$

che rientra nel tipo 9) ed ha appunto una cuspide ordinaria in O ; infatti posto

$$x = \rho e^{i\theta} \quad (i = \sqrt{-1})$$

si avrà

$$y_1 = +\sqrt{k}\sqrt{\rho}e^{\frac{3i\theta}{2}}$$

$$y_2 = -\sqrt{k}\sqrt{\rho}e^{\frac{3i\theta}{2}},$$

e facendo aumentare θ di π , y_1 e y_2 si scambiano fra loro.

Ora riprendiamo l'equazione generale 9) e poniamo

$$\varphi_3(xy) = -kx^3 + c_1x^2y + c_2xy^2 + c_3y^3 \quad (-k = c_0 \neq 0);$$

dimostriamo allora che la cubica $y^2 = kx^3$, porge una rappresentazione approssimata della curva 9), sicchè i due valori della funzione implicita $y(x)$ definiti dalla 9) vengono a scambiarsi come i precedenti y_1, y_2 per un giro della variabile complessa x intorno ad $x = 0$.

La dimostrazione anzidetta si svolge come segue. Anzitutto, come nel caso generale in cui f contiene la forma di secondo grado $\varphi_2 = (y - \alpha_1x)(y - \alpha_2x)$, si ha che $\varphi_2 = y^2$ è infinitesimo d'ordine maggiore od uguale a tre rispetto ad x ; ma, poichè — per ipotesi — il coefficiente del termine in x^3 è $-k \neq 0$, si deduce che y^2 è infinitesimo dello stesso ordine di x^3 , mentre tutti gli altri termini di $\varphi_3, \varphi_4, \dots$ sono infinitesimi d'ordine superiore. Ora se nella 9) si sostituisce ad y

uno dei due valori che diventano infinitesimi con x , la 9) diventa un'identità, e perciò debbono annullarsi separatamente le parti infinitesime di diverso ordine; segue di qui che $y^2 - kx^3$ è un infinitesimo d'ordine superiore a tre, cioè la curva $y^2 = kx^3$ porge un'approssimazione della f a meno di infinitesimi d'ordine superiore a tre.

Osservazione. Ad illuminare le considerazioni precedenti giova confrontare la curva $y^2 = kx^3$ alla

$$y^2 = kx$$

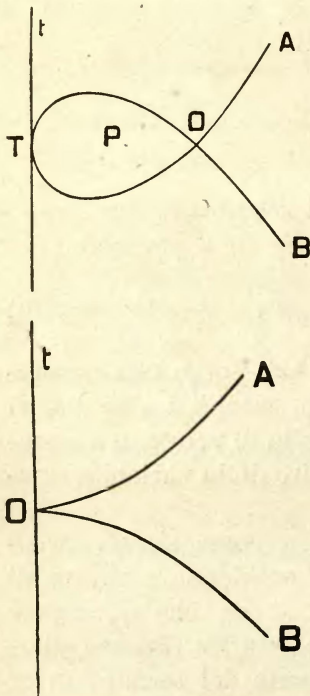
che ha in O un punto semplice ed è tangente all'asse delle y ; nell'intorno di $x=0$ anche la equazione $y^2 = kx$ definisce due valori y_1 e y_2 , che similmente si scambiano per un giro della variabile complessa x intorno ad $x=0$.

L'intorno di O sulla parabola $y^2 = kx$, come quello relativo alla curva f , costituisce dunque *un unico ramo*; e vedremo più tardi che questo può venire rappresentato da una serie $y(x)$ procedente per le successive potenze di x^2 .

Si può aggiungere che la curva $y^2 = kx^3$ (o la f) avente in O una cuspide ordinaria, può ritenersi come limite (per $\varepsilon=0$) di una curva dotata di nodo

$$y^2 = \varepsilon x^2 + kx^3$$

dove il punto $x = -\frac{2\varepsilon}{3k}$, $y = 0$, punto di contatto della tangente, parallela all'asse y , $x = -\frac{3\varepsilon}{3k}$, viene a sovrapporsi al punto doppio O . Una immagine fisica di questo passaggio al limite si può avere considerando le curve suddette nel campo reale; un filo a forma di nodo, come è indicato nella figura, si può trasformare in una cuspide ove si tirino i due



capi fissando uno spillo nel punto P .

Allora si vede (riferendosi alle due curve disegnate nella

figura) che i due archi AO , BO aventi per estremo comune la cuspide sono limiti dei due archi AOT , BOT aventi per estremo comune il punto semplice T .

12. Punti multipli. — Ricordiamo che un punto P della curva $f(xy) = 0$ si dice r -plo quando ogni retta passante per esso ha ivi r intersezioni riunite con la curva.

Vediamo quali sono le condizioni perchè la

$$1) \quad f(xy) = \Sigma a_{ik} x^i y^k = 0$$

abbia un punto r -plo nell'origine. Affinchè ciò sia, occorre che ogni retta

$$2) \quad y = \alpha x$$

abbia r intersezioni con la curva, cioè che l'equazione

$$a_{00} + (a_{10} + a_{01}\alpha)x + (a_{20} + a_{11}\alpha + a_{02}\alpha^2)x^2 + \dots + \\ + (a_{r0} + a_{r-1,1}\alpha + \dots + a_{0,r}\alpha^r)x^r + \dots = 0,$$

che si ottiene eliminando la y fra le 1) 2), abbia $x = 0$ come radice multipla d'ordine r ; deve quindi essere

$$a_{00} = a_{10} = a_{01} = \dots = a_{r-1,0} = \dots = a_{0,r-1} = 0.$$

Vale a dire: *condizione perchè la $f(xy) = 0$ abbia nell'origine un punto r -plo è che il polinomio f non contenga termini di grado inferiore ad r .*

Per trovare poi quali sono le condizioni perchè sia r -plo un punto P qualunque (non all'infinito) di coordinate

$$x = a \quad y = b,$$

ci si riduce al caso precedente trasportando P nell'origine con la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b. \end{cases}$$

Poichè

$$a_{ik} = \frac{1}{i! k!} \frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial x^k},$$

si deduce che: *un punto r -plo di f ($r > 1$) è caratterizzato*

dall'annullamento simultaneo di f e delle sue derivate fino all'ordine $r - 1$ (inclusive).

Queste condizioni si estendono, con passaggio al limite, per i punti all'infinito. Ma anche direttamente è facile determinare le condizioni perchè un punto all'infinito sia multiplo d'ordine r per f ; basterà determinare queste condizioni nel caso che il punto in questione sia il punto all'infinito di uno degli assi x o y , giacchè ci si riduce sempre a questo caso con un conveniente cambiamento di assi.

Si trova:

condizione perchè la curva

$$f(xy) = 0$$

abbia come r -plo il punto all'infinito dell'asse x è che nel polinomio $f(xy)$ manchino i termini di grado $> n - r$ rispetto ad x .

Infatti l'equazione

$$f(xk) = 0,$$

le cui radici danno le intersezioni della $f(xy)$ con la retta

$$y = k$$

parallela all'asse x , deve avere r delle sue n radici riunite all'infinito e quindi deve ridursi al grado $n - r$, sicchè nel polinomio $f(xy)$ la massima potenza di x deve essere $n - r$.

Analogamente: *condizione perchè sia r -plo il punto all'infinito dell'asse y è che nel polinomio $f(xy)$ la massima potenza di y sia $n - r$.*

La condizione perchè sia r -plo il punto all'infinito di uno degli assi, si può dedurre da quella riguardante l'origine.

Introduciamo al posto delle coordinate cartesiane x e y le coordinate omogenee $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$, passando così all'equazione

$$f(x_1 x_2 x_3) = x_3^n f(xy) = \sum a_{rsp} x_1^r x_2^s x_3^p = 0,$$

dove a_{rsp} , ($r + s + p = n$), designa il coefficiente indicato prima con a_{rs} . Noi sappiamo che condizione perchè sia r -plo il punto $x = 0, y = 0$, cioè il punto

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1$$

è

$$a_{00n} = a_{0,1,n-1} = a_{1,0,n-1} = \dots = a_{0,r-1,n-r+1} = \dots = a_{r-1,0,n-r+1} = 0$$

cioè occorre che sian nulli i termini che contengono x_3 a potenza maggiore di $n - r$. Scambiando fra loro x_2 e x_3 si trova che condizione perchè sia r -plo il punto (010), cioè il punto all'infinito dell'asse y , è

$$a_{0,n,0} = a_{0,n-1,1} = \dots = a_{r-1,n-r+1,0} = 0,$$

ed invece scambiando fra loro x_1 e x_3 si trova che condizione perchè sia r -plo il punto (100), cioè il punto all'infinito dell'asse x , è

$$a_{n,0,0} = a_{n-1,1,0} = \dots = a_{n-r+1,r-1,0} = \dots = a_{n-r+1,0,r-1} = 0.$$

Infine noteremo che: *le condizioni per l'esistenza d'un punto r -plo ($r > 1$) della curva $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, rappresentata in coordinate omogenee, si esprimono in generale annullando — nel punto — le derivate d'ordine $r - 1$ di f :*

$$\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_1^i \partial x_2^h \partial x_3^k} = 0. \quad (i + h + k = r - 1)$$

Infatti, per $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, si verifica che queste derivate si riducono — a meno di fattori numerici — ai coefficienti di f sopra indicati. E, quando si tratti di un altro punto qualunque, basta effettuare un cambiamento di coordinate, portando in esso il punto (001).

Alle suddette condizioni si arriva anche direttamente col *metodo di IOACHIMSTHAL* (1) cercando le intersezioni di f colla retta luogo dei punti

$$x_i = \lambda y_i + \mu z_i,$$

che congiunge (y_i) (z_i) . Infatti le intersezioni suddette si ottengono annullando la $f(\lambda y_1 + \mu z_1, \lambda y_2 + \mu z_2, \lambda y_3 + \mu z_3)$ sviluppata per λ, μ colla formula binomiale; se $\lambda = 0$, $\mu = 1$ debbono dare una radice r -pla per valori fissati delle y_i , qualunque sieno le z_i , si deducono appunto le condizioni perchè (y_i) sia punto r -plo.

Chiamiamo *tangenti principali* in un punto r -plo di una curva le rette passanti per il punto e aventi ivi rimate (almeno) $r + 1$ intersezioni con la curva.

(1) *Journal für Math.* Bd 33, pg. 371, (1846).

Vediamo quante siano e come si trovino queste tangenti principali.

Supponiamo per comodità che il punto r -plo sia l'origine: allora l'equazione della curva è

$$3) f(xy) = a_{r_0} x^r + a_{r-1,1} x^{r-1} y + \dots + a_{0,r} y^r + a_{r+1,0} x^{r+1} + \dots + a_{0,n} y^n = 0.$$

Se la retta passante per l'origine

$$4) \quad y = \alpha x$$

ha $r+1$ intersezioni con la $f(xy) = 0$, l'equazione

$$x^r (a_{r,0} + a_{r-1,1} \alpha + \dots + a_{0,r} \alpha^r) + x^{r+1} (a_{r+1,0} + a_{r,1} \alpha + \dots + a_{0,r+1} \alpha^{r+1}) + \dots = 0,$$

che si ottiene eliminando la y fra le 3) 4), ha $x=0$ come radice $(r+1)$ -pla; quindi: condizione perchè la retta $y = \alpha x$ sia una tangente, è

$$5) \quad a_{r,0} + a_{r-1,1} \alpha + \dots + a_{0,r} \alpha^r = 0.$$

Siccome esistono r valori di α che soddisfano la 5), così in un punto r -plo esistono r tangenti principali; tangenti che, naturalmente, possono esser tutte distinte, o anche — a gruppi — coincidenti.

Osserviamo inoltre che il complesso dei termini di grado r di $f(xy)$, uguagliato a zero, dà l'equazione

$$a_{r_0} x^r + a_{r-1,1} x^{r-1} y + \dots + a_{0,r} y^r = 0,$$

che rappresenta le r tangenti principali nell'origine.

In particolare una curva d'ordine n , che abbia in O un punto n -plo, si riduce a n rette per O , costituenti le sue n tangenti principali.

Notiamo infine che, se l'origine è un punto r -plo, e non di molteplicità più elevata, i coefficienti a_{r_0} , $a_{r-1,1}$, ..., $a_{0,r}$ non possono essere tutti nulli, e quindi l'equazione 5) non può ammettere più di r radici. Si deduce che: *condizione perchè un punto sia r -plo è che esistano per esso r rette, e non più di r , aventi ivi $r+1$ intersezioni con la curva.*

Nota. L'analisi fatta nel caso del punto doppio si ripete in modo affatto simile per il punto r -plo.

In un punto r -plo ($x=0, y=0$) a tangenti (principali) distinte vi sono r rami (lineari) della curva toccati appunto da queste rette e distinti fra loro; per ogni ramo vi sono parabole osculatrici di tutti gli ordini ecc.

Invece la funzione implicita $y(x)$ che, per assi in posizione generale, ha r determinazioni nell'intorno del punto $x=0$, può dar luogo ad un numero minore di rami (superlineari) nell'ipotesi che le r tangenti principali non siano distinte.

Supponiamo dapprima che tutte le r tangenti coincidano in un'unica tangente a contatto $(r+1)$ -punto (e non più elevato), tangente che può assumersi come asse x . Allora l'equazione della curva si riduce alla forma

$$y'' - kx^{r+1} + C_1 x^r y + \dots + C_r y'' + \varphi_{r+1} + \dots + \varphi_n = 0,$$

dove $k \neq 0$. In tale ipotesi lo stesso ragionamento fatto per il caso della cuspide (§ 11) permette di dedurre che, per i punti della curva appartenenti all'intorno dell'origine, y'' è infinitesimo d'ordine $r+1$ come x^{r+1} , e di ordine inferiore a tutti gli altri termini, quindi $y'' - kx^{r+1}$ è infinitesimo d'ordine superiore ad $r+1$. Si conclude che la curva f nell'intorno dell'origine, può essere approssimata dalla curva

$$y'' = kx^{r+1},$$

la quale si può ritenere come limite — per $\varepsilon=0$ — della

$$y'' = \varepsilon x^{r-1} y + kx^{r+1},$$

che ha nell'origine un punto r -plo a tangenti distinte.

Segue da ciò che gli r valori della funzione $y(x)$ formano un solo ramo (*ramo cuspidale ordinario d'ordine r*), dove la retta che va da un punto qualunque all'origine O apparisce come limite di r tangenti per il punto; l'unicità del ramo per O è d'accordo con l'osservazione geometrica che se vi fossero due rami tangenti all'asse x , questo avrebbe un contatto più che $(r+1)$ -punto con f .

Supponiamo in secondo luogo che fra le r tangenti principali della f nel punto r -plo O , ve ne siano $s < r$, ($s > 1$), coincidenti in un'unica retta con contatto $(r+1)$ -punto, retta che assumiamo come asse delle x : l'equazione della curva diventa

$$6) \quad y''(y - \alpha_1 x) \dots (y - \alpha_{r-s} x) + C_0 x^{r+1} + \dots = 0$$

dove

$$\alpha_i \neq 0, \quad C_0 \neq 0.$$

In tale ipotesi fra gli r valori della funzione implicita $y(x)$ che diventano infinitesimi con x , ve ne sono s per cui y è infinitesimo d'ordine superiore ad x (mentre i rimanenti sono vicini ad $\alpha_1 x, \dots$); divisa per x^{r-s} la (6) diviene

$$y^s \left(\frac{y}{x} - \alpha_1 \right) \dots \left(\frac{y}{x} - \alpha_{r-s} \right) + C_0 x^{s+1} + \dots = 0,$$

nella quale il prodotto $\left(\frac{y}{x} - \alpha_1 \right) \dots \left(\frac{y}{x} - \alpha_{r-s} \right)$ è prossimo a una costante D_0 per i valori di y corrispondenti al ramo tangente all'asse x .

Pertanto, come nel caso precedente, si conclude che y^s è infinitesimo dell'ordine di x^{s+1} e, posto $k = -\frac{C_0}{D_0}$, $y^s - kx^{s+1}$ è infinitesimo d'ordine superiore a x^{s+1} .

Concludendo: se nel punto r -plo O vi è una tangente principale s -pla con contatto $(r+1)$ -punto la curva f possiede un ramo (cuspidale d'ordine s) tangente all'asse x , rappresentato approssimativamente dalla curva $y^s = kx^{s+1}$.

I casi esaminati non esauriscono lo studio delle singolarità delle curve algebriche, ma costituiscono soltanto le così dette singolarità ordinarie. Un punto r -plo si dice costituire una *singolarità ordinaria* se ha r tangenti distinte, oppure se possiede tangenti principali multiple aventi con la curva un contatto $(r+1)$ -punto e non più elevato.

Nel caso delle singolarità *straordinarie*, consideriamo un ramo tangente nell'origine all'asse x , l'analisi infinitesimale permette subito di concludere che per i punti di esso vi sono almeno due termini dell'equazione $f(xy) = 0$ che diventano infinitesimi dello stesso ordine minimo; sarà per esempio $x^a y^b$ infinitesimo come $x^c y^d$ dove $a > c$, $b < d$; allora dividendo per $x^c y^d$, e ponendo $\mu = a - c$, $\nu = b - d$, si troverà che x^μ è infinitesimo come y^ν , dove $\mu > \nu$, e si dedurrà che l'anzidetto ramo può essere approssimato con una curva del tipo:

$$y^\nu = kx^\mu.$$

Una tale curva dotata d'un punto ν -plo straordinario.

per $\mu > \nu + 1$ possiede effettivamente un solo ramo se μ e ν sono primi fra loro, altrimenti consta di più rami che possono approssimare uno o più rami della curva f .

Osserveremo infine che *per dualità*:

1) Al punto r -plo a tangenti distinte corrisponde la tangente r -pla propriamente detta con r contatti distinti.

2) Al ramo cuspidale ordinario d'ordine s corrisponde la tangente $(s + 1)$ - punta in un punto semplice.

Per *notizia storica* aggiungiamo che l'approssimazione delle curve in un punto singolare, la quale non aveva dato luogo ad una speciale analisi per parte di NEWTON, s'incontra nell'opera citata di DE GUA (1740), il quale cadde in un errore rilevato da EULERO (Acc. Berlino, 1749) e CRAMER, ritenendo la prima approssimazione sempre sufficiente a caratterizzare i punti singolari; il tema è stato svolto poi da CRAMER e da PUISEUX con la introduzione degli sviluppi in serie di potenze fratte, come vedremo nella teoria generale delle singolarità (libro 4°).

13. *Curve passanti per punti assegnati.* — I coefficienti dell'equazione di una curva $f(xy) = 0$ si possono ritenere come parametri, o *coordinate omogenee*, da cui dipende la posizione della curva entro la famiglia di tutte le curve dello stesso ordine tracciate nel piano (PLÜCKER); invero l'equazione $f = 0$ dipende, non da questi coefficienti, ma soltanto dai loro mutui rapporti.

Se una curva

$$1) \quad f(xy) = a_{n_0}x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \dots + a_{00} = 0,$$

o, in coordinate omogenee,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum a_{ihl} x_1^i x_2^h x_3^l \quad (i + h + l = n) \\ (a_{ihl} = a_{ih})$$

deve passare per un punto, sostituendo le coordinate di questo nella equazione 1) si ottiene una *condizione lineare* nei coefficienti di f . Ora i coefficienti a_{ihl} di una forma ternaria sono tanti quante sono le combinazioni con ripetizione di 3 elementi

ad n ad n , cioè

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} + 1;$$

ciò si esprime dicendo che il sistema (lineare) delle curve d'ordine n ha $N = \frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni.

Una curva d'ordine n può quindi essere determinata, entro questo sistema, mediante N condizioni lineari *indipendenti*.

In particolare *esiste una curva del piano determinata dalla condizione di passare per N punti generici* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$; l'equazione della curva è

$$2) \quad \begin{vmatrix} x^2 & x^{n-1} y & \dots & y^n & x^{n-1} & x^{n-2} y & \dots & y^{n-1} & \dots & x y & 1 \\ x_1^2 & x_1^{n-1} y_1 & \dots & y_1^n & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} y_1 & \dots & y_1^{n-1} & \dots & x_1 y_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N^2 & x_N^{n-1} y_N & \dots & y_N^n & x_N^{n-1} & x_N^{n-2} y_N & \dots & y_N^{n-1} & \dots & x_N y_N & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

I minori di questo determinante, complementari degli elementi della prima linea, son proporzionali ai valori dei coefficienti a_{ik} desunti dalle equazioni di condizione

$$f(x, y) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, N);$$

proveremo che la 2) non si riduce a un'identità, cioè che gli anzidetti minori della prima linea non sono identicamente nulli quando $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ sono punti generici del piano, e perciò N punti generici determinano una curva che passa per essi, mentre gruppi particolari di N punti, le cui coordinate annullino insieme i predetti minori, apparterranno ad infinite curve d'ordine n , caso di cui più tardi vedremo numerosi esempi.

Si prova che i menzionati minori non possono annullarsi per valori generici di $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N$, facendo vedere che essi non s'annullano *identicamente* in corrispondenza a valori arbitrari di codeste coordinate. Infatti se uno di questi determinanti deve essere identicamente nullo, considerando in esso

le $x_1 y_1$ come variabili, si deduce che saranno identicamente nulli i suoi minori complementari della prima linea, che sono minori d'ordine $N - 2$ del determinante 2). È chiaro che questa osservazione fornisce un procedimento ricorrente, per cui il supposto annullamento identico del determinante 2), dove $x_1 y_1, \dots, x_{N-1} y_{N-1}$ abbiano valori arbitrari, porta l'annullamento dei termini dell'ultima linea, il che è evidentemente assurdo.

Il passaggio di una curva per due punti distinti A e B equivale, come abbiamo detto, a due condizioni lineari; se si fa variare il punto B avvicinandolo ad A in una direzione determinata, al limite le due condizioni permangono, cioè *la condizione imposta ad una curva di passare per un punto ed avere ivi una data tangente equivale a due condizioni lineari*, che si possono considerare come *esprimenti il passaggio della curva per un punto (proprio) A e per un punto (improprio) B , infinitamente vicino ad A .*

Infatti, siano $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ le coordinate del punto A , e

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

l'equazione della retta che debba essere tangente in A alla curva f . Sarà allora, per $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$, $x_3 = \bar{x}_3$,

$$3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} : a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2} : a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_3} : a_3.$$

Siccome le derivate contengono linearmente i coefficienti a_{ihl} della f , così le 3) ci danno due equazioni lineari cui soddisfano i coefficienti a_{ihl} , equazioni che esprimono la condizione necessaria e sufficiente acciocchè la curva f passi per il punto A e abbia ivi la tangente assegnata.

Analogamente avremo che anche *il passaggio per r punti infinitamente vicini, succedentisi sopra una parabola d'ordine $r - 1$, porta r condizioni lineari*, cioè i coefficienti di una curva che passi per un punto A e abbia quivi r intersezioni riunite colla parabola suddetta, debbono soddisfare a r equazioni lineari caratteristiche.

Supponiamo per comodità che il punto A sia l'origine.

Sia

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{r-1} x^{r-1}$$

l'equazione della parabola d'ordine $r - 1$, osculatrice in A alla nostra curva $f(xy) = 0$, che per semplicità supponiamo non si riduca a una parabola d'ordine inferiore completata dalla retta all'infinito.

La risultante delle due equazioni

$$f(xy) = 0$$

e

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{r-1} x^{r-1},$$

dovrà avere come r -pla la radice $x = 0$. Ora questa risultante è

$$4) \quad \Sigma a_{ik} x (b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{r-1} x^{r-1})^k = 0$$

che, ordinata per le potenze di x , possiamo scrivere

$$4') \quad A_0 + A_1 x + \dots + A_{n(r-1)} x^{n(r-1)} = 0$$

dove i coefficienti $A_0, A_1, \dots, A_{n(r-1)}$ risultano evidentemente funzioni lineari dei coefficienti a_{ik} della curva f .

Se la 4) deve avere come multipla d'ordine r la radice $x = 0$, dovrà essere

$$5) \quad A_0 = A_1 = \dots = A_{r-1} = 0.$$

Si hanno così r equazioni lineari nelle a_{ik} , che esprimono la condizione necessaria e sufficiente affinché la curva f passi per r punti infinitamente vicini, venuti a coincidere col punto A movendosi sopra la parabola

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{r-1} x^{r-1}.$$

E si noti che le suddette r equazioni sono certo *indipendenti*, perchè la i^{ma} contiene il coefficiente b_i che non figura nelle precedenti.

Osservazione. Ciò che abbiamo detto vale ancora nel caso di riducibilità escluso nel ragionamento precedente, cioè quando si abbiano r punti infinitamente vicini succedentisi su di una parabola di ordine minore di $r - 1$, o in particolare sopra una retta; soltanto le condizioni imposte non riuscirebbero più indipendenti se il numero r dei punti assegnati supera l'ordine della parabola moltiplicato per n .

Riassumendo: il teorema che « il passaggio di una curva per r punti porta r condizioni lineari » vale non soltanto quando codesti punti sono propri (distinti fra loro) ma anche

se i punti del gruppo si fanno coincidere con uno di questi, O , mediante avvicinamento successivo lungo una parabola, cioè se $i - 1$ punti del gruppo sono punti impropri infinitamente vicini ad O sopra una parabola.

Osservazione. Si badi che invece: la *condizione* imposta ad una curva di *toccare una retta* data, in un punto non assegnato di essa, non è lineare.

Occupiamoci ora di valutare le condizioni imposte ad una curva che debba possedere un punto r -plo in posizione assegnata.

È lecito assumere codesto punto come origine delle coordinate; si vede allora che le condizioni predette sono espresse dall'annullamento di $\frac{r(r+1)}{2}$ coefficienti (Cfr. § 11). Si conclude che la *condizione perchè una curva passi con la molteplicità r per un punto dato O si traduce in $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni lineari.*

Se in O viene assegnata una *tangente principale* si ha un'ulteriore *condizione lineare* per la curva, la quale si può considerare come esprime il passaggio ulteriore della curva per un punto infinitamente vicino ad O in una data direzione.

L'imposizione di un punto r -plo O ad una curva f , equivale già essa stessa all'imposizione fatta ad f di passare per O e per un certo numero di punti ad esso infinitamente vicini. Infatti se il punto O deve essere r -plo per la curva $f(xy) = 0$, occorre, e basta, che esistano r rette per O aventi ivi r intersezioni riunite.

Ora imporre a una curva che passa già per O di avere quivi r intersezioni riunite con una data retta, porta altre $r - 1$ condizioni lineari; così imponendo alla curva f di avere r intersezioni riunite in O con r rette passanti per O , si ottengono $1 + r(r - 1)$ condizioni lineari. Ma poichè un punto r -plo impone $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni, le $1 + r(r - 1)$ condizioni suddette devono essere non indipendenti appena sia $r > 2$, e precisamente fra di esse $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$ devono essere conseguenza delle altre. Vediamo come ciò accada.

Quando s'impone a una curva f di passare per O si ha una prima condizione, quando le s'impone poi di avere r intersezioni con una prima retta per O si hanno $r - 1$ con-

dizioni, e altre $r - 1$ se ne hanno quando s'impone alla curva di avere r intersezioni con una seconda retta per O .

Ma con ciò il punto O è divenuto un punto doppio per la curva (passando per esso due rette che hanno ivi più di una intersezione), perciò quando s'impone alla f di avere r intersezioni con una terza retta per O , le nuove condizioni sono $r - 1$. Siccome poi, per il fatto che esistono tre rette che hanno in O più di due intersezioni riunite, O è divenuto un punto triplo, quando s'impone alla f di avere r intersezioni con una quarta retta per O , le nuove condizioni sono $r - 3$ anzichè $r - 1$, e così via; finalmente quando s'impone alla f di avere r intersezioni con la r -esima retta, si aggiunge alla f , che ha già ivi un punto $(r - 1)$ plo, una sola condizione.

Si vede così che delle $1 + r(r - 1)$ condizioni che esprimono l'esistenza di r rette passanti per O ed aventi ivi r intersezioni riunite,

$$1 + 2 + 3 + \dots + (r - 1) = \frac{(r - 1)(r - 2)}{2}$$

sono conseguenze delle altre, d'accordo coi risultati innanzi stabiliti.

Tenendo conto delle condizioni indipendenti, il calcolo fatto innanzi porta direttamente a valutare le condizioni corrispondenti all'imposizione d'un punto r -plo, le quali sono

$$1 + 2 + 3 + \dots + r$$

condizioni lineari successive.

La prima dice che la f passa per O , le due successive che la f passante per O ha ivi due tangenti e perciò un punto doppio, le tre successive che la f avente un punto doppio in O ha tre rette con un contatto tripunto e così via.

14. Sistemi lineari di curve. — Le considerazioni che seguono si riferiscono in generale alle condizioni lineari imposte ad una curva, delle quali il passaggio per un punto, semplice o multiplo, è un caso particolare. Per comodità scriveremo i coefficienti dell'equazione $f(xy) = 0$ con un solo indice progressivo:

$$a_0, a_1, \dots, a_N \quad \left(N = \frac{n(n+3)}{2} \right).$$

binazioni lineari di esse si dice *sistema lineare di dimensione* r ($o \infty^r$). Una curva si può considerare come un sistema lineare ∞^0 (determinato da N condizioni lineari per le a_i).

Segue dai teoremi precedenti che:

Un sistema lineare di dimensione r *è determinato ugualmente da* $r + 1$ *curve indipendenti scelte entro di esso* (il caso di eccezione corrisponde alla scelta di $r + 1$ curve appartenenti a un sistema di dimensione $r - 1$ contenuto nel dato).

Osservazione. Se qualcuna delle curve date, p. es., $f_0(xy) = 0$, è d'ordine $m < n$, il sistema lineare $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$ è formato di curve d'ordine n fra le quali si trova la curva f_0 da cui siamo partiti, completata colla retta all'infinito contata $m - n$ volte.

Un punto comune alle curve f_0, f_1, \dots, f_r , è comune a tutte le curve del sistema lineare $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$, e dicesi *punto-base* per esso; *punto-base* r -plo, se è r -plo per le f_i e quindi per tutte le curve del sistema. I punti base d'un sistema lineare $|f|$ si dicono *distinti* (per opposizione a punti base *infinitamente vicini*) se in ciascun punto base r -plo, O , le f hanno tangenti variabili: una tangente fissa equivale ad un punto base infinitamente vicino ad O .

Le curve d'un sistema lineare ∞^r

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0,$$

che vengano assoggettate a $s \leq r$ nuove *condizioni lineari* indipendenti, formano un *sistema lineare di dimensione* $r - s$ *contenuto nel dato*. Questo sistema può essere definito mediante s equazioni lineari indipendenti fra i parametri λ .

Così in particolare si ottengono sistemi lineari contenuti nel sistema $|f|$ imponendo alle curve f di esso:

- 1) di passare per punti dati
- 2) o di possedere dati punti multipli
- 3) o di appartenere a un secondo sistema lineare (che può ritenersi determinato mediante condizioni lineari fra i coefficienti)

4) o di contenere una curva φ d'ordine $m < n$ come parte fissa: infatti tutte le curve riducibili $f = \varphi\psi$ formano un sistema lineare (di dimensione $\frac{(n - m)(n - m + 3)}{2}$).

Le osservazioni precedenti si possono precisare cercando la dimensione del sistema lineare formato dalle curve d'ordine n che sono comuni a due sistemi di curve dello stesso ordine, di dimensioni r, s . Il primo sistema essendo definito da $N - r$ condizioni indipendenti e il secondo da $N - s$, il sistema delle curve comuni sarà in generale di dimensione $r + s - N$ (supposto $r + s \geq N$); ma può darsi che i due gruppi di condizioni definitrici dei due sistemi dati abbiano fra loro particolari legami, sicchè presi insieme costituiscano $N - r + N - s = 2N - (r + s)$ condizioni non indipendenti; in tal caso il sistema delle curve comuni ai due sistemi ∞^r e ∞^s avrà la dimensione $t > r + s - N$.

Due sistemi lineari di dimensioni r, s , le cui curve comuni formino un sistema lineare di dimensione t , ($t \geq r + s - N$), appartengono a un medesimo sistema lineare di dimensione (minima) $r + s - t$.

Infatti questo sistema resta determinato da $r + s - t + 1$ curve indipendenti, delle quali $t + 1$ comuni ai due sistemi dati, $r - t$ appartenenti al primo e $s - t$ appartenenti al secondo.

Chiamasi *fascio* il sistema lineare di dimensione 1:

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0,$$

e *rete* il sistema lineare di dimensione 2:

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Se un sistema lineare ∞^r ($r > 1$) contiene due curve φ_1, φ_2 , esso contiene il fascio $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0$, giacchè le φ_1, φ_2 possono assumersi fra le $r + 1$ curve indipendenti che definiscono il sistema.

Viceversa sussiste il

Teorema fondamentale. *Se un sistema Σ di curve di ordine n contiene il fascio determinato da due sue curve qualsiasi, esso è lineare.*

Siano infatti f_0 e f_1 due curve del sistema Σ .

Consideriamo il fascio

$$2) \quad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0.$$

Se le curve di questo fascio esauriscono tutto il sistema Σ

il nostro teorema è già dimostrato, se no esisterà una curva f_2 di Σ fuori del fascio, cioè indipendente dalle f_0 e f_1 .

Ora ogni curva della rete

$$3) \quad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$$

non è altro che una curva del fascio

$$\mu_0(\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1) + \mu_1 f_2 = 0$$

e quindi appartiene al sistema Σ , in quanto vi appartengono le curve $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0$ e $f_2 = 0$. Se le curve della rete 3) esauriscono il sistema Σ , il nostro teorema è dimostrato, se no esisterà una curva f_3 di Σ indipendente dalle f_0, f_1, f_2 . Allora, come nel caso precedente, si vede che tutte le curve del sistema lineare di dimensione 3

$$4) \quad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

appartengono a Σ .

È chiaro ormai come il ragionamento si prosegua fino a che sia costruito un sistema lineare di dimensione r , dato che Σ contenga $r+1$, e non $r+2$ curve linearmente indipendenti ($r \leq N$). Il sistema lineare ∞^r , costruito in tal modo, esaurisce Σ , giacchè altrimenti vi sarebbe in Σ una curva fuori di esso e quindi $r+2$ curve indipendenti. Pertanto il teorema è dimostrato.

Sieno $|f|$ e $|\varphi|$ due sistemi lineari di curve d'ordine n, m :

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$$

$$\varphi = \mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 + \dots + \mu_s \varphi_s = 0.$$

Le curve composte

$$f\varphi = (\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_r f_r)(\mu_0 \varphi_0 + \dots + \mu_s \varphi_s) = \Sigma \lambda_i \mu_h f_i \varphi_h = 0$$

formano un sistema lineare che dicesi *minimo sistema somma* di $|f|$ e $|\varphi|$: in questo sistema figurano come parametri le quantità

$$v_{ik} = \lambda_i \mu_k.$$

In particolare il minimo sistema somma di f con se stesso dicesi *sistema doppio* di $|f|$.

In modo analogo si definiscono: la *somma* di s sistemi lineari, e in particolare il *sistema s-plo* d'un sistema lineare dato.

Il sistema n -plo della rete delle rette del piano è il sistema di tutte le curve d'ordine n . Infatti l'equazione generale d'ordine n :

$$f(xy) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_N = 0,$$

o, se si vuole l'equazione omogenea,

$$f(x_1 x_2 x_3) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_N x_3^n = 0,$$

mostra che la f è combinazione lineare di gruppi di n rette. Anzi il sistema delle curve d'ordine n viene definito dai gruppi di n rette formati coi lati del triangolo fondamentale per le coordinate

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

contati r, s, t volte ($r + s + t = n$); l'ultimo lato essendo la retta all'infinito, nel sistema cartesiano.

Osservazione. Se in luogo di tre rette se ne considerano due sole ($x = 0, y = 0$ o $x_1 = 0, x_2 = 0$), le combinazioni lineari dei gruppi di n rette formati con esse, dan luogo a tutti i gruppi di n rette passanti per il punto comune alle date (punto base n -plo per il sistema così definito).

15. Invarianti e covarianti. — La definizione e le proposizioni fondamentali sugli invarianti e covarianti, si estendono dalle forme binarie $f(x_1 x_2)$, trattate nel cap. I, alle forme ternarie $f(x_1 x_2 x_3)$ e quindi ai polinomi associati $f(xy)$

$$\left(x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad f(x_1 x_2 x_3) = x_3^n f(xy) \right).$$

Un invariante di f è una funzione razionale dei coefficienti di f che, quando si effettui una sostituzione lineare

$$1) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 \\ x_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3 \\ x_3 = \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3, \end{cases}$$

si riproduce moltiplicata per una potenza del modulo

$$M = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Un covariante è una funzione razionale dipendente altresì omogeneamente da x_1, x_2, x_3 (o in modo non omogeneo da x, y), che gode dell'indicata proprietà.

Le definizioni precedenti si estendono in modo ovvio agli invarianti e covarianti *simultanei* di più forme.

Accanto agl'invarianti e covarianti vi è luogo a considerare *contravarianti* di una o più forme $f(x_1, x_2, x_3)$, cioè forme invariantive che contengono i coefficienti di f e le variabili *contragredienti* u_1, u_2, u_3 , coordinate delle rette del piano

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

le quali subiscono la sostituzione lineare associata alla 1):

$$u_1 = A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + A_{13} v_3$$

$$u_2 = A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + A_{23} v_3$$

$$u_3 = A_{31} v_1 + A_{32} v_2 + A_{33} v_3$$

dove A_{ik} designa il minore complementare di x_{ik} in M .

Inoltre si presentano *forme miste* contenenti insieme le variabili

$$x_1, x_2, x_3 \text{ ed } u_1, u_2, u_3.$$

Un controvariante di f è un invariante simultaneo di f e del *controvariante identico* u_x ; ed una forma mista è un covariante simultaneo di f ed u_x .

L'annullamento d'un invariante della forma ternaria $f(x_1, x_2, x_3)$ esprime una proprietà proiettiva dalla curva $f=0$. L'annullamento d'un covariante d'ordine m rappresenta una curva d'un certo ordine m , che ha con f una definita relazione proiettiva. L'annullamento d'un contravariante di classe m , cioè di grado m rispetto alle variabili u , rappresenta una curva-inviluppo di classe m ; la corrispondente curva-luogo rappresentata in coordinate di punti, è un covariante di f . Le forme miste uguagliate a zero rappresentano *corrispondenze* fra punti e curve-inviluppo, legate invariantivamente alla f .

Nota sulla rappresentazione simbolica. Limitandoci, per semplicità alle forme invarianti di una data f , indichiamo come si estenda la rappresentazione simbolica e il teorema fondamentale di CLEBSCH (§ 6), che l'A. ha dato appunto per un numero qualunque di variabili.

Scriviamo una forma ternaria come sommatoria

$$f(x_1 x_2 x_3) = \sum a_{ikh} x_1^i x_2^k x_3^l \quad (i+k+l=n),$$

dove i termini simili in x_1^i, x_2^k, x_3^l si raccoglieranno in un un unico termine affetto dal coefficiente numerico

$$\frac{n!}{i! k! l!}.$$

Allora si vede che la f si può rappresentare *simbolicamente* con

$$f = a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n,$$

ove si facciano le *sostituzioni*

$$a_1^i a_2^k a_3^l = a_{ikh}.$$

Ciò posto, rappresentiamo la f , introducendo più serie di simboli equivalenti, con

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots$$

Si dimostra, come al § 6 per le binarie, che ogni invariante φ di f , del grado g , si può ritenere come limite di un invariante simultaneo lineare nei coefficienti di g forme $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{g-1}$ che s'identifichino con f .

Perciò, ponendo

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots,$$

dove la a, b, c, \dots designano g serie di simboli equivalenti, l'invariante φ verrà rappresentato simbolicamente da un invariante simultaneo delle forme lineari a_x, b_x, c_x, \dots , omogeneo di grado n rispetto alle g serie di variabili $a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3, c_1 c_2 c_3, \dots$

Un tale invariante simultaneo si esprime per i determinanti elementari

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \dots,$$

cioè per le *aree dei triangoli* $a_x b_x c_x = 0, \dots$ rese omogenee. Infatti la φ divisa per $a_3^n b_2^n c_3^n$ si riduce ad una funzione

razionale $\bar{\varphi}$ dei rapporti

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{a_3}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{a_3}, \quad \beta_1 = \frac{b_1}{b_3}, \quad \beta_2 = \frac{b_2}{b_3}, \quad \gamma_1 = \frac{c_1}{c_3}, \quad \gamma_2 = \frac{c_2}{c_3}, \dots,$$

la quale deve restare assolutamente invariata per le sostituzioni lineari di modulo 1 effettuate sopra $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{y_1}{y_3}$, e quindi in specie per le *omografie affini equivalenti*, che conservano le aree (⁴). Ma con una trasformazione siffatta si può portare un gruppo di rette

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + 1 = 0, \quad \beta_1 x + \beta_2 y + 1 = 0, \quad \gamma_1 x + \gamma_2 y + 1 = 0,$$

in un altro gruppo qualsiasi soddisfacente alla condizione che le aree dei triangoli formati colle rette del primo siano uguali a quelle formate colle rette del secondo; si deduce che $\bar{\varphi}$ dipende soltanto dalle aree predette, cioè dai determinanti

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}, \dots;$$

per conseguenza φ si esprime per i determinanti (abc) c. d. d.

Questi determinanti omogenei sono d'altronde invarianti di peso 1 delle terne di forme $a_x b_x c_x, \dots$

Si conclude che ogni forma invariante di

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots,$$

ammette una rappresentazione simbolica caratteristica, come somma di prodotti di fattori del tipo (abc) ; entrano nell'espressione precisamente g (≥ 3) serie di simboli equivalenti, per gl'invarianti di grado g e le lettere a, b, c, \dots figurano, in ciascun termine della somma, precisamente n volte.

Come esempio consideriamo la forma quadratica

$$f(x_1 x_2 x_3) = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2,$$

o il polinomio associato

$$f(xy) = a_{10} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33}.$$

(⁴) Cfr. p. es. ENRIQUES « G. proiettiva » § 50.

Vi è un solo invariante, che è del grado 3, cioè il *discriminante*, definito a meno di un fattore numerico da

$$D \equiv (abc)^2 \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

L'unicità di questo invariante risulta dall'osservazione che se vi fosse un secondo invariante I diverso da una potenza di D , il quoziente di due potenze convenienti di D e I fornirebbe un invariante assoluto, mentre f non possiede invarianti assoluti, perchè tutte le coniche irriducibili ($D \neq 0$) sono proiettive.

Il teorema fondamentale della rappresentazione simbolica si estende facilmente alle forme *covarianti*; la *rappresentazione simbolica di tali forme è caratterizzata* dal fatto che vi entrano *soltanto fattori del tipo* (abc) e d_x ; per avere la rappresentazione simbolica di *contravarianti e forme miste* converrà considerare anche fattori del tipo (abu) .

Come esempio daremo l'espressione simbolica del covariante hessiano

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix},$$

analoga del resto a quella trovata per lo hessiano delle binarie nei casi $n = 3, 4$.

A tale scopo scriviamo

$$\begin{aligned} f &= a_x^n = b_x^n = c_x^n, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= n a_1 a_x^{n-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = n a_2 a_x^{n-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = n a_3 a_x^{n-1}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= n(n-1) a_1^2 a_x^{n-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = n(n-1) a_1 a_2 a_x^{n-2}, \end{aligned}$$

e le formule analoghe; avremo, tralasciando i fattori numerici:

$$\begin{aligned} H &\equiv \begin{vmatrix} a_x^{n-2} a_1^2 & a_x^{n-2} a_1 a_2 & a_x^{n-2} a_1 a_3 \\ b_x^{n-2} b_2 b_1 & b_x^{n-2} b_2^2 & b_x^{n-2} b_2 b_3 \\ c_x^{n-2} c_3 c_1 & c_x^{n-2} c_3 c_2 & c_x^{n-2} c_3^2 \end{vmatrix} \\ &= (abc) a_1 b_2 c_3 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}. \end{aligned}$$

Ma l'espressione di H non deve mutare scambiando gli indici a, b, c in tutti i modi possibili; sommando le espressioni così ottenute, si avrà un'espressione di H simmetrica rispetto alle tre serie di simboli, cioè

$$H \equiv (abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}.$$

Chiederemo questo breve cenno sulla teoria degli invarianti delle forme ternarie, menzionando il *principio di trasporto* di CLEBSCH (Journal für math. 59), che permette di dedurre forme contravarianti di una data $f(x_1 x_2 x_3) = a_x^n = b_x^n$, dagli invarianti delle forme binarie. Se si sega la curva $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ con una retta

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

e s'impone al gruppo sezione di soddisfare una condizione proiettiva, questa si traduce in un'equazione contravariante a cui deve soddisfare la retta $(u_1 u_2 u_3)$.

S'indichino con $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ due punti della nominata retta; le coordinate dei punti della retta medesima saranno:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 y_1 + \xi_2 z_1 \\ x_2 = \xi_1 y_2 + \xi_2 z_2 \\ x_3 = \xi_1 y_3 + \xi_2 z_3. \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni in f si ottiene una forma binaria:

$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 x_3) &= \varphi(\xi_1 \xi_2) = \\ &= [\xi_1 (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) + \xi_2 (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)]^n = \\ &= (\xi_1 a_y + \xi_2 a_z)^n = \alpha_\xi^n = \beta_\xi^n. \end{aligned}$$

Ora se per la forma φ si annulla un invariante espresso simbolicamente da

$$I = \Sigma k \Pi(\alpha \beta),$$

si trova che l'involuppo delle rette secanti la f in gruppi per cui $I = 0$ è dato dalla forma contravariante

$$\Sigma k \Pi(abu) = 0.$$

16. Le equazioni $f(xy) = 0$ e le corrispondenze tra forme di prima specie. — Anzi che come rappresentante una curva piana, l'equazione algebrica

$$f(xy) = 0$$

può essere interpretata come equazione di una *corrispondenza* (xy) fra i punti x, y di due rette (o fra gli elementi di fasci di raggi o di piani ovvero fra i punti di due coniche prospettive a due tali fasci ecc.).

La corrispondenza che si ottiene quando il polinomio f possiede i *gradi* m, n *separatamente* rispetto ad x, y , si designa come *corrispondenza* $[m, n]$ per significare che *a un punto* x *corrispondono* n *punti* y *e a un* y m *punti* x .

Infatti possiamo determinare i corrispondenti del punto x scrivendo f sotto la forma:

$$1) f = y^n(a_{nm}x^m + \dots + a_{n0}) + y^{n-1}(a_{n-1,m}x^m + \dots + a_{n-1,0}) + \dots + (a_{0,m}x^m + \dots + a_{0,0}) = 0.$$

Dato ad x un valore particolare \bar{x} , la 1) diventa in generale un'equazione di grado n in y , la quale determina n punti (distinti o coincidenti) omologhi ad \bar{x} ; per i valori particolari di x , radici dell'equazione

$$a_{nm}x^m + \dots + a_{n0} = 0,$$

si deve dire, secondo la convenzione del § 1, che uno dei punti corrispondenti ad x è all'infinito; vi saranno anzi r punti corrispondenti ad x riuniti all'infinito se x annulla insieme i coefficienti di $y^n, y^{n-1}, \dots, y^{n-r+1}$ nell'equazione 1).

L'equazione 1) può essere ordinata similmente rispetto alle potenze di x ; così appare che ad ogni punto y corrispondono nella corrispondenza *inversa* (yx) precisamente m punti distinti o coincidenti, non escluso il caso che qualcuno di questi vada all'infinito.

I punti corrispondenti ad $x = \infty$ e a $y = \infty$ si possono trovare, senza bisogno di introdurre le coordinate omogenee, in base all'osservazione fatta innanzi; così ad $x = \infty$ corrispondono gli n punti

$$a_{nm}y^n + a_{n-1,m}y^{n-1} + \dots + a_{0,m} = 0.$$

È da notare che uno di questi punti va all'infinito se $a_{nm} = 0$ e in generale l'equazione

$$f(xy) = 0$$

rappresentante una corrispondenza $[m, n]$ farà corrispondere a ciascuno dei punti $x = \infty, y = \infty$ l'altro punto contato r volte, se il grado complessivo del polinomio f vale $m + n - r$ ($r > 0$).

Per $m = n = 1$, la corrispondenza algebrica $[1, 1]$ fra due rette è una proiettività. Questa semplice osservazione (fatta da CHASLES nel 1855 (« Comptes rendus de l'Acad. de France », t. 41, pg. 1097) ha importanti applicazioni. P. es. proiettando una conica da due dei suoi punti, si hanno due fasci di raggi in corrispondenza algebrica $[1, 1]$ e così si riconosce, senza calcoli o costruzioni, che i due fasci sono proiettivi (noto teorema di STEINER).

Nota storica ⁽¹⁾. Le corrispondenze algebriche $[1, 2]$ si trovano considerate nella citata Nota di CHASLES; quelle d'indice m, n qualunque, s'incontrano in DE JONQUIÈRES « Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'ordre quelconque » (Journal de Math., t. 6, serie II, p. 113, 1861) e quindi nella « Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane » del CREMONA, pubblicata nelle Memorie di Bologna lo stesso anno 1861.

Corrispondenze riducibili e degeneri. La corrispondenza fra le rette x e y definita dall'equazione

$$f(xy) = 0$$

si dirà *riducibile* quando il polinomio f sia decomponibile nel prodotto di due fattori f_1 e f_2 , cioè quando

$$f(xy) = f_1(xy)f_2(xy).$$

La corrispondenza si dirà invece *irriducibile* quando una tale decomposizione non sia possibile.

La corrispondenza *riducibile* $f = f_1 f_2 = 0$ è somma delle due corrispondenze f_1, f_2 , cioè, il gruppo dei punti che la

⁽¹⁾ Cfr. la *Nota storica* di C. SEGRE (Bibliotheca Mathematica di Eneström, n.° 2. Stoccolma, 1892).

corrispondenza f fa corrispondere a un punto \bar{x} è dato dalla somma dei gruppi che le f_1 ed f_2 fanno corrispondere al medesimo \bar{x} .

Un caso particolare di riducibilità merita speciale considerazione.

Supponiamo che $f(xy)$ contenga il fattore $x - a$, cioè sia

$$f(xy) = (x - a)f_1(xy).$$

In questo caso l'equazione

$$f(x\bar{y}) = 0$$

ammette sempre la radice $x = a$ qualunque sia il valore di \bar{y} , cioè nella nostra corrispondenza ad ogni punto y corrisponde il punto fisso $x = a$ e solo $n - 1$ punti variabili al variare di y . Noi chiameremo *degenere* ogni corrispondenza per la quale ad un punto variabile corrisponda, nella diretta o nella inversa, un gruppo che possiede qualche punto fisso.

Ogni corrispondenza *degenere* ha un'equazione del tipo precedente, cioè se la corrispondenza definita dalla

$$f(xy) = 0$$

ha come punto fisso il punto $x = a$, $f(xy)$ è divisibile per $x - a$:

$$f(xy) = (x - a)f_1(xy).$$

Infatti se ad ogni punto y corrisponde il punto $x = a$, viceversa al punto $x = a$ deve corrispondere un qualunque valore y , cioè l'equazione

$$f(ay) = 0$$

deve essere identicamente soddisfatta, e quindi $f(xy)$ deve contenere il fattore $x - a$.

La corrispondenza *degenere* definita dalla

$$(x - a)f_1(xy) = 0,$$

si può considerare come una corrispondenza riducibile alla somma delle corrispondenze

$$f_1(xy) = 0$$

e

$$x - a = 0,$$

dove si definisca la $x - a = 0$ come corrispondenza $[1, 0]$ con un punto eccezionale: a ogni y corrisponde in questa il punto $x = a$, e a un x generico (diverso da a) non corrisponde nessun y , mentre al punto eccezionale $x = a$ corrisponde un qualunque y .

17. Curve rappresentative d'una corrispondenza e trasformazioni quadratiche. — Alla corrispondenza $[m, n]$

$$f(xy) = 0,$$

si può associare la curva data dalla medesima equazione o, più generalmente, la *curva rappresentativa* generata come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci A, B in corrispondenza $[m, n]$, dove le x, y vengano interpretate come coordinate proiettive degli elementi (raggi) di questi fasci. Quando A, B sieno posti nei punti all'infinito degli assi x, y , e la retta all'infinito AB venga fatta corrispondere ai valori $x = \infty, y = \infty$, la curva rappresentativa, definita dalla precedente costruzione geometrica, ricade nella $f(xy) = 0$ (definita in dipendenza dalla scelta dell'origine delle coordinate ortogonali e dell'unità di misura).

Per riguardo a questa speciale rappresentazione accade che: *alla corrispondenza* $f(xy) = 0$ *più generale* (in cui non si corrispondono i punti $x = \infty, y = \infty$) viene *associata* una *curva rappresentativa* $f(xy) = 0$, che è una *particolare curva d'ordine* $m + n$, *avente un punto* m -plo *nel punto all'infinito dell'asse* x *e un punto* n -plo *nel punto all'infinito dell'asse* y (§ 11). Se invece si fanno corrispondere i punti all'infinito degli assi x, y , diviene nullo il coefficiente di $x^m y^n$ in f : $a_{mn} = 0$, (§ 14), e la retta all'infinito si stacca (una o più volte) dalla curva rappresentativa della corrispondenza, la quale si riduce quindi d'ordine minore di $m + n$. In particolare la *curva generale* d'ordine n , $f(xy) = 0$, non passante per i punti all'infinito degli assi x, y , *rappresenta una corrispondenza* $[n, n]$ *particolare* fra le due rette x, y , dove a ciascun punto all'infinito corrisponde l'altro contato n volte.

Facciamo astrazione dallo speciale modo di costruzione della *curva rappresentativa* in cui la curva è data — in coordi-

nate cartesiane — dalla stessa equazione $f(xy) = 0$ della corrispondenza, riferendoci alla *generale costruzione geometrica* spiegata innanzi. Allora *la curva rappresentativa definisce la corrispondenza* $f(xy) = 0$ soltanto a meno di una trasformazione proiettiva sulle due rette x, y , cioè a meno di una sostituzione lineare sulle due variabili prese separatamente; si può quindi fare in modo che la corrispondenza rappresentata sia sempre generale nel senso che non si corrispondano i punti $x = \infty, y = \infty$, o all'opposto che abbia questa particolarità.

La curva rappresentativa della corrispondenza, la quale si può ridurre omograficamente al caso in cui i punti A e B siano i punti all'infinito degli assi x e y , sarà d'ordine $n + m$, oppure d'ordine minore di $n + m$, in dipendenza di una circostanza che tiene al modo della rappresentazione: l'ordine si abbassa se i fasci A e B hanno il raggio comune unito (*proiezione prospettiva*), cioè se questo raggio corrisponde a due punti omologhi delle rette x e y .

La corrispondenza $f(xy) = 0$ supposta data fra le due rette x, y , definisce la curva rappresentativa soltanto a meno di una trasformazione piana in cui i fasci A e B vengano sostituiti da due fasci proiettivi di raggi.

Studiamo brevemente le trasformazioni piane generate dalla proiettività fra due coppie di fasci di raggi AA', BB' , dove si fanno corrispondere le intersezioni dei raggi omologhi.

È noto che se alla retta AB corrisponde ugualmente nelle due proiettività la retta $A'B'$, la trasformazione generata è un'omografia, perchè a una retta p , considerata come asse di proiettività dei due fasci prospettivi A, B , corrisponde la retta p' , asse dei due fasci prospettivi omologhi A', B' ⁽¹⁾.

Suppongasi invece che alla retta AB corrispondano due rette diverse per A' e B' , e supponiamo anzi, come accade in generale, che le due rette siano ambedue distinte da $A'B'$ e però s'incontrino in un punto C' fuori dalla retta $A'B'$. Allora a una retta generica p del primo piano, considerata come asse di proiettività dei due fasci A, B , corrisponderà nel secondo piano una conica generata dai due fasci proiettivi omologhi A', B' , e tutte le coniche così definite passeranno per i tre punti A', B', C' ⁽²⁾.

(1) Cfr. p. es. F. ENRIQUES. *G. Proiettiva*, § 45.

(2) *G. Proiettiva*, § 82.

Similmente alle rette generiche del secondo piano corrispondono, nel primo, le coniche per tre punti A, B, C .

Prendiamo i triangoli ABC e $A'B'C'$ come fondamentali per le coordinate $x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3$, essendo

$$A = (100), \quad B = (010), \quad C = (001),$$

e similmente

$$A' = (100), \quad B' = (010), \quad C' = (001);$$

assumiamo poi come punti unità due punti omologhi. Allora la proiettività tra i fasci A, A' fa corrispondere alla retta

$$\frac{x_2}{x_3} = \lambda \quad \text{la retta} \quad \frac{y_3}{y_2} = \lambda,$$

giacchè la sostituzione lineare effettuata sopra $\frac{x_2}{x_3}$ porta per ipotesi $0, \infty, 1$ in $\infty, 0, 1$; si avrà quindi

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{x_2}{x_3},$$

e similmente

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{x_3}{x_1}, \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2},$$

ossia le formule della trasformazione saranno

$$y_1 \equiv \frac{1}{x_1}, \quad y_2 \equiv \frac{1}{x_2}, \quad y_3 \equiv \frac{1}{x_3},$$

cioè, sotto forma intera,

$$1) \quad y_1 \equiv x_2 x_3, \quad y_2 \equiv x_3 x_1, \quad y_3 \equiv x_1 x_2.$$

Segue di qui che alle rette

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

del piano y corrispondono, nel piano x , le coniche della rete

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0,$$

dotata dei tre punti base $(100), (010), (001)$.

Questi tre punti base A, B, C (e allo stesso modo A', B', C' nel piano y) sono punti eccezionali o *fondamentali*, le cui

coordinate rendono nulli tutti e tre i valori delle y calcolate mediante la formula 1); perciò il corrispondente di un punto fondamentale è *indeterminato*. Ma avvicinandosi al punto

$A = (100)$ secondo una certa direzione $\frac{dx_2}{dx_3}$, si trova

$$y_1 \equiv 0, \quad y_2 \equiv dx_2, \quad y_3 \equiv dx_3,$$

e perciò ai punti infinitamente vicini ad A corrispondono i punti propri della retta fondamentale $y = 0$ (congiungente $B'C'$).

Le formule 1) definiscono una *trasformazione quadratica*, cioè una sostituzione razionale di secondo grado, razionalmente invertibile. Reciprocamente si assuma una trasformazione quadratica

$$2) \quad \begin{cases} y_1 \equiv \varphi_1(x_1 x_2 x_3) \\ y_2 \equiv \varphi_2(x_1 x_2 x_3) \\ y_3 \equiv \varphi_3(x_1 x_2 x_3) \end{cases}$$

dove le $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono forme di second'ordine, e dove si suppone che le 1) riescano *razionalmente* invertibili; allora si può, *in generale*, costruire geometricamente la 2) mediante la proiettività fra due coppie di fasci A, A' e B, B' .

Infatti alle rette

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

corrispondono per la trasformazione 2) le coniche della rete

$$a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 = 0,$$

e alle rette di un fascio, di centro P , corrispondono le coniche di un fascio con quattro punti base. Fra questi punti uno solo potrà variare al variare di P , giacchè — stante la condizione di invertibilità — al punto P deve corrispondere un solo punto variabile P' . Infatti fra una retta e la conica omologa si ottiene una corrispondenza [1, 4], da cui deve staccarsi la corrispondenza [1, 1] data fra i punti generici della conica e quelli della retta, sicchè (§ 15) resta una corrispondenza degenera [0, 3] dove i tre punti corrispondenti a quelli della retta sono punti fissi. Si hanno così tre *punti base* per la rete di coniche, i quali tuttavia possono essere surrogati da un contatto o da un'osculazione delle coniche predette.

Escluso questo caso particolare, si avranno tre punti base A, B, C , che sono punti fondamentali della trasformazione, e quindi, entro la rete, tre fasci di coniche riducibili, costituite dai tre lati del triangolo ABC e da una retta qualsiasi per il vertice opposto. Ora i tre fasci predetti (del piano x) corrispondono a tre fasci di rette A', B', C' , e — siccome ad un punto generico del piano x non può corrispondere un punto appartenente alla retta $B'C'$ (altrimenti la corrispondenza non riuscirebbe invertibile) — così a una retta per A' corrisponderà una retta per A . Si deduce che la trasformazione quadratica fra i due piani y, x si può porre riferendo proiettivamente le coppie di fasci A, A' e B, B' (oppure C, C'), cioè *una trasformazione quadratica generale si costruisce (in tre modi) mediante la proiettività fra due coppie di fasci di raggi A, A' e B, B' , e perciò si lascia rappresentare con le equazioni normali 1).*

Soltanto la trasformazione quadratica ove le coniche $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ si osculano in *un* punto (caso in cui i tre punti fondamentali divengono infinitamente vicini) non può essere generata mediante la proiettività fra due coppie di fasci di raggi. Infatti il caso in cui le coniche predette abbiano comuni *due* punti, e la tangente in uno di essi (B') (cioè il caso in cui vi sono due punti fondamentali infinitamente vicini) corrisponde alla trasformazione particolare generata dalla proiettività fra i fasci A, A' e B, B' , quando alla retta AB corrisponde la retta $A'B'$ per A' , e una retta diversa per B' . L'equazione di questa trasformazione si riduce alla forma normale

$$y_1 \equiv x_2 x_3, \quad y_2 \equiv x_1 x_2, \quad y_3 \equiv x_3^2.$$

Nota storica. Una particolare trasformazione quadratica s'incontra già in PONCELET (« *Traité des propriétés projectives des figures* », 1822, pg. 198), il quale ebbe a considerare la corrispondenza fra le coppie di punti d'un piano che sono coniugati rispetto a due coniche.

Dieci anni più tardi STEINER (nella « *Systematische Entwicklung...* ») definiva la trasformazione quadratica ottenuta come *proiezione sghemba* da due rette, cioè la corrispondenza che si ottiene fra i punti di due piani distinti la cui congiungente incontri due rette sghembe date.

La trasformazione quadratica si trova quindi incidentalmente considerata da PLÜCKER (*Journal für Math.* Bd 5, 1830),

e studiata sistematicamente dal MAGNUS (« Nouvelles méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie ». Journ. für Math. Bd 8, 1832; « Aufgaben und Lehrsätze.... ». Berlino, 1833).

Ritorniamo alla corrispondenza $f(xy) = 0$; potremo ora affermare che la *curva rappresentativa della corrispondenza* — costruita mediante due fasci A, B — è *definita a meno di una trasformazione quadratica di cui A e B sono punti fondamentali*.

Si abbia una curva d'ordine n dotata di due punti di molteplicità r e s , ($r + s \leq n$); questa curva rappresenta una corrispondenza [$n - r, n - s$] tra i fasci su nominati.

Si eseguisca nel piano una trasformazione quadratica che abbia come punti fondamentali i due punti A, B e un terzo punto C (fuori della retta AB), il quale sia dotato per la curva di una certa molteplicità $t \geq 0$. Allora alla curva f che interseca le coniche per ABC in $2n - (r + s + t)$ punti variabili, corrisponderà una curva che incontra le rette in altrettanti punti, cioè una curva d'ordine $n' = 2n - (r + s + t)$.

Questa curva passerà per i punti fondamentali del piano trasformato, A', B', C' , con certe molteplicità r', s', t' , e poichè essa rappresenta ancora una corrispondenza [$n - r, n - s$] fra i fasci A' e B' , si dovrà avere

$$n' - r' = n - r$$

$$n' - s' = n - s$$

e analogamente

$$n' - t' = n - t.$$

Si deduce

$$r' = 2n - (s + t)$$

$$s' = 2n - (r + t)$$

$$t' = 2n - (r + s),$$

d'accordo con l'osservazione che la f interseca la retta BC fuori di B, C in $r' = 2n - (s + t)$ punti, ai quali corrispondono i punti infinitamente vicini ad A' della curva trasformata.

Osservazione. Nel § 13 si è presentata una estensione dell'ordinario concetto di punto, cioè la considerazione di punti impropri infinitamente vicini a un punto proprio dato, sopra rette o parabole per esso. È notevole che i punti infinitamente vicini a un punto O nell'intorno del *prim' ordine*,

cioè i punti che corrispondono a tangenti e vengono rappresentati da differenziali del prim'ordine, si possono anche introdurre per mezzo di una trasformazione quadratica che abbia in O un punto fondamentale, giacchè, come abbiamo visto nel § 16, essi corrispondono ai punti propri della retta fondamentale omologa. Con ripetute trasformazioni quadratiche si possono quindi definire i punti infinitamente vicini ad O negli intorno successivi d'ordine 1, 2, 3, ..., la cui analisi completa, ove si presentano casi non riducibili a quello dei punti successivi sopra una parabola, formerà oggetto della teoria generale delle singolarità delle curve che svilupperemo più avanti. Ma intanto, limitandoci ai punti dell'intorno del prim'ordine, vogliamo illuminarne il concetto ponendolo in relazione con quello dei punti all'infinito introdotti nella Geometria proiettiva. Le osservazioni che occorrono a tale scopo, ci condurranno a formulare un principio fondamentale di cui vedremo nel seguito importanti applicazioni. A tale scopo è consacrato il paragrafo che segue.

18. La geometria astratta, e il concetto dei punti infinitamente vicini. — La Geometria considerata come scienza deduttiva, appare un organismo logico in cui i concetti fondamentali di « punto », « retta », « piano » ecc., e quelli definiti mediante questi, figurano soltanto come elementi di alcune relazioni logiche primitive (i postulati) e di altre relazioni logiche che ne vengono dedotte (i teoremi). La legittimità di tali deduzioni non dipende affatto dal contenuto intuitivo di quei concetti. Da questa osservazione si può trarre un principio generale, molto fecondo, che informa tutta la moderna geometria: *il principio della sostituibilità degli elementi geometrici*.

Si abbiano dei concetti, comunque definiti, i quali vengano convenzionalmente designati coi nomi di « punto », « retta » e « piano »; e suppongasi che tra di essi intercedano le relazioni logiche fondamentali enunciate dai postulati della Geometria (o anche soltanto da quelli che stanno a base della Geometria proiettiva). Tutti i teoremi di detta Geometria avranno ancora significato e validità ove si intenda di considerarli, non più come espressioni relazioni fra « punti », « rette » e « piani » nel senso intuitivo delle parole, ma invece come relazioni fra i concetti dati, i quali sono stati convenzionalmente designati coi detti nomi.

In altre parole: *la Geometria, considerata come scienza astratta, può ricevere interpretazioni diverse da quella intuitiva, fissando che gli elementi (punti, rette, piani,...) di essa sieno concetti comunque determinati, tra i quali intercedano le relazioni logiche espresse dai postulati.*

In particolare ciò vale anche per la Geometria del piano, purchè si tenga conto di tutte le proposizioni fondamentali che permettono di costruirne il sistema senza uscire dal piano.

Il primo esempio di sostituibilità degli elementi geometrici (dopo quello offerto dalla Geometria sferica) s'incontra nel *principio di dualità* della Geometria proiettiva, elaboratosi attraverso il metodo delle polari reciproche di PONCELET e formulato come principio filosofico da GERGONNE (1826) ⁽¹⁾.

Il vero fondamento di questo principio apparve mediante il concetto generale della corrispondenza reciproca per opera di MÖBIUS, che ebbe a rilevare il carattere simmetrico della relazione di appartenenza di due elementi duali ⁽²⁾; e fu messo in più chiara luce da PLÜCKER ⁽³⁾ mercè l'uso delle coordinate di rette e di piani.

Attraverso il concetto esteso delle corrispondenze (MÖBIUS) e la generalizzazione delle coordinate entro diverse famiglie di enti (PLÜCKER), si prepara il ravvicinamento di « diverse Geometrie » quali « interpretazioni di una medesima geometria astratta ».

Il classico « Saggio d'interpretazione della Geometria non euclidea » del BELTRAMI (1865, Opere, t. I, p. 262) e una Nota di HESSE su « Ein Uebertragsprincip » ⁽⁴⁾ (1866), offrono esempio di questo passaggio, che più tardi doveva diventare di uso frequente e sistematico nelle opere di LIE, KLEIN e dei geometri contemporanei.

Crediamo utile di riferire qui l'interpretazione della « Geometria delle coppie di punti della retta » come « Geometria dei punti del piano », che si trova appunto nella citata Nota di HESSE.

Si chiamino « punti » le « coppie di punti d'una retta a », e si chiamino « rette » le « involuzioni di coppie di punti appartenenti ad a ».

⁽¹⁾ Annales de Math., 17.

⁽²⁾ Barycentrische Calcul, 1827, p. 436.

⁽³⁾ « Analytisch-geometrische Entwicklungen », II Theil, 1830. — Cfr. Abhandlungen, t. I, p. 619.

⁽⁴⁾ Journal für Math. Bd 66.

Con questa sostituzione di parole tutte le proprietà del sistema delle coppie di punti sulla retta divengono proprietà di un « piano α » definito dal punto di vista della Geometria proiettiva.

Infatti la sostituzione anzidetta significa che gli stessi parametri omogenei u_1, u_2, u_3 vengono interpretati: una prima volta come coefficienti dell'equazione di 2° grado

$$u_1 \xi_1^2 + u_2 \xi_1 \xi_2 + u_3 \xi_2^2 = 0$$

che rappresenta una coppia di punti (ξ) sulle retta a , e una seconda volta come coordinate d'un punto nel piano α .

Per rendere più chiara la traduzione, sotto l'aspetto geometrico, conviene operare nel piano α una reciprocità, prendendo dunque u_1, u_2, u_3 come coordinate della retta

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Allora la traduzione da farsi verrà indicata come segue:

coppia di punti di $a =$ retta di α ,
 involuzione su $a =$ punto (fascio) di α .

Ad una involuzione degenera di a , dotata d'un punto fisso P , corrisponderà in α un punto P' che, variando P su a , descriverà una curva C , cioè la curva di 2° ordine:

$$x_1 = \xi^2, \quad x_2 = \xi_1 \xi_2, \quad x_3 = \xi_2^2;$$

ciò è d'accordo col fatto che una coppia $P_1 P_2$ di a appartiene a *due* involuzioni degeneri, sicchè la retta corrispondente su α sega C in *due* punti.

Ora fra C ed a intercede una corrispondenza (1, 1) proiettiva; ad ogni « coppia $P_1 P_2$ » di a corrisponde la « retta di α » che congiunge i punti omologhi P'_1, P'_2 , appartenenti a C .

Per tal modo, se si parte da una conica C , che sia riferita ad a con una proiezione da un suo punto, la corrispondenza di HESSE viene posta semplicemente: ad ogni retta di α corrispondono le proiezioni dei punti che essa ha comuni con C , e — conforme ad un noto teorema della Geometria proiettiva — le coppie di una involuzione su C (provenienti da un' involuzione data su a) riescono allineate con un punto — immagine dell' involuzione di a .

Vediamo come il concetto della Geometria astratta permetta di porre nel piano una trasformazione quadratica, specialmente notevole dal punto di vista metrico.

Consideriamo i cerchi del piano π , passanti per un punto O , ritenendo in particolare le rette per O come *cerchi di raggio infinito*.

Confrontiamo le proprietà fondamentali del nominato sistema di cerchi colle proprietà del piano rigato; vediamo che le une si traducono nelle altre quando si sostituisca alla parola « retta » la parola « cerchio per O » lasciando invariata la parola « punto », e con le avvertenze che seguono.

In tal modo si ottiene una interpretazione della Geometria astratta del piano, dove:

1) i « punti diversi da O » vengono *chiamati* « punti », occorrendo altresì considerare *un* punto — all'infinito — comune a tutti i cerchi di raggio infinito per O ;

2) i « cerchi per O » vengono *chiamati* « rette » ⁽¹⁾.

In questa interpretazione — che riesce perfetta per la Geometria dei punti reali — i *cerchi tangenti* in O figurano come *rette parallele*, e perciò l'introduzione dei punti infinitamente vicini ad O , per riguardo alla nominata Geometria dei cerchi, si deve ritenere come equivalente all'introduzione dei punti all'infinito nella ordinaria Geometria proiettiva.

Se si pone una *omografia* fra il piano rigato e il piano concepito come sistema dei cerchi per O , si ottiene una trasformazione quadratica che ha come punti fondamentali: O e i punti ciclici del piano (punti immaginari all'infinito comuni a tutti i cerchi del piano); la qual trasformazione realizza — per così dire — l'interpretazione della nostra Geometria astratta. In essa ai punti all'infinito del piano corrispondono i punti infinitamente vicini ad O .

Un caso particolare della trasformazione quadratica anzidetta è l'*inversione rispetto ad un cerchio* di centro O ; questo caso particolare si distingue per il carattere involutorio della corrispondenza (coincidenza della trasformazione diretta colla inversa).

(1) Cfr. ENRIQUES, *G. Proiettiva*. Appendice III.

19. **Appendice: iperspazi.** — Nel seguito avremo luogo di considerare non soltanto equazioni algebriche $f(x) = 0$ o $f(xy) = 0$, ma anche equazioni e sistemi di equazioni fra tre e più variabili. Nel caso di tre variabili ne cercheremo allora l'interpretazione conforme alla Geometria analitica dello spazio; avremo dunque: superficie $f(xyz) = 0$, oppure curve gobbe, intersezioni complete o parziali di due superficie, che vengono rappresentate da sistemi di due o di più equazioni fra le coordinate x, y, z , etc. Ma — ponendoci da un punto di vista astratto e cercando un aiuto alla facoltà immaginativa — non vi è alcun motivo di limitare le rappresentazioni geometriche alle tre dimensioni. Il postulato restrittivo che qui s'introduce (¹), conforme alla nostra intuizione dell'ordine sensibile, si può lasciar cadere nella Geometria astratta, costruendo così una teoria generale delle varietà o spazî ad n dimensioni.

Soprattutto c'interessa di definire gli *spazi lineari*, in cui si ha una semplice e naturale estensione dell'ordinaria Geometria proiettiva.

Una varietà di elementi (punti) che corrispondano biunivocamente senza eccezione ai rapporti di $n + 1$ coordinate (proiettive) omogenee

$$x_0, x_1, \dots, x_n,$$

verrà denominato uno *spazio* (lineare) S_n *ad n dimensioni*, quando sia definito entro la varietà un sistema di *linee* o varietà ad una dimensione, chiamate *rette*, per modo che « due punti $(x_i), (x_i')$ appartengano a una retta » e le coordinate dei punti di questa siano

$$\lambda x_i + \mu x_i'.$$

(¹) L'ipotesi delle tre dimensioni significa che lo spazio si può generare col movimento triplo di un punto: il movimento semplice genera una linea, il movimento della linea genera una superficie, il movimento di una superficie genera un solido o l'intero spazio. L'ipotesi anzidetta si introduce d'ordinario nel sistema dei postulati geometrici, con riferimento a particolari enti, per esempio alle sfere o ai piani. Così il postulato delle tre dimensioni può enunciarsi dicendo che una sfera divide lo spazio in due parti per modo che una linea (continua) congiungente un punto interno e un punto esterno ha almeno un punto comune con la sfera. Più comunemente il postulato suddetto figura nella geometria elementare attraverso la proposizione che « due piani aventi a comune un punto hanno a comune una retta ». Cfr. l'articolo « Sui concetti di retta e di piano » di U. AMALDI nei *Collectanea* di F. ENRIQUES « Questioni riguardanti le Matematiche Elementari » Volume I. Bologna-Zanichelli, 1912.

Osservazione. È ovvio che la definizione dello S_n può esser data ugualmente in rapporto a coordinate proiettive non omogenee, delle quali occorre allora considerare anche i valori infiniti.

La definizione dello S_n suppone, come abbiamo detto, la definizione della linea retta, congiungente due punti o proiettante l'uno di essi dall'altro: congiungendo i punti di una retta $a = BC$ con un punto A fuori di questa, ossia proiettando la retta dal punto A , si ottiene una varietà a due dimensioni S_2 o « piano » ABC , luogo dei punti le cui coordinate sono combinazioni lineari di quelle di A, B, C . Similmente, proiettando un piano da un punto fuori di esso, si ottiene uno spazio a tre dimensioni S_3 , e in generale con r proiezioni successive ($r < n$) si definiscono gli *spazi lineari* S_r , contenuti in S_n ; in particolare gli S_{n-1} di S_n diconsi *iperpiani*. Un *iperpiano* di S_n è rappresentato da un'equazione lineare

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + \dots + u_n x_n = 0,$$

che si ottiene eliminando le λ fra le n relazioni

$$x_i = \lambda_1 x_{1i} + \lambda_2 x_{2i} + \dots + \lambda_n x_{ni} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

le quali esprimono che l'iperpiano passa per gli n punti indipendenti

$$x_{k0}, x_{k1}, \dots, x_{kn} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

che servono a definirlo.

Si deduce facilmente che gli S_r , ($r < n - 1$), possono essere definiti come intersezioni di $n - r$ iperpiani indipendenti, cioè mediante $n - r$ equazioni lineari indipendenti.

Inoltre, le note proposizioni sulla teoria dei sistemi di equazioni lineari omogenee si traducono nelle seguenti *proposizioni fondamentali della geometria proiettiva dello S_n* .

Un iperpiano e una retta che non giaccia in esso hanno un punto in comune.

Più in generale un S_r , ($0 < r < n$), e un S_{n-r} , che siano indipendenti, cioè non appartengano a un S_{n-1} , hanno un punto comune.

Un S_r e un S_h , con $r + h > n$, i quali appartengano ad un S_n e non ad uno spazio di dimensione inferiore, hanno comune un S_{r+h-n} .

Quest'ultima proposizione può ritenersi valida anche per $r+h=n$, nel qual caso si riduce alla precedente purchè si consideri il punto come uno spazio S_0 a zero dimensioni.

Per $r+h < n$, un S_r e un S_h contenuti nello S_n non hanno in generale punti comuni (e in tal caso diconsi *sghembi*); un S_r e un S_h (*incidenti*) i quali abbiano comune uno spazio S_t ($t \geq 0$) appartengono ad uno spazio minimo S_{r+h-t} da essi determinato, e non ad uno spazio di dimensioni inferiori.

I sistemi lineari ∞^n di curve piane, *porgono* una *illustrazione* delle anzidette proprietà dello spazio S_n . Ciò si rende chiaro ove si chiamino « punti » le curve del sistema e « rette » i « fasci di curve contenuti in esso », richiamando i teoremi del § 14 e in particolare il teorema fondamentale che corrisponde alla generazione dello S_n con proiezioni successive.

Sussiste nello spazio S_n un *principio di dualità* che si ottiene scambiando le coordinate x_i dei punti con le coordinate u_i dei piani $u_x=0$; mentre i punti vengono così scambiati cogli iperpiani, le rette si scambiano con gli S_{n-2} (base di un fascio di iperpiani), e in generale gli S_r con gli S_{n-r-1} .

Una sostituzione lineare omogenea sulle variabili x_i , o ugualmente sulle u_i :

$$x'_i = \sum_k \alpha_{ki} x_k \quad (i, k = 0, 1, \dots, n),$$

pone fra gli spazi (x_i) , (x'_i) una *omografia*, la quale — nell'ipotesi che sia il determinante $|\alpha_{ik}| \neq 0$ — costituisce una trasformazione, o corrispondenza, biunivoca *non degenera*, dotata della proprietà caratteristica che « ai punti di uno spazio lineare S_r contenuto in uno dei due S_n dati corrispondono i punti di uno spazio lineare S_r contenuto nell'altro ». Se la sostituzione lineare ha luogo fra le x_i e le u'_i (e quindi fra le u_i e le x'_i) si ottiene fra i due S_n una *correlazione* o *reciprocità*, dove ai punti di un S_r corrispondono gli iperpiani per un S_{n-r-1} , venendo così associati gli spazi duali; la correlazione può ritenersi astrattamente come una omografia fra uno dei due S_n e lo S_n duale dell'altro, quindi — per spazi distinti, ove non è limitata la scelta dell'elemento « punto » — le proprietà della correlazione sono identiche a quelle della omografia.

L'omografia fra due S_n si può determinare fissando ad arbitrio $n + 2$ coppie di punti o di iperpiani corrispondenti, con la condizione che gli $n + 2$ elementi scelti in uno spazio siano tali che $n + 1$ qualsiasi fra essi siano indipendenti (punti non giacenti in un iperpiano, o iperpiani non passanti per un punto), potendosi con ciò determinare le z_{ik} nel modo ben noto per $n = 3$. Se si suppone che nei due spazi si corrispondano i punti

$$(1\ 0 \dots 0), \dots (0\ 0 \dots 1) \quad \text{ed} \quad (1\ 1 \dots 1),$$

ossia gli iperpiani

$$x_i = 0, \quad x'_i = 0 \quad \text{e} \quad x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0, \quad x'_0 + x'_1 + \dots + x'_n = 0,$$

le equazioni dell'omografia, prescindendo da un fattore di proporzionalità, si riducono alla forma

$$x'_i = x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n);$$

appare così che l'*omografia* entro lo spazio si può considerare come la più generale *trasformazione delle coordinate proiettive* x_0, x_1, \dots, x_n .

Anzi, se lo spazio S_n è dato geometricamente con le sue rette (o i suoi iperpiani), le più generali coordinate (proiettive) per cui le equazioni degli iperpiani sono lineari, si possono stabilire ponendo una omografia fra lo S_n dato e lo S_n analitico i cui punti sono i gruppi (x_0, x_1, \dots, x_n) ; sicchè il sistema delle coordinate riesce fissato in rapporto alla scelta arbitraria dei punti $(100 \dots 0), (010 \dots 0), \dots (000 \dots 1), (111 \dots 1)$ ⁽¹⁾.

Nota sulle coordinate di rette. Gli S_r , ($0 < r < n - 1$), contenuti in un S_n possono determinarsi come gli S_0 e gli S_{n-1} per mezzo di coordinate; ma queste non appaiono più come le coordinate proiettive dei punti di uno spazio lineare. Un S_r si può determinare per mezzo di $r + 1$ punti indipendenti che gli appartengono o per mezzo di $n - r$ iperpiani indipendenti passanti per esso; con le coordinate di questi punti, o iperpiani, si formeranno due matrici, e i determinanti d'ordine massimo estratti da queste forniranno due gruppi di coordinate dello S_r , che si dimostrano esser proporzionali e fra cui sussistono certe

(1) Cfr. ENRIQUES. *G. Proiettiva*. Appendice.

relazioni quadratiche. Così al sistema degli S_r e a quello degli spazi duali S_{n-r-1} competeranno le medesime coordinate. Per semplicità ci limiteremo a spiegare la cosa riferendoci alle coordinate delle rette, o degli S_{n-2} , incominciando dal caso $n = 3$.

Consideriamo adunque una retta dello spazio S_3 determinata da due dei suoi punti

$$A = (a_0 a_1 a_2 a_3), \quad B = (b_0 b_1 b_2 b_3).$$

Scriviamo la matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

i *determinanti* estratti da questa

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i,$$

considerati a meno d'un fattore, *non dipendono dalla scelta dei punti A e B sulla retta*, ma *soltanto dalla retta medesima* che — come vedremo — viene da essi determinata, e perciò possono assumersi come *coordinate omogenee* di questa. Infatti sostituiamo ad A, B i punti $(\lambda a_i + \mu b_i), (\lambda' a_i + \mu' b_i)$: si avrà

$$\begin{vmatrix} \lambda a_i + \mu b_i & \lambda a_k + \mu b_k \\ \lambda' a_i + \mu' b_i & \lambda' a_k + \mu' b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = (\lambda \mu' - \lambda' \mu) p_{ik}.$$

Occorre notare che le p_{ik} non possono essere tutte contemporaneamente nulle, anzi fra le p_{01}, p_{02}, p_{03} ce ne è almeno una diversa da zero, altrimenti le a_i risulterebbero proporzionali alle b_i e i punti A e B non sarebbero più distinti.

Tenuto conto della relazione $p_{ik} = -p_{ki}$, si hanno sei p_{ik} sostanzialmente distinte, i cui mutui rapporti corrispondono alle rette dello spazio; ma le sei p_{ik} non possono assumersi ad arbitrio: *sussiste infatti la relazione quadratica*

$$1) \quad P = p_{01} p_{23} + p_{02} p_{31} + p_{03} p_{12} = 0,$$

che si deduce sviluppando per i minori di second'ordine delle

due prime linee il determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora si assumano ad arbitrio le p_{01} , p_{02} , p_{03} in modo che una di esse sia diversa da zero, p. es. $p_{01} \neq 0$; quindi si assumano ancora ad arbitrio le p_{12} , p_{13} ; dopo ciò facciamo vedere che a questi valori delle p_{ik} corrisponde una retta ben determinata, che possiamo costruire, per esempio, come congiungente due punti $(01a_2a_3)$, $(10b_2b_3)$, intersezioni di essa coi piani coordinati $x_0 = 0$, $x_1 = 0$.

Infatti si ha

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{p_{02}}{p_{01}}, & a_3 &= -\frac{p_{03}}{p_{01}} \\ b_2 &= \frac{p_{12}}{p_{01}}, & b_3 &= \frac{p_{13}}{p_{01}}, \end{aligned}$$

dove, usufruendo del fattore di proporzionalità, si può anche supporre $p_{01} = 1$.

Resta quindi determinata anche la p_{23} che viene definita direttamente in funzione lineare delle precedenti p_{ik} per mezzo dell'equazione 1).

Pertanto le sei p_{ik} legate dalla 1) determinano senza eccezione le rette dello spazio e così appaiono coordinate omogenee di essa; la conoscenza dei cinque valori

$$p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}$$

vale a determinare una retta soltanto nell'ipotesi $p_{01} \neq 0$; nel caso $p_{01} = 0$ la relazione 1) non vale più a determinare la p_{23} , che si deve assumere fra le cinque p_{ik} date per individuare la retta secondo il procedimento precedente. Appunto per evitare eccezioni, nella determinazione delle rette mediante coordinate occorre considerare anzichè cinque, sei coordinate omogenee, legate da una relazione quadratica. Da questo punto di vista le *rette dello spazio* S_3 si possono riguardare come i punti di una quadrica $P = 0$ (varietà del second'ordine) in un S_5 .

La condizione di incidenza di due rette $(p_{ik}), (p'_{ik})$ è

$$\begin{aligned} p_{01}p'_{23} + p_{02}p'_{31} + p_{03}p'_{12} + p'_{01}p_{23} + p'_{02}p_{31} + p'_{03}p_{12} = \\ = \Sigma p_{ik}p'_{lm} = \Sigma \frac{\partial P}{\partial p_{lm}} p'_{lm} = 0. \end{aligned}$$

Infatti in tali ipotesi essendo coplanari i punti A, B e A', B' che determinano le due rette, si ha

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_0 & b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix} = 0;$$

sviluppando per i minori estratti dalle prime due linee si trova appunto la condizione precedente.

Ora, in luogo di determinare una retta per mezzo di due punti A e B e quindi coi minori estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

si può considerare la retta come intersezione di due piani $u_x = 0, v_x = 0$, e quindi individuarla coi minori estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

$$q_{ik} = u_i v_k - u_k v_i = -q_{ki}.$$

Per le q_{ik} si ripete per dualità tutto ciò che è stato detto delle p_{ik} ; ma è interessante dimostrare che le nuove coordinate si riducono alle precedenti, cioè si ha, a meno di un fattore di proporzionalità: $p_{ik} \equiv q_{lm}$.

A tale scopo cerchiamo la condizione di incidenza fra una retta (p_{ik}) e una (q_{ik}) : scriviamo che la retta intersezione dei piani $u_x = 0$ e $v_x = 0$ contiene un punto di coordinate $\lambda a_i + \mu b_i$; eliminando λ e μ viene

$$\begin{vmatrix} u_0 a_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 & u_0 b_0 + u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 \\ v_0 a_0 + v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 & v_0 b_0 + v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum p_{ik} q_{ik} = 0.$$

Ora per esprimere la coincidenza di due rette (p_{ik}) e (q_{ik}) scriviamo che le rette (p'_{ik}) incidenti alla (p_{ik}) sono incidenti anche alla (q_{ik}) ; dovranno risultare identiche le due equazioni lineari nelle p'_{01}, \dots, p'_{23} :

$$\begin{aligned} \sum p_{ik} p'_{lm} &= 0 \\ \sum q_{lm} p'_{lm} &= 0, \end{aligned}$$

onde si deduce

$$p_{ik} \equiv q_{lm}.$$

Le cose dette si estendono facilmente alle coordinate degli S_r negli S_n . Ci limiteremo per semplicità, al caso delle rette e dei loro spazi duali S_{n-2} , rimandando per una esposizione più generale dell'argomento al trattato di E. BERTINI: « Introduzione alla Geometria Proiettiva degli Iperspazi », Pisa, Spoerri, 1907 (Cap. 2°, §§ 14-17).

La retta congiungente due punti $A = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n)$, $B = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n)$ verrà determinata mediante i minori estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

cioè dai mutui rapporti delle $p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i = -p_{ki}$, i quali dipendono dalla retta e non dalla scelta dei punti A, B sopra di essa. Le p_{ki} essenzialmente distinte sono $\frac{n(n+1)}{2}$, ma fra di esse intercedono le relazioni quadratiche trinomie

$$2) \quad P_{ihlm} = p_{ml} p_{ki} + p_{mk} p_{il} + p_{mi} p_{lk} = 0$$

che si ottengono annullando il determinante

$$\begin{vmatrix} a_m & a_l & a_k & a_i \\ b_m & b_l & b_k & b_i \\ a_m & a_l & a_k & a_i \\ b_m & b_l & b_k & b_i \end{vmatrix},$$

sviluppato per i minori estratti dalla matrice delle prime due linee.

Le relazioni 2) permettono di determinare tutte le p_{ik} in funzione di $2n - 1$ di esse, per esempio delle

$$p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}, p_{12}, \dots, p_{1n}$$

dove si suppone $p_{01} \neq 0$. Si costruisce quindi, come per $n = 3$, una retta determinata che corrisponde ai mutui rapporti delle *coordinate omogenee* p_{ik} .

In modo duale un S_{n-2} si può determinare in S_n come intersezione di due iperpiani $u_x = 0$, $v_x = 0$, e quindi per mezzo delle coordinate omogenee

$$q_{ik} = u_i v_k - u_k v_i,$$

che sono i minori estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ v_0 & v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix};$$

queste q_{ik} risultano legate da relazioni quadratiche trinomie simili alle 2):

$$q_{iklm} = q_{ml} q_{ki} + q_{mk} q_{il} + q_{mi} q_{lk} = 0.$$

La condizione di incidenza di una retta e di un S_{n-2} viene espressa dalla equazione bilineare

$$\sum p_{ik} q_{ik} = 0,$$

come si deduce con lo stesso ragionamento svolto per $n = 3$.

Le coordinate di una retta si possono anche introdurre considerando questa come intersezione di $n - 1$ iperpiani indipendenti

$$u_x^{(1)} = 0, \dots, u_x^{(n-1)} = 0:$$

si presentano allora come coordinate i minori d'ordine $n - 1$ estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0^{(n-1)} & u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

e dualmente si dica per le coordinate di un S_{n-2} .

Ma, come per il caso $n = 3$, si riconosce che le nuove coordinate risultano proporzionali alle precedenti.

In questa introduzione non spingeremo più avanti lo sviluppo della Geometria proiettiva iperspaziale, alla quale ci occorrerà di ritornare nel seguito. Osserveremo soltanto che — una volta compreso lo spirito della generalizzazione — alcune proprietà, stabilite per la ordinaria geometria del piano e dello spazio, si trasporteranno immediatamente agli spazi a più dimensioni, e in tal caso potranno senz'altro ritenersi note. In altre questioni accade invece d'incontrare difficoltà essenziali e novità inaspettate, che esigono un esame particolarmente approfondito.

Notizia storica. Il linguaggio della Geometria a più dimensioni si trova incidentalmente usato dai matematici con scopi diversi, p. es. LAGRANGE ⁽¹⁾ assimila la Meccanica alla Geometria di uno spazio a quattro dimensioni. Ma il concetto di varietà ad un numero qualunque di dimensioni, come oggetto di trattazione matematica, viene svolto da A. CAYLEY nel 1843 ⁽²⁾ — secondo un punto di vista esclusivamente analitico — e poi da H. GRASSMANN ⁽³⁾ (1844) e da B. RIEMANN ⁽⁴⁾ (1866), i quali intendono così di costruire una estensione dell'ordinario continuo geometrico, di cui il filosofo HERBART aveva veduto la possibilità.

Già con GRASSMANN appare in tutta la sua generalità il pensiero della Geometria astratta, posto a fondamento di siffatta estensione.

RIEMANN sviluppa una definizione genetica ricorrente delle varietà ad n dimensioni, il concetto delle quali darà luogo a spiegazioni e considerazioni critiche nel cap. III.

Lo studio della Geometria a più dimensioni può essere svolto estendendo l'insieme delle ordinarie nozioni metriche oppure delle proiettive. Le ricerche di RIEMANN mirano all'estensione delle proprietà metriche (o metrico-differenziali) inerenti alla così detta Geometria sopra le superficie, e pongono i fondamenti della teoria delle *varietà a curvatura costante*. Ma un'estensione di carattere più elementare e

(1) « Théorie des fonctions analytiques ». Parigi, anno V, pag. 223. Oeuvres 9, pag. 337.

(2) Cambridge math. Journal 4 (1843/5) pag. 119; Papers 1, pag. 55.

(3) « Die lineale Ausdehnungslehre ». Lipsia 1844. Prefazione p. IX-X.

(4) « Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen ». Habilitationsschrift, Göttinga 1854. (Abh. Ges. Gött. 13 (1866-67) trad. franc. L. Laugel. Parigi, 1898).

immediato della Geometria metrica ordinaria, è data da C. JORDAN ⁽¹⁾ (1875) e per la più generale metrica non euclidea da E. D'OVIDIO ⁽²⁾ (1876-77); quest'ultimo fa uso anche della dualità e della proiettività fra spazi S_n .

Per la teoria delle equazioni algebriche, ha maggiore importanza la considerazione degli S_n in senso proiettivo, che appunto abbiamo introdotta nelle pagine precedenti. Qui sono da citare specialmente CAYLEY: ⁽³⁾, HALPHEN ⁽⁴⁾, CLIFFORD ⁽⁵⁾; ma conviene aggiungere che in numerosi lavori di SALMON, NÖTHER, CLEBSCH ecc. si cerca spesso nell'iperspazi una immagine della teoria degli enti algebrici, e che similmente immagini iperspaziali ricorrono nei lavori di KLEIN, LIE ecc.

In una memoria di CAYLEY ⁽⁶⁾ s'incontra anche il primo esempio di applicazioni della Geometria degli iperspazi seguendo il *metodo delle proiezioni*, che diviene poi oggetto di trattazione sistematica in G. VERONESE « Behandlung der projectivischen Verhältnisse... » (Mathem. Annalen t. 19 — 1881).

Il VERONESE ha anche assegnato la definizione genetica degli spazi S_n con proiezioni successive e più tardi ha analizzato i postulati che stanno a base della Geometria iperspaziale ⁽⁷⁾; i quali — per quanto concerne la Geometria proiettiva — sono stati pure investigati da AMODEO e FANO ⁽⁸⁾. In sostanza i postulati che servono a definire lo S_n proiettivo come varietà di « punti », richiedono:

1) l'esistenza di una sotto-varietà « la retta » che contiene due punti arbitrari;

2) che, dati tre punti A, B, C , non in linea retta, la retta proiettante da A un punto della BC e la retta proiet-

⁽¹⁾ « Essai sur la Géométrie à n dimensions ». Bulletin de la Société Math. de France, t. III (1875).

⁽²⁾ « Le relazioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni... ». Memorie dell'Acc. dei Lincei, 1876-77.

⁽³⁾ « On the Curves wick satisfy given Conditions ». « A Memoir on Abstract Geometry ». (Phil. Transactions, 1867-69).

⁽⁴⁾ « Recherches de Géométrie à n dimensions ». (Bulletin de la Société math., 1873).

⁽⁵⁾ « On the Classification of Loci ». (Phil. Transactions, 1878).

⁽⁶⁾ « Sur quelques Théorèmes de la géométrie de position ». Crelle, t. 31.

⁽⁷⁾ « Fondamenti di Geometria a più dimensioni... ». Padova, 1891.

⁽⁸⁾ F. AMODEO: Atti dell'Acc. di Torino, t. 26 (1890-91). — G. FANO: « Giornale di Matematiche », t. 30 (1892).

tante da B un punto della AC abbiano un punto comune (*postulato del piano* sotto la forma di PIERI);

3) che lo S_n venga esaurito con n proiezioni successive;

4) un postulato che permetta l'introduzione delle coordinate proiettive sulla retta ⁽¹⁾.

Accanto ai lavori del VERONESE, la scuola italiana deve menzionare specialmente quelli di C. SEGRE (contenuti nelle memorie e negli Atti dell'Accademia di Torino, a datare dal 1884), dove l'applicazione degli iperspazi è svolta soprattutto nel senso della Geometria astratta. In fine ricorderemo il già citato libro di E. BERTINI, dove potrà trovarsi una esposizione generale dei più recenti risultati conseguiti in Italia sulla Geometria proiettiva degli iperspazi.

Il concetto delle coordinate degli spazi lineari di un S_n è contenuto nell'« Ausdehnungslehre » di GRASSMANN (1844), ma non fu avvertito dai geometri che, a cagione della astrattezza e del simbolismo, furono distolti dalla lettura di quel libro pur ricco di idee feconde ed originali. Indipendentemente da GRASSMANN le coordinate p_{ik} delle rette di S_3 , legate da una relazione quadratica, sono state quindi introdotte da CAYLEY ⁽²⁾ e da PLÜCKER ⁽³⁾. KLEIN ⁽⁴⁾ ha avuto l'idea di sviluppare la Geometria dello spazio rigato riguardando questa forma come una quadrica dello spazio lineare S_5 . L'estensione che concerne le coordinate degli spazi lineari contenuti in un S_n è stata accennata da CLEBSCH ⁽⁵⁾ e da JORDAN (*l. c.* 1875); ma la determinazione del grado e della forma delle relazioni (quadratiche) fra tali coordinate appartiene al D'OIDIO ⁽⁶⁾; l'argomento è stato poi ripreso e trattato in modo più geometrico dal VERONESE (*l. c.*).

La considerazione degli iperspazi fa sorgere la questione

⁽¹⁾ Cfr. F. ENRIQUES: Rendic. Istituto Lombardo (2) 27 (1894), e varie memorie di M. PIERI dal 1894 al 1898 nei volumi dell'Accademia di Torino e dell'Istituto Lombardo.

⁽²⁾ Quartely Journal 3 (1860), Papers IV (pag. 446).

⁽³⁾ Philos. Trans. 155 (1865). « Neue Geometrie des Raumes ». Lipsia, 1868-69.

⁽⁴⁾ « Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie ». (Math. Ann. Bd 5-1892).

⁽⁵⁾ « Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie ». Abhand. der K. Gesell. der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 17 (1872) § 2.

⁽⁶⁾ « Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari ». Atti dell'Acc. di Torino, t. 12 (1876-77).

metafisica circa la possibilità di un ordine reale a più di tre dimensioni ⁽¹⁾. È appena necessario avvertire che lo sviluppo della Geometria iperspaziale come teoria matematica è affatto indipendente da tale problema. Ciò riesce chiaro senz'altro se ci si riferisce al senso astratto o alla traduzione analitica della Geometria. Nondimeno si è sempre autorizzati a figurarsi i punti, le rette, i piani e gli spazi S_3 , contenuti in un S_n , secondo l'ordinaria intuizione di tali enti, così come fa il VERONESE, e quindi a formarsi una specie di *intuizione delle figure iperspaziali* che è sintesi d'intuizioni parziali collegate in un nesso logico. La deduzione di proprietà della Geometria dello spazio S_3 mediante proiezioni da spazi superiori, fa appello direttamente a questo modo di rappresentazione.

Ora a siffatto procedimento si può obiettare che « l'essere contenuto in un S_n con $n > 3$ potrebbe eventualmente costituire un postulato limitativo per lo S_3 ». Ma quando si ricorre alla traduzione analitica del ragionamento — che è resa possibile dai postulati dello S_3 — un tal dubbio viene eliminato, perchè alle variabili x_0, x_1, x_2, x_3 , si possono sempre aggiungere altre variabili x_4, \dots, x_n ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Cfr. p. es. CLIFFORD « Il senso comune nelle Scienze esatte » trad. it., Milano, Dumolard, 1886, e — in connessione colle più recenti teorie elettro-magnetiche — gli sviluppi sullo spazio-tempo di MINKOWSKI.

⁽²⁾ Cfr. SEGRE « Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche » (Rivista di Matematica, 1901).

CAPITOLO III

Nota sul significato dell'espressione " in generale „ e sui computi di costanti.

20. **Prefazione.** — Abbiamo veduto (nei §§ 8, 14) che l'equazione algebrica $f(xy) = 0$, presa come equazione d'una curva, ha *in generale* il grado complessivo uguale ai gradi separati rispetto ad x, y . Invece la $f(xy) = 0$, concepita come equazione d'una corrispondenza fra rette, ha *in generale* gradi separati diversi rispetto ad x, y , essendo il grado complessivo di f eguale alla somma di codesti gradi separati.

Quindi un'equazione come la

$$f(xy) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0$$

$$(a_{20}a_{02} \neq 0),$$

che dal primo punto di vista è *generale*, appare invece *particolare* (o *eccezionale*) dal secondo punto di vista, perchè rientra nella classe di equazioni

$$Ax^2y^2 + Bx^2y + Cxy^2 + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0$$

per

$$A = B = C = 0,$$

e reciprocamente.

Ne segue che la qualifica di « generale » applicata ad un'equazione $f(xy) = 0$ non ha senso finchè non si dichiari sotto quale aspetto si voglia considerare la f , assegnando la *classe* (di curve o corrispondenze con dati caratteri) di cui vuolsi considerare come elemento.

Questa osservazione urta l'opinione comunemente ricevuta che attribuisce inconsapevolmente un senso assoluto alla generalità o eccezionalità di un ente, cioè costituisce un *paradosso* che deve essere chiarito. Il chiarimento deriva da un ordine d'idee fondamentale per lo sviluppo delle Mate-

matiche moderne, che non ha del resto una speciale connessione cogli enti algebrici, ma porta — anche in questo campo — larghe applicazioni.

Connesso a quest'ordine d'idee è il principio comunemente noto sotto il nome di *computo di costanti*, che — usato da PLÜCKER e da CLEBSCH come criterio di compatibilità d'un sistema di equazioni — acquista un posto cospicuo nello sviluppo della teoria geometrica delle equazioni.

In ragione della sua importanza, conviene esaminare rigorosamente le difficoltà a cui codesto principio dà luogo, segnalando le garanzie della sua corretta applicazione, le quali vengono lumeggiate da curiosi paradossi e da errori storici.

Forse nessun altro capitolo della scienza può, meglio di questo, illustrare la veduta filosofica che la storia dell'errore è parte essenziale della storia della verità!

21. I paradossi dell'infinito. — Cominciamo da alcune semplici osservazioni, sulle classi finite e sulle successioni numerabili, che si possono riattaccare ad un celebre paradosso.

Sia data una *classe* costituita da un numero finito di oggetti (*elementi*) a_1, \dots, a_n :

$$(a) = (a_1, \dots, a_n).$$

Nel linguaggio comune si dice che una proprietà A appartiene *in generale* agli elementi di (a) se il numero m degli a cui non spetta la proprietà A è *assai più piccolo* del numero $(n - m)$ degli a cui tale proprietà appartiene, ossia se $\frac{m}{n}$ è *assai piccolo*.

Codesta locuzione non ha un significato matematico preciso. Si può conferirglielo convenendo di riguardare n assai più grande di m , quando il rapporto $\frac{m}{n}$ resta inferiore a un dato limite $\varphi(n) < \frac{1}{2}$.

Suppongasì in particolare che si abbia una successione di classi, (a_n) , proseguibile indefinitamente ed in cui il numero degli elementi vada crescendo; p. es. la successione delle classi

$$(a_n) = (a_{n,1} a_{n,2} \dots a_{n,n}),$$

per

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Si dirà che gli *elementi* della *classe* n^{ma} della *successione* posseggono *in generale* una certa proprietà A , se — designando con m_n il numero degli a_n cui non spetta tale proprietà — si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{n} = 0.$$

E, se ciò accade, si dirà anche — brevemente — che *gli elementi della successione*

$$S = a_{11} a_{21} a_{22} \dots a_{n1} \dots a_{nn} \dots$$

posseggono *in generale* la proprietà A , o che gli elementi che non la posseggono sono *eccezionali* nella successione S .

Infatti la circostanza che sia

$$\lim_{n} \frac{m_n}{n} = 0,$$

si avvererà per qualsiasi partizione in classi degli elementi della successione data, purchè le classi di $n = 1, 2, 3, \dots$ elementi successivamente costruite, vengano formate con elementi successivi rispetto all'ordine di S .

Esempio. Nella successione dei numeri interi

$$S = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

i *quadrati perfetti* sono *eccezionali*, i numeri della successione sono *in generale non quadrati*.

Infatti due quadrati successivi

$$p^2, (p+1)^2,$$

differiscono fra loro per $2p+1$; e però se gli elementi di S vengono partiti in classi C_n , formate successivamente con numeri interi crescenti, e dove n va crescendo, accade che ad ogni C_n apparterrà un numero m_n di quadrati tale che

$$\lim_{n} \frac{m_n}{n} = 0.$$

Ora rileviamo che:

Se gli elementi di una successione S posseggono in generale una certa proprietà A , il significato di questo fatto è essen-

zialmente relativo all'ordine della successione; prendendo gli stessi elementi della classe S in un altro ordine, si può dare origine ad una successione Σ i cui elementi non posseggano in generale la suddetta proprietà A .

Consideriamo la successione dei numeri interi

$$S = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

e separiamo i quadrati e i non quadrati, formando le due successioni:

$$S' = 1, 4, 9, 16, \dots$$

$$S'' = 2, 3, 5, 7, 8, 10, \dots;$$

formiamo quindi la successione

$$\Sigma = 2, 1; 3, 4, 9; 5, 16, 25, 36; \dots,$$

nella quale appare evidente una partizione in classi C_n , composte successivamente di $n = 2, 3, 4, \dots$ elementi.

Nella classe C_n figura lo n^{mo} termine della successione S'' ed $n - 1$ quadrati (elementi di S'). La proporzione dei non quadrati agli elementi di C_n è dunque espressa dal rapporto $\frac{1}{n}$ che, per $n = \infty$, ha per limite zero.

La successione Σ comprende nel suo insieme tutti i numeri interi (elementi di S) ma in essa i quadrati sono il caso generale, i non quadrati l'eccezione!

Il fatto così messo in luce è inaspettato e prende l'aspetto d'un paradosso; infatti una vaga nozione comune ci farebbe dire che « nella classe dei numeri interi, il numero dei quadrati è minore del numero dei non quadrati » mentre la costruzione precedente ci fa apparire rovesciabile questa affermazione.

Dobbiamo dunque esaminare la proposizione surriferita e chiederci se, ed in qual senso, si abbia diritto di parlare del numero degli oggetti d'una classe infinita e di dire che questo debba esser maggiore di quello d'una sua parte, in un senso che esclude l'uguaglianza.

A tale scopo giova ricordare che il concetto del numero naturale, nel suo significato cardinale, nasce, per astrazione, dal confronto di classi (finite) equivalenti

$$(a_1 a_2, \dots a_n), (b_1 b_2 \dots b_n); \dots$$

cioè tali che possa stabilirsi una *corrispondenza biunivoca* fra i loro elementi ⁽¹⁾.

Ora vale per le classi finite la seguente induzione dell'esperienza (*postulato*): « Una classe ($a_1 \dots a_n$) non può essere equivalente ad una sua parte ». In modo ricorrente, da n ad $n+1$, questo principio si stabilisce per tutte le classi finite. Ma non può estendersi (con induzione infinita) per $n = \infty$, poichè è vietato alla nostra mente di compiere infiniti atti, e i ragionamenti (*trascendenti*) che contravvengono a tale divieto risultano fundamentalmente viziati. Così accade precisamente che una *classe infinita*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

è equivalente ad una sua parte.

Già GALILEO ⁽²⁾ fa rilevare il paradosso che la serie dei numeri naturali

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

è equivalente a quella dei quadrati

$$1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots,$$

poichè ad n si può associare univocamente n^2 , e al termine n^2 della seconda serie il termine n della prima. CAUCHY e BOLZANO sviluppano il medesimo paradosso ed altri simili; p. es. la serie dei numeri interi

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

è equivalente alla serie dei numeri pari

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots,$$

o alla serie dei numeri successivi ad 1:

$$2, 3, 4, \dots, n' = n + 1, \dots$$

Per mezzo di queste osservazioni si chiarisce che, ove si voglia parlare di un numero cardinale infinito corrispondente

⁽¹⁾ Cfr. l'Art. di F. ENRIQUES « I numeri reali » nei *Collectanea « Questioni riguardanti le Matematiche elementari »*. Vol. I, Bologna, Zanichelli, 1912.

⁽²⁾ « Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze ». Dialogo 1°.

alla classe $1, 2, \dots, n, \dots$, non è possibile ritenere questo numero come « propriamente maggiore », cioè maggiore e diseguale, rispetto a quello corrispondente ad una sua parte infinita, quale è p. es. la serie dei quadrati. Quindi non deve più meravigliarci che, a seconda dell'ordinamento della serie data, i non quadrati o i quadrati possano apparire in esso più frequenti.

22. Potenza d'un insieme secondo Cantor. — I paradossi dell'infinito, riferiti nel paragrafo precedente, hanno dato origine alla teoria generale degl'insiemi, di **GIORGIO CANTOR**, e in ispecie al concetto di *potenza*.

CANTOR ha avuto il merito di rilevare che i paradossi precedenti non significano l'impossibilità di confrontare classi o insiemi infiniti e di ragionare sulla loro equivalenza; essi implicano non già che il concetto di questa equivalenza sia assurdo, ma che *cade per le classi infinite il postulato che una classe non può essere equivalente ad una sua parte*. In altre parole la *prevalenza* di due classi non esclude la loro equivalenza.

Ora classi equivalenti si dicono avere *ugual potenza*, e la *potenza* — così definita per astrazione — si riduce al numero cardinale ordinario per le classi finite e porge una estensione di questo concetto.

È lecito dire che la potenza d'un insieme infinito è un *numero cardinale infinito*, ma ai numeri infiniti siffatti non si applicheranno le regole valide pei numeri ordinari (finiti); non si potrà eseguire su di essi gli ordinari calcoli, nè confondere i numeri infiniti cardinali coi numeri infiniti che nascono per estensione dei numeri *ordinali* (*transfiniti* di CANTOR), perchè l'identificazione dei numeri cardinali cogli ordinali cessa di valere al di là degl'insiemi finiti.

Nonostante queste difficoltà, la considerazione delle potenze di CANTOR conduce a qualche risultato positivo, che qui vogliamo richiamare (1).

Def. Ogni insieme che ha la potenza della serie dei numeri naturali $1, 2, \dots, n, \dots$ dicesi *numerabile*.

(1) Per le dimostrazioni cfr. p. es. l'esposizione di questa teoria contenuta nell'Art. citato di ENRIQUES su « I numeri reali ».

Teor. I. L'insieme di tutti i numeri razionali (frazioni) è numerabile.

II. La retta, presa come insieme dei suoi punti, ha la stessa potenza di un segmento. E così il piano ha ugual potenza di un quadrato ecc.

III. Il segmento, cioè l'insieme dei numeri reali compresi in un certo intervallo, *non* è numerabile; la sua potenza è *propriamente maggiore* di quella d'un insieme numerabile contenuto in esso.

IV. Il segmento, o la retta (x), ha uguale potenza di un quadrato o di un cubo ecc. o di una *varietà ad n dimensioni* ($x_1 x_2 \dots x_n$).

Fermiamoci un momento sopra un esempio relativo all'ultimo teorema. Essendo dato un quadrato $ABCD$ entro cui abbiassi da scegliere un punto P , il caso che P non appartenga alla diagonale o ad un'altra linea AC , si ritiene come *generale* rispetto a quello in cui P stia su AC ; e quest'ultimo caso (*eccezionale*) appare dotato di una *probabilità infinitesima* rispetto al primo. L'intuizione che si traduce con questo linguaggio non è già — come si potrebbe credere — che la potenza del segmento (o della linea) AC sia propriamente minore di quella del quadrato, poichè — come è detto sopra — i due insiemi hanno ugual potenza. La *eccezionalità* dei punti della diagonale (o della linea) entro il quadrato, ha un *significato relativo all'ordine doppio* in cui sono disposti i punti del quadrato (*varietà a due dimensioni*). Essa significa dunque che se si pensano i punti del quadrato in una *disposizione reticolare*, p. es. mediante le parallele ai lati AB , BC , « sopra ogni linea del reticolo l'insieme dei punti eccezionali (appartenenti alla linea AC) ha una *potenza propriamente minore* dell'insieme dei rimanenti punti ».

Qui conviene citare il *Teorema di NETTO*. Gli elementi di una classe o varietà V , sieno posti in corrispondenza biunivoca coi gruppi di n numeri reali (*coordinate*) x_1, x_2, \dots, x_n , entro un campo continuo (determinato p. es. da n intervalli finiti di variazione per le x_i), e gli stessi elementi di V sieno poi fatti corrispondere ai gruppi di m numeri y_1, y_2, \dots, y_m , in un certo campo, sicchè risulti fra le x e le y una corrispondenza biunivoca

$$1) \quad \begin{cases} y_i = f_i(x_1 \dots x_n) & (i = 1, \dots, m) \\ x_r = \varphi_r(y_1 \dots y_m) & (r = 1, \dots, n); \end{cases}$$

se questa *corrispondenza biunivoca* è *continua* (cioè se le f e φ sono funzioni continue) si ha necessariamente

$$n = m.$$

In altre parole, il numero n che esprime le *dimensioni* della varietà V risulta definito, non già in rapporto alla potenza dell'insieme V , ma in rapporto ad un *criterio ordinale*, che corrisponde ad un *sistema di coordinate* x ed ugualmente a tutti i possibili sistemi di coordinate che se ne deducono con una *trasformazione continua* 1).

Noi non riferiremo qui la dimostrazione del teorema di NETTO, che è alquanto delicata quando si voglia stabilirla rispetto a funzioni f e φ soddisfacenti soltanto alla condizione della continuità. Osserveremo soltanto che nel caso di funzioni *derivabili*, e meglio ancora nel caso di *funzioni analitiche* cioè sviluppabili in serie di potenze, la dimostrazione si dedurrebbe agevolmente dai noti teoremi d'inversione del Calcolo.

Il caso, che a noi interessa nel seguito, delle varietà algebriche, rientra appunto qui come caso particolare, ma può anche trattarsi in modo diretto. Su questo caso soltanto fermeremo un poco la nostra attenzione.

23. Varietà algebriche: dimensioni, elementi generici. — Si abbia un insieme (sistema, varietà) di enti geometrici v (curve, corrispondenze, superficie ecc.) algebricamente definiti in guisa da comportare una certa arbitrarietà. Ogni v si suppone suscettibile di *variazione continua* in funzione di certi elementi geometrici (p. es. di punti), e l'insieme degli elementi v si suppone essere una *varietà continua* V , tale cioè che si possa passare per variazione continua da un « elemento » v di V a un altro qualsiasi. In tutti i casi in cui v riesca determinato per mezzo di un numero finito di parametri (ipotesi che sta a fondamento delle seguenti considerazioni), v si può riguardare astrattamente come un « punto » di uno spazio S_r ad r dimensioni, e la definizione di V si riduce a quella delle *varietà algebriche* di punti in S_r . Esponiamo questa definizione cominciando dal caso più semplice.

Nello spazio S_{n+1} , dove si assumono come coordinate non omogenee x_1, \dots, x_n, x_{n+1} (ovvero coordinate omogenee

x_0, x_1, \dots, x_{n+1}), l'equazione algebrica

$$f(x_1 \dots x_n x_{n+1}) = 0$$

rappresenta una *varietà algebrica ad n dimensioni* o ∞^n (ipersuperficie di S_{n+1}); questa varietà si dice *riducibile* se f si spezza nel prodotto di due polinomi f_1 e f_2 , *irriducibile* nel caso opposto.

Osservazione. Nella precedente definizione le dimensioni della $f=0$ sono valutate facendo corrispondere una dimensione ad una variabile *complessa*, sicchè la stessa varietà $f=0$ si dovrà considerare come un *continuo a 2n dimensioni* dal punto di vista della sua *rappresentazione reale*, ove figurano come parametri le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie delle x_1, \dots, x_n .

Il giudizio sulla irriducibilità della varietà f si riconduce a quello relativo ad una curva algebrica, grazie al seguente

Lemma. La varietà

$$f(x_1 \dots x_{n+1}) = 0$$

è *riducibile* o *irriducibile* secondochè è tale la curva sezione piana di essa con un piano generico di S_{n+1} .

È chiaro anzitutto che una f riducibile dà luogo a curve sezioni riducibili sopra ogni piano che non appartenga ad f . La proprietà inversa si dimostra con un semplice ragionamento che esponiamo in breve riferendoci al caso della superficie di S_3 , ($n=2$). Supponiamo che la sezione della superficie $f=0$ con un piano generico si spezzi in due (o più) curve distinte C_1, C_2, \dots , e consideriamo — in questo piano — una retta r , non appartenente alla superficie, che incontri C_1 e C_2 in punti diversi; allora facendo rotare il piano attorno ad r , la curva sezione di f si comporrà di curve variabili C_1 e C_2 incontranti r in gruppi di punti fissi distinti; per tal modo le due curve variabili suddette si possono separare razionalmente per tutti i valori del parametro da cui dipende il piano per r : si deduce che le suddette curve descrivono superficie $f_1=0$ e $f_2=0$ razionalmente distinte, facenti parte di f . Resta ancora a considerare il caso in cui la sezione piana di $f=0$ sia una curva multipla; ma se ciò avviene p. es. per tutti i piani $z = \text{cost}$, si deduce che tutti i punti di $f=0$ sono multipli e soddisfano alle equazioni $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$: la

nota teoria della divisione dei polinomi c'insegna allora che $f(x_1 x_2 x_3)$ è riducibile (e si riduce ad una potenza di un polinomio primo).

Il lemma stabilito chiarisce il concetto delle varietà

$$f(x_1 \dots x_n x_{n+1}) = 0$$

irriducibili.

L'equazione

$$f(x_1 \dots x_n x_{n+1}) = 0,$$

contenga x_{n+1} ad un certo grado d ; si può supporre $d > 0$ ove si escludano posizioni particolari degli assi coordinati, ed anzi (mercè un eventuale cambiamento di coordinate) si può supporre che d sia uguale al grado complessivo di f rispetto alle x_i : ciò equivale ad escludere che si stacchi da $f=0$ un cilindro parallelo all'asse x_{n+1} , che è rappresentato da un'equazione $\varphi(x_1 \dots x_n) = 0$.

Ciò posto, la $f=0$ definisce x_{n+1} come *funzione algebrica* a d valori delle n variabili $x_1 \dots x_n$, che possono ritenersi — in questo senso — come *coordinate algebriche*, determinanti gruppi di d punti della varietà f . Se ad x_1, \dots, x_{n-1} si danno valori costanti generici, x_{n+1} diventa funzione algebrica a d valori di x_n ; questa funzione sarà riducibile quando sia riducibile la varietà f ; viceversa se la detta funzione è riducibile, la f potrà essere irriducibile (come avviene p. es. per la superficie

$$f = (x + y)^2 - z = (x + y - \sqrt{z})(x + y + \sqrt{z}) = 0),$$

ma soltanto nel caso che i piani coordinati

$$x_1 = \text{cost}, \dots, x_{n-1} = \text{cost}$$

abbiano una posizione particolare rispetto ad f : con un cambiamento di coordinate si può sempre escludere codesta relazione particolare degli assi alla varietà; allora, se la varietà è irriducibile, la *funzione algebrica* x_{n+1} risulta funzione algebrica *irriducibile rispetto alle n variabili x_1, \dots, x_n separatamente*. Se si tengono ferme $n - 1$ fra le suddette variabili, e si fa percorrere un cammino continuo chiuso alla rimanente x_i nel suo piano complesso, i d punti della varietà f che corrispondono alle coordinate algebriche x_1, \dots, x_n possono venire scambiati fra loro, ed in tal guisa (per un conveniente cam-

rispetto ad assi coordinati generici, ponendo x_{n+2}, \dots, x_r funzioni razionali di x_1, \dots, x_{n+1} legate da un'equazione algebrica: le x_1, \dots, x_n possono ritenersi *coordinate algebriche* corrispondenti a gruppi di $d (> 0)$, punti di V , i quali sono *non separabili* razionalmente se V è *irriducibile*.

Alla definizione delle varietà algebriche V_n ad n dimensioni in S_r , ($r > n + 1$), si arriva anche in base alla considerazione dei sistemi generali di equazioni in x_1, \dots, x_r ⁽¹⁾; una V_n si può definire come intersezione di $s \geq r - n$ ipersuperficie di S_r . Qui occorre dimostrare che: *l'intersezione di un sistema d'ipersuperficie* (aventi punti comuni),

$$f_i(x_1, \dots, x_r) = 0, \quad (i = 1, \dots, n),$$

è costituita di un numero finito di *varietà algebriche*, nel senso definito innanzi, ed eventualmente anche da un numero finito di *punti* che — per estensione — si riterranno costituire varietà a zero *dimensioni*.

Si può svolgere questa dimostrazione notando anzitutto che l'intersezione predetta si lascia separare in parti, ciascuna delle quali incontra in un numero finito di punti uno spazio generico S_{r-n} per un certo valore di n ; una tale V , viene proiettata da un S_{r-n-2} generico secondo un cono, la cui equazione può formarsi razionalmente in funzione dei coefficienti delle f_i (teoria dell'eliminazione), e costituisce quindi una varietà ad n dimensioni i cui punti sono funzioni razionali di quelli dell'ipersuperficie sezione del nominato cono con un S_{n+1} .

Giova avvertire espressamente che l'intersezione di più ipersuperficie può comporsi di varietà con dimensioni diverse; p. es.: tre superficie di second'ordine passanti per una conica di S_3 han comune la conica (varietà a *una* dimensione) e due punti (varietà a zero dimensioni); tre ipersuperficie di S_4 passanti per una superficie di second'ordine si segano in questa superficie e in una conica ecc.

La nozione della dimensione n d'una varietà algebrica deve ritenersi definita per le varietà irriducibili e per le varietà composte di parti irriducibili di ugual dimensione n ; non si può parlare della dimensione per l'intersezione di più iper-

(1) Cfr. p. es. BERTINI, « Introduzione... ». Cap. 9°.

superficie di S_r , quando questa risulti composta di varietà di diversa dimensione, a meno che non si convenga di trascurare le parti di dimensione inferiore.

La nozione di « punto » o « elemento » *generico* di una varietà, cioè la distinzione fra proprietà spettanti *in generale* ai punti d'una varietà e proprietà che spettano solo a punti *eccezionali*, acquista ora un significato preciso per tutte le varietà algebriche.

Si dice che una proprietà spetta in generale ai punti d'una varietà V_n , ad n dimensioni, se i punti di V_n per cui essa non è soddisfatta formano — entro V_n — una varietà o un insieme di varietà a meno di n dimensioni.

Sopra una varietà V_n *irriducibile*, una proprietà che si traduca con una condizione algebrica a , verrà soddisfatta da *tutti* i punti V_n o soltanto da punti eccezionali di varietà V_s , con $s < n$ dimensioni; nel secondo caso la proprietà *negativa* (che consiste nel non soddisfare ad a) spetterà *in generale* al punto di V_n , salvo l'*eccezione* delle anzidette varietà V_s .

Il significato che così viene precisato delle parole « generale », « eccezionale », è del tutto conforme all'uso comune di tali parole che già è occorso talora innanzi per particolari varietà.

Ora la definizione della dimensione d'una varietà algebrica dà luogo ad una questione fondamentale: quando si scelgano diversi modi di determinazione mediante coordinate algebriche, uno stesso sistema di enti può apparire, una volta come una varietà algebrica ad n dimensioni dello S_r (x_1, \dots, x_r), ed una seconda volta come una varietà algebrica ad m dimensioni di un S_t

$$(y_1, \dots, y_t) \qquad (r \geq n, t \geq m);$$

sorge allora la domanda se debba risultare necessariamente $n = m$.

La risposta affermativa a tale domanda può darsi indipendentemente dal teorema di NERRO (ricordato nel § 22) e costituisce il seguente

Teorema fondamentale sull'invarianza delle dimensioni. Si abbia fra due varietà algebriche irriducibili V_n, V_m , ad n, m dimensioni, una corrispondenza algebrica $[p, q]$ dove a un punto generico della V_n corrispondano $q (> 0)$ punti generici di V_m , e viceversa ad un punto generico di V_m cor-

rispondano $p (> 0)$ punti generici di V_n ; l'esistenza di una tale corrispondenza $[p, q]$ ($p > 0, q > 0$) fra le V_n, V_m , porta che queste varietà abbiano le stesse dimensioni, cioè

$$n = m.$$

Le V_n e V_m si supporranno date entro due spazi

$$(x_1 x_2 \dots x_r), \quad (y_1 y_2 \dots y_t) \\ (r \geq n, t \geq m),$$

escludendo che sia su V_n $x_i = \text{cost}$, e la corrispondenza $[p, q]$ sarà definita da equazioni del tipo $f_i(x_1 \dots x_r, y_1 \dots y_t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) fra le x, y . Pongasi per esempio che sia

$$n > m,$$

e facciamo vedere che tale ipotesi conduce ad un assurdo.

Scriviamo $x_1 = \text{cost}$. Questa equazione aggiunta alle $f_i = 0$ definisce entro V_n una varietà V_{n-1} ad $n - 1$ dimensioni. Ai punti di V_{n-1} corrisponderanno punti eccezionali entro V_m , altrimenti ad un punto generico di V_m non corrisponderebbero punti generici di V_n , come si è supposto. Dunque alla V_{n-1} corrisponderà entro V_m una varietà algebrica V_{m-1} avente (al massimo) $m - 1$ dimensioni. Questa V_{m-1} potrà essere irriducibile o riducibile, ed in quest'ultimo caso le si sostituirà una parte irriducibile.

Ciò posto applichiamo ripetutamente il procedimento precedente, ponendo

$$x_2 = \text{cost.}$$

$$x_3 = \text{cost.}$$

.....

Arriveremo infine ad una corrispondenza fra una varietà V_h con $h \geq 1$ dimensioni e un gruppo V_0 di un numero finito (> 0) di punti entro V_m . Tale corrispondenza dovrebbe associare ad ognuno dei punti di V_0 un numero finito di punti di V_h . Dunque V_h dovrebbe contenere un numero finito di punti; il che è assurdo, avendosi

$$h > 0.$$

24. Famiglie di enti algebrici dipendenti da numeri interi arbitrari. — Abbiamo veduto che l'espressione « in generale » assume un significato preciso per tutte le varietà algebriche ad un numero qualsiasi di dimensioni; ma ci sono famiglie di enti algebrici che non possono ritenersi come varietà (algebriche) ad un numero finito di dimensioni, nè comporsi con un numero finito di tali varietà; per queste famiglie la distinzione fra « generale » ed « eccezionale » non ha più significato, se non relativamente ad un modo speciale di classificazione degli enti che esse contengono. A siffatta circostanza tiene il paradosso da cui abbiamo preso le mosse (§ 18).

Si ha appunto un esempio delle anzidette famiglie considerando la totalità delle equazioni algebriche $f(xy)=0$ (curve piane o corrispondenze fra due rette); invero questi enti non formano una varietà algebrica a un numero finito di dimensioni, ma si lasciano ripartire in classi, come elementi di una serie di varietà le cui dimensioni vanno crescendo. Questa classificazione può essere fatta secondo diversi punti di vista. Se le $f(xy)=0$ sono concepite come curve, la *classificazione* dipende da *un numero intero arbitrario*, cioè dal grado complessivo della f che designa l'ordine della curva: abbiamo visto che le curve d'ordine n formano un sistema di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}$.

Se invece la $f(xy)=0$ viene concepita come equazione di una « corrispondenza $[m, n]$ », la classificazione delle f dipende da *due numeri interi arbitrari*, cioè dai gradi separati m e n . Scrivendo

$$f(xy) = f_{m_0}(x)y^n + f_{m_1}(x)y^{n-1} + \dots + f_{m_n}(x) = 0,$$

si mette in evidenza che la $f(xy)$, dei gradi m, n , contiene

$$(n+1)(m+1)$$

coefficienti, quindi le *corrispondenze* $[m, n]$ fra due rette *formano una varietà ad*

$$mn + m + n$$

dimensioni.

Ora, entro il sistema delle curve piane d'ordine n , sono *eccezionali* quelle che hanno i punti all'infinito degli assi x, y

come multipli secondo r, s con

$$r + s = n;$$

infatti il loro sistema ha la dimensione del sistema delle corrispondenze $[r, s]$, cioè

$$rs + r + s,$$

mentre il sistema totale delle f_n ha la dimensione

$$\frac{n(n+3)}{2} = \frac{(r+s)(r+s+3)}{2} = (rs + r + s) + \frac{r^2 + s^2 + r + s}{2}.$$

Parimente entro il sistema delle corrispondenze $[m, n]$ rappresentato dalle equazioni $f(xy) = 0$ di grado n separatamente rispetto ad x, y , sono *eccezionali* le corrispondenze in cui si corrispondono i punti all'infinito di x, y , contati n volte; infatti il loro sistema ha la dimensione del sistema delle curve piane d'ordine n , cioè

$$\frac{n(n+3)}{2} < n^2 + 2n.$$

Nondimeno ad ogni curva piana d'ordine n corrisponde univocamente una corrispondenza $[r, s]$ dove $r \leq n, s \leq n$; e ad ogni corrispondenza $[r, s]$ una curva piana d'ordine $n \leq r + s$. La totalità delle curve piane e la totalità delle corrispondenze algebriche tra forme di prima specie costituiscono famiglie equivalenti.

La cosa non ci parrà più strana se riflettiamo che (come si è accennato) codeste famiglie non dipendono più da un numero finito di parametri, ma debbono considerarsi come varietà ad *infinite dimensioni*. Il paradosso che tiene al doppio modo di classificazione degli enti di questa varietà concepiti come « curve » o « corrispondenze » riproduce in questo campo il paradosso che ha formato oggetto del § 20.

L'osservazione che precede mette in evidenza il valore relativo e convenzionale delle classificazioni nei problemi algebrici ove entrino in gioco classi continue dipendenti da interi arbitrari.

25. **Computo di costanti.** — Abbiansi due varietà algebriche irriducibili V_n, V_m , ad n, m dimensioni; i punti della prima verranno determinati mediante n coordinate algebriche x_1, \dots, x_n , e i punti della seconda mediante m coordinate algebriche y_1, \dots, y_m .

Le coppie costituite da un punto di V_n e da un punto di V_m sono gli elementi di una varietà V_{n+m} , ad $n+m$ dimensioni, corrispondendo alle $n+m$ coordinate algebriche $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$. Se le V_n, V_m sono definite, entro spazi a più che n, m , dimensioni, da due sistemi di equazioni $f_i(x_1 x_2 \dots) = 0, \varphi_n(y_1 y_2 \dots) = 0$, basta unire questi due sistemi per definire la V_{n+m} entro lo spazio $(x_1 x_2 \dots y_1 y_2 \dots)$. È facile riconoscere che la V_{n+m} delle coppie è irriducibile, tali essendo V_n e V_m ; altrimenti risulterebbero riducibili le sezioni di V_{n+m} con gli spazi

$$\begin{cases} y_1 = \text{cost.} \\ y_2 = \text{cost.} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Una varietà algebrica irriducibile, V_q , ad un certo numero q di dimensioni, contenuta nella V_{n+m} delle coppie, porge l'immagine di una *corrispondenza irriducibile* fra le dette varietà: la corrispondenza così definita nel senso più generale, agirà effettivamente sui punti delle due varietà o fra punti di varietà meno ampie contenute in esse, secondo che è possibile, o meno, di trovare coppie di punti omologhi di cui faccia parte un punto qualsiasi di V_n o di V_m . Reciprocamente ogni corrispondenza fra le V_n e V_m (o fra varietà contenute in esse) è rappresentata da una varietà irriducibile, o da un insieme di varietà, sopra V_{n+m} ; in quest'ultimo caso la data corrispondenza si lascia separare in più altre.

Supponiamo che fra le varietà V_n, V_m interceda una corrispondenza irriducibile, per modo che ad un punto generico di V_n corrispondano ∞^r punti di V_m ($r \geq 0$), e reciprocamente un punto generico di V_m corrisponda ad ∞^s punti di V_n ($s \geq 0$); in tale ipotesi l'immagine della corrispondenza è una varietà V_q , la cui dimensione q , può essere determinata in funzione dei numeri n, r, m, s ; infatti si ottengono coordinate capaci di determinare un numero finito di elementi di V_q aggiungendo

alle x_1, x_2, \dots, x_n , coordinate di un punto di V_n , le y_1, y_2, \dots, y_r coordinate dei punti della V_r , corrispondente; si ottiene quindi

$$q = n + r.$$

In modo analogo si trova

$$q = m + s.$$

Ricordando il teorema d'invarianza delle dimensioni, si deduce:

$$n + r = m + s$$

cioè

$$n = m + s - r$$

oppure

$$r = m + s - n.$$

Questa relazione costituisce un principio di uso frequente nel *computo delle costanti arbitrarie*.

A chiarimento di tale metodo vogliamo svolgere alcuni esempi. Ma, prima di ciò, giova notare, una volta per tutte, che per l'applicazione del principio sopra enunciato basta sapere che le varietà V_n e V_m sono irriducibili e che nella corrispondenza tra di esse gli omologhi di un punto dell'una formano sull'altra una varietà di cui è definita la dimensione; in tal caso se la corrispondenza fosse riducibile si potrebbe considerare soltanto una parte irriducibile di essa. Del resto nei casi che avremo a considerare avverrà in generale che la corrispondenza sia definita mediante funzioni razionali y_i delle x_i e di parametri arbitrari, sicchè essa risulterà senz'altro irriducibile, a prescindere — tutt'al più — da un fattore degenerare di essa.

a) *Dimensioni dello spazio rigato.*

Questa dimensione incognita venga designata con n .

Consideriamo la varietà ausiliaria V_m costituita dalle stelle di raggi (punti) dello spazio: si ha $m = 3$. Prendiamo come corrispondenti una retta e una stella quando la retta appartiene alla stella: si ha così che a ogni retta corrispondono ∞^1 ($r = 1$) stelle, e viceversa a ogni stella ∞^2 ($s = 2$): sarà dunque

$$n = m + s - r = 3 + 2 - 1 = 4.$$

cioè: lo spazio rigato è una varietà a 4 dimensioni.

La dimensione, n , dello spazio rigato può essere valutata anche nel seguente modo.

Si consideri la varietà a 6 dimensioni, V_6 , costituita dalle coppie di punti dello spazio, e si osservi che ogni coppia di punti determina una retta, mentre viceversa sopra ogni retta ci sono ∞^2 coppie di punti, si dedurrà

$$n = 6 + 0 - 2 = 4.$$

b) *Curve d'ordine n determinate da $\frac{n(n+3)}{2}$ loro punti generici.*

Sappiamo che il sistema delle curve d'ordine n ha $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni. Ora le dimensioni di questa varietà si possono valutare nel seguente modo: consideriamo un gruppo di $N = \frac{n(n+3)}{2}$ punti appartenenti a una curva d'ordine n : i gruppi siffatti, *corrispondenti* ad una curva, sono ∞^N ; si deduce che un gruppo di N punti generici scelti sopra una curva d'ordine n non può appartenere ad infinite curve d'ordine n , e quindi *una curva generale d'ordine n si può sempre ritenere determinata da $N = \frac{n(n+3)}{2}$ dei suoi punti*, presi in modo generico (Cf. § 13).

c) *Dimensione del sistema delle cubiche gobbe.*

Ricordiamo che la cubica gobba è definita come ulteriore intersezione di due coni quadrici aventi una generatrice comune non di contatto (1). Per determinare quale sia l'infinità delle cubiche gobbe nello spazio ordinario, osserviamo che ogni cubica determina ∞^2 coppie di coni con una generatrice comune, che la proiettano da due punti di essa; d'altra parte i coni quadrici sono ∞^8 , e i coni quadrici che hanno il vertice sopra un altro cono e posseggono con esso una generatrice a comune si riducono a ∞^6 ; pertanto le coppie di coni quadrici con una generatrice a comune sono ∞^{14} , e la dimensione del sistema delle cubiche gobbe vale

$$n = 14 - 2 = 12.$$

A questo stesso risultato si perviene anche osservando che — in base alla definizione — una cubica gobba è deter-

(1) Cfr. ENRIQUES, « G. descrittiva ». Parte II, § 22.

minata da 6 punti (per la irriducibilità della curva si richiede che quattro di questi non stiano in un piano). Ora le sestuple di punti dello spazio sono ∞^{18} , e le sestuple formate coi punti di una cubica sono ∞^6 , sicchè si trova

$$n = 18 - 6 = 12.$$

Altri esempi che recano maggior frutto di conseguenze s'incontreranno in appresso.

26. La compatibilità delle equazioni algebriche e il principio di Plücker-Clebsch. — Il principio del computo delle costanti può essere adoperato in altro modo, come criterio per riconoscere la compatibilità, o il grado d'indeterminazione, dei sistemi di equazioni algebriche con più incognite; in questo senso appunto il detto principio è stato adoperato da PLÜCKER (che ne ha fatto largo e fecondo uso, sebbene non sempre corretto) e trovasi formulato da CLEBSCH nella « Commemorazione di Plücker » ⁽¹⁾ quantunque CLEBSCH stesso dovesse poi ingannarsi talvolta nella sua applicazione ⁽²⁾.

Per riconoscere il senso preciso e il valore del principio di PLÜCKER-CLEBSCH, prendiamo le mosse dai noti teoremi dell'Algebra relativi ai sistemi di equazioni.

Cominciamo dal caso tipico in cui si abbiano n equazioni con n incognite:

$$1) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

dei gradi rispettivi d_1, \dots, d_n . Eliminando $n - 1$ incognite, per esempio x_2, \dots, x_n , si ottiene un'equazione *resultante*

$$R(x_1) = 0,$$

che è in generale di grado $D = d_1 d_2 \dots d_n$ ⁽³⁾ (sulla dimostrazione geometrica di questo teorema, e sui modi di formazione

⁽¹⁾ Göttingen Abhandlungen. Bd 63, (2 Dec. 1871), pg. 24.

⁽²⁾ Cfr. il Rapporto di BRILL e NÖTHER sullo sviluppo della teoria delle funzioni algebriche (Jahresbericht der Deutschen. Math. Vereinigung. Bd 3, pg. 343, anno 1892-93).

⁽³⁾ Cfr. p. es. CAPELLI, « Istituzioni di Analisi Algebrica ». Napoli, Pellerano, 1902. Cap. XIII, § 7.

se l'equazione della curva generale d'ordine n ,

$$f(xy) = 0,$$

oppure l'equazione della curva appartenente ad una determinata famiglia, si può identificare con la φ per certi valori dei parametri α_i , si dice che la φ è una *forma canonica* a cui può ridursi l'equazione f .

Se, in particolare, alcuni dei parametri α_i si possono considerare come coefficienti di una sostituzione eseguita sopra le x, y , la φ , in cui si diano a codeste α_i valori arbitrari, si dice costituire una *forma canonica a cui può ridursi la f con la sostituzione* indicata. Per esempio

$$x^2 + y^2 = r^2$$

è forma canonica a cui può ridursi l'equazione del cerchio

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

con una traslazione degli assi.

Per ridurre l'equazione

$$f(xy) = \sum a_{rs} x^r y^s = 0$$

alla forma canonica

$$\varphi(\alpha_i xy) = 0,$$

occorre in generale risolvere un sistema di equazioni del tipo

$$3) \quad a_{rs} = \psi_{rs}(\alpha_i),$$

dove le ψ_{rs} designano funzioni razionali; codeste equazioni si ottengono identificando la f con la φ .

Ora se il numero dei parametri α_i è (almeno) uguale a quello dei coefficienti a_{rs} , si è indotti a ritenere che per valori generali delle a_{rs} il sistema 3) sia compatibile, e quindi la f generale ammetta φ come forma canonica. Questa *induzione* è *errata* come dimostra il seguente

Sofisma di PLÜCKER. Con un cambiamento di assi coordinati ortogonali l'equazione di un cerchio si può sempre ridurre alla forma

$$x^2 + y^2 = 1!$$

La pseudo-dimostrazione di questo sofisma si svolge come segue: l'equazione generale del cerchio $(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$, contiene tre coefficienti; un cambiamento delle coordinate ortogonali, eseguito sull'equazione $x^2 + y^2 = 1$, introduce tre parametri, sicchè la trasformata di questo si può identificare con l'equazione generale del cerchio risolvendo un sistema di tre equazioni con tre incognite; le quali debbono ritenersi compatibili per valori generici dei coefficienti b, c, d .

L'insegnamento che si trae da questo esempio, è che il sistema di equazioni 3) (dove pure il numero di incognite sia uguale a quello delle equazioni) può riuscire incompatibile per valori generici delle a_{rs} ; in tal caso a valori generici delle α_i corrispondono valori particolari delle a_{rs} , a valori a_{rs} generici corrispondono valori particolari delle α_i , fra cui qualcuno infinito.

Ora notiamo che all'impossibilità di ridurre l'equazione generale del cerchio alla forma $x^2 + y^2 = 1$, corrisponde la circostanza che questa riduzione, quando è possibile, si effettua in un numero infinito di modi: il sistema delle tre equazioni a tre incognite da cui essa dipende, diventando compatibile, diventa anche indeterminato. Questa circostanza contrassegna il caso di eccezione dei sistemi di n equazioni con n incognite che sono incompatibili per valori generici dei coefficienti, ritenuti come variabili. Sussiste infatti il seguente

Principio di PLÜCKER-CLEBSCH. Se un sistema di n equazioni ad n incognite

$$1) \quad f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

in cui compaiono coefficienti a_r , variabili, è incompatibile per valori generici degli a_r ; ogniqualvolta esso diventi compatibile per valori particolari degli a_r , diventa in pari tempo indeterminato; quindi: *si può affermare la compatibilità del sistema per valori generici dei coefficienti, se esso sia compatibile e determinato per valori particolari.*

Più in generale: *se un sistema di $m = n - r$ equazioni ad n incognite ($r \geq 0$), è compatibile ed ammette ∞^r soluzioni (e non ∞^{r+1}) per valori particolari dei coefficienti, esso è compatibile (ammettendo ∞^r soluzioni) per valori generici di essi.*

Questo principio più generale si riduce al precedente aggiungendo r equazioni del tipo $x_i = \text{cost.}$; basterà dunque occuparsi di giustificare il principio più ristretto.

Giova cominciare dal caso in cui le equazioni 1) sono lineari; appunto questo caso — a cui conduce già la spiegazione del cosiddetto paradosso di CRAMER ⁽¹⁾ — sembra aver suggerito a PLÜCKER l'uso più generale del suo principio ⁽²⁾.

Se le equazioni

$$f_i = a_{i0} + \sum a_{ir} x_r = 0 \quad \begin{matrix} (r = 1, \dots, n) \\ (i = 1, \dots, n) \end{matrix}$$

sono incompatibili, ciò significa che fra le $n+1$ equazioni omogenee

$$4) \quad \begin{cases} f_i = \sum a_{ir} x_r = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (r = 0, 1, \dots, n) \\ (i = 1, \dots, n) \end{matrix}$$

l'ultima è una conseguenza delle prime n , per valori generici dei coefficienti a_{ir} . Questa condizione porta che sia *in generale*, e quindi *sempre*, il determinante

$$\Delta = |a_{rs}| = 0.$$

Ora, se, per valori particolari dei parametri che entrano nei coefficienti, accade che $\Delta = 0$, si deduce che ciascuna delle $n+1$ equazioni precedenti è conseguenza delle rimanenti ogni qual volta queste siano indipendenti fra loro; in particolare dunque, se le prime n equazioni sono indipendenti, esse portano di conseguenza $x_0 = 0$; se invece esse ammettono soluzioni per cui $x_0 \neq 0$, non sono più indipendenti, cioè formano un sistema indeterminato. c. d. d.

Indipendentemente dalla formazione del determinante Δ , il teorema si dimostra anche osservando che se le equazioni 4), considerate per valori generici dei coefficienti, ammettono un sistema di soluzioni in cui $x_0 = 0$, un tale sistema di soluzioni si avrà sempre in ogni caso particolare; se dunque in un caso particolare si aggiunge un secondo sistema di soluzioni in cui $x_0 \neq 0$, il sistema delle equazioni 4) diventa indeterminato. (Qualora il sistema 4) fosse già indeterminato di grado r , diventa indeterminato di grado $r+1$).

Ciò posto passiamo ad un sistema di n equazioni dei gradi d_1, \dots, d_n , che prendiamo già ridotte alla forma omogenea

$$2) \quad f_i(x_0 x_1 \dots x_n) = 0.$$

⁽¹⁾ Cfr. L 2°, § 15.

⁽²⁾ Cfr. l'introduzione alla citata « Theorie der Algebraischen Curven ».

L'ipotesi è che, per valori generici dei coefficienti, il sistema 2) abbia come conseguenza l'equazione $x_0 = 0$. Il ragionamento seguente vale a provare in generale che se — per valori particolari dei coefficienti — le equazioni 2) ammettono soluzioni in cui $x_0 \neq 0$, esse ne ammettono infinite. Infatti le ipersuperficie 2) posseggono $D = d_1 \dots d_n$ punti comuni, appartenenti all'iperpiano $x_0 = 0$; se — per valori particolari dei coefficienti — si trova un nuovo punto comune alle dette ipersuperficie, per cui $x_0 \neq 0$, avendosi più di D intersezioni se ne avranno infinite, cioè il sistema 2) diventerà indeterminato. Tuttavia per rendere completo questo ragionamento occorrerebbe stabilire in modo speciale che:

1) le infinite soluzioni del sistema 2), dedotte dall'esistenza di un punto-soluzione fuori dell'iperpiano $x_0 = 0$, corrispondono a una curva, o varietà, passante per questo punto, e quindi non giacente tutta nell'iperpiano $x_0 = 0$;

2) ove le equazioni $f_i = 0$ costituiscano già in generale un sistema indeterminato (portante per conseguenza $x_0 = 0$) le infinite intersezioni delle n ipersuperficie $f_i = 0$ *equivalgono* a D intersezioni, sicchè l'ipotesi di un nuovo punto comune permette di trarre analoghe conseguenze.

In luogo di esaminare le questioni delicate che abbiamo segnalate, porgeremo qui una dimostrazione geometrica del principio di PLÜCKER-CLEBSCH, riattaccandolo al principio del computo delle costanti del precedente paragrafo.

A tale scopo ci riferiremo ad un sistema di $m \leq n$ equazioni già risoluto rispetto ad m dei suoi coefficienti variabili, come accade pei sistemi di equazioni a cui conduce il problema delle forme canoniche. Si abbia dunque il sistema di equazioni (non omogenee)

$$5) \quad y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

dove le ψ_i sono funzioni razionali (intere o fratte).

Le equazioni 5), dove si considerino le x_i come variabili arbitrarie, definiscono una varietà algebrica V ad un certo numero di dimensioni, contenuta nello $S_m(y_1, \dots, y_m)$; se questa varietà non esaurisce tutto lo spazio S_m (che è una varietà irriducibile), bisogna che la dimensione di V sia al più $m - 1$; ma fra V e lo spazio $S_n(x_1, \dots, x_n)$ intercede una corrispondenza rappresentata dalle equazioni 5), per la quale ad ogni (x) generico corrisponde un (y) generico di V ; bisogna dunque che

un punto generico di V sorga da ∞^r (con $r \geq n - m + 1$) punti (x) . Convien aggiungere che la corrispondenza anzidetta può essere riguardata come irriducibile, tralasciando eventualmente una corrispondenza degenera che figuri in essa come fattore; si può quindi escludere il dubbio che gli ∞^r punti (x) omologhi di un (y) generico di V sieno punti eccezionali, costituenti una varietà entro S_n (p. es. giacente nell'iperpiano all'infinito).

In parole: se il sistema 5) è incompatibile per valori generici delle y_i , i valori delle y_i che lo rendono compatibile gli conferiscono un grado d'indeterminazione $r > n - m$.

Ossia: *Il sistema 5) è certo compatibile per valori generici delle y_i ove esso sia compatibile, con un grado d'indeterminazione $n - m$ (e non più), per valori particolari.*

Lo stesso ragionamento fondato sul computo delle costanti (§ 25) conduce alla conclusione più generale seguente:

Se fra due varietà algebriche irriducibili V_n, V_m , ad n, m dimensioni, intercede una corrispondenza per cui ad un punto generico di V_n corrispondano ∞^r punti di V_m ($r \geq 0$), e se — reciprocamente — i punti di V_m che nascono da punti generici di V_n corrispondono ad ∞^s punti di questa varietà, dove

$$0 \leq s \leq n + r - m,$$

si deduce che i punti generici di V_m nascono effettivamente da

$$\infty^{n+r-m}$$

punti (non eccezionali) di V_n .

Altrimenti i punti di V_m omologhi a punti generici di V_n formerebbero una varietà (eccezionale) con $m' < m$ dimensioni e si avrebbe

$$m' + s = n + r.$$

Il precedente enunciato esprime la forma geometrica più generale del principio di PLÜCKER-CLEBSCH, criterio di compatibilità delle equazioni basato su un computo di costanti. L'esatta applicazione della regola richiede di verificare, non solo che

$$n + r - m \geq 0,$$

ma che effettivamente un punto di V_m non può nascere da più che ∞^{n+r-m} punti generici di V_n . Inoltre non bisogna

dimenticare la condizione sopra espressa circa la *irreducibilità*, particolarmente di V_m . Sotto queste condizioni il principio di PLÜCKER-CLEBSCH, rigorosamente fondato, si applica direttamente, nella forma geometrica dell'enunciato precedente.

Valga come esempio la

Inversione del teorema di STEINER che due fasci proiettivi generano una conica.

Basta all'uopo il seguente ragionamento semplicissimo.

Nel piano, le coppie di fasci di raggi proiettivi sono ∞^7 e formano una varietà (razionale) irreducibile; ma se una conica deve essere generata da due fasci proiettivi, i centri di questi dovranno scegliersi sulla conica e dopo ciò la proiettività tra i fasci risulterà determinata, sicchè ogni conica ammetterà al più ∞^2 generazioni proiettive; le coniche essendo ∞^5 , si deduce che la conica più generale può essere generata come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di fasci proiettivi (ed ammette appunto ∞^2 generazioni siffatte).

Osservazione. La condizione dell'irreducibilità di V_m appare necessaria dal seguente

Sofisma. In ogni terna di punti della retta che formi un gruppo armonico col punto all'infinito, ciascuno dei tre punti divide per metà il segmento degli altri due.

Sappiamo che se una terna ABC forma un gruppo armonico col punto all'infinito della retta, vi è in essa un punto che biseca la coppia (cioè il segmento) degli altri due. Ora il nostro ragionamento si svolgerà come segue: le terne date (formanti gruppi armonici col punto all'infinito) sono ∞^2 , e le coppie di punti di codeste terne sono pure ∞^2 ; ma ci sono — fra esse — ∞^2 coppie bisecate dal terzo punto della terna, dunque *ogni* coppia di punti d'una terna che formi gruppo armonico col punto all'infinito viene bisecata dal terzo punto della medesima terna.

Il ragionamento suppone che la varietà V_2 delle coppie di punti, estratte dalle nostre ∞^2 terne, sia irreducibile, sicchè non possa distinguersi in essa una parte della stessa dimensione 2; invece in una terna la coppia dei punti coniugati armonici si distingue razionalmente dalle altre due, e così la varietà V_2 si spezza in due parti.