

Cap. III. Superfici di Riemann

1. DEFINIZIONI

Sia X una superficie topologica. Un atlante $\{U_j, \phi_j\}_{j \in J}$ si dice *analitico* (o *olomorfo*) se per ogni $j, k \in J$ tali che $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ l'applicazione

$$\phi_j \cdot \phi_k^{-1} : \phi_k(U_j \cap U_k) \rightarrow \mathbf{C}$$

è analitica (dove si è identificato \mathbf{R}^2 con \mathbf{C}).

Due atlanti analitici si dicono *equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante analitico. Una classe di equivalenza di atlanti analitici si dice una *struttura complessa* su X .

Una superficie topologica X su cui è assegnata una struttura complessa si dice una *superficie di Riemann*.

(1.1) PROPOSIZIONE Ogni superficie di Riemann X è una superficie differenziabile orientabile.

Dimostrazione

Sia $\{U_j, \phi_j\}_{j \in J}$ un atlante analitico per X . Per ogni $j, k \in J$ tali che $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ l'applicazione

$$\phi_j \cdot \phi_k^{-1} : \phi_k(U_j \cap U_k) \rightarrow \mathbf{C}$$

è analitica, e quindi è anche differenziabile; pertanto X è una superficie differenziabile. Siano u e v rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $\phi_j \cdot \phi_k^{-1}$. In ogni punto di $\phi_k(U_j \cap U_k)$ la matrice jacobiana ha determinante uguale a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

(l'uguaglianza è conseguenza delle equazioni di Cauchy-Riemann), il quale è positivo perché è non nullo. *q. e. d.*

Dalla proposizione (1.1) e dal teorema di classificazione delle superficie topologiche compatte segue che, se X è una superficie di Riemann compatta e connessa, allora X è omeomorfa a S^2 oppure a gT per qualche $g \geq 1$. L'intero g (uguale a 0 nel caso di S^2) è chiamato *genere* di X , e si denota $g(X)$.

(1.2) ESEMPI

1) Un aperto X di \mathbf{C} è una superficie di Riemann la cui struttura è definita dall'atlante in cui c'è un'unica carta locale: l'inclusione $\phi : X \subset \mathbf{C}$. Più in generale, ogni sottoinsieme aperto di una superficie di Riemann è una superficie di Riemann (la verifica è lasciata al lettore).

2) Il più semplice esempio di superficie di Riemann compatta è la retta proiettiva complessa $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$, che viene chiamata *sfera di Riemann*. Utilizzando coordinate omogenee $[z_0, z_1]$, denotiamo con $U_i = \{[z_0, z_1] : z_i \neq 0\}$, $i = 0, 1$, gli aperti fondamentali, con

$$\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbf{C}$$

l'applicazione $\phi_0([z_0, z_1]) = \frac{z_1}{z_0}$, e con

$$\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{C}$$

l'applicazione $\phi_1([z_0, z_1]) = \frac{z_0}{z_1}$. È immediato verificare che ϕ_0 e ϕ_1 sono omeomorfismi di U_0 ed U_1 rispettivamente su \mathbf{C} , e che inoltre

$$\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

per ogni $z \in \mathbf{C}^* = \phi_0(U_0 \cap U_1)$. Quindi $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ è un atlante analitico, che definisce su \mathbf{P}^1 una struttura di superficie di Riemann compatta. Essendo \mathbf{P}^1 omeomorfa ad una sfera, $g(\mathbf{P}^1) = 0$.

Poiché il complementare in \mathbf{P}^1 di U_0 consiste del solo punto $[0, 1]$, nella pratica è consuetudine identificare U_0 a \mathbf{C} per mezzo della carta locale ϕ_0 , e di denotare con ∞ il punto $[0, 1]$, ponendo quindi

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

Con queste notazioni ϕ_0 diventa l'identità di \mathbf{C} in se stesso, mentre la carta ϕ_1 manda $U_1 = \mathbf{P}^1 \setminus \{0\} = (\mathbf{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ in \mathbf{C} nel modo seguente:

$$\phi_1(z) = z^{-1} \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$$

$$\phi_1(\infty) = 0$$

3) Un altro esempio di superficie di Riemann compatta è un *toro complesso*, che si definisce nel modo seguente.

Siano $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ linearmente indipendenti su \mathbf{R} . Il sottogruppo di \mathbf{C} che essi generano è

$$\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2) = \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbf{Z}\}$$

che è chiamato il *reticolo* generato da ω_1 ed ω_2 . Denotiamo con X il gruppo quoziente \mathbf{C}/Λ con la topologia quoziente. Sia $p : \mathbf{C} \rightarrow X$ l'applicazione naturale.

X è omeomorfo ad un toro $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Consideriamo infatti

$$\Pi = \{z = a\omega_1 + \beta\omega_2 : \alpha, \beta \in \mathbf{R}, |\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1\}$$

Π è un parallelogramma chiuso, su cui la relazione di equivalenza indotta da p coincide con quella che viene introdotta dall'etichettatura che definisce un toro. Poiché la restrizione di p a Π è suriettiva, deduciamo che X è omeomorfo ad un toro.

X possiede una struttura complessa così definita.

Per ogni $x \in X$ si consideri un punto $\tilde{x} \in \mathbf{C}$ tale che $p(\tilde{x}) = x$ ed un intorno aperto \tilde{U} di \tilde{x} che non contiene coppie di punti equivalenti mod. Λ . Posto $U_x = p(\tilde{U})$, l'applicazione $\varphi_x = p^{-1} : U_x \rightarrow \tilde{U}$ è un omeomorfismo, e quindi (U_x, φ_x) è una carta locale.

Siano $x, y \in X$ tali che $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. È immediato verificare che

$$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1} : \varphi_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \mathbf{C}$$

altro non è se non la traslazione rispetto ad un elemento di Λ ; in particolare $\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}$ è un'applicazione analitica. Pertanto $\{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in X}$ è un atlante analitico su X , che fa di $X = \mathbf{C}/\Lambda$ una superficie di Riemann. Il genere di un toro complesso è uguale a 1.

2. APPLICAZIONI ANALITICHE TRA SUPERFICI DI RIEMANN

Sia X una superficie di Riemann, $A \subset X$ un aperto, $p \in A$. Diremo che una *funzione* $f : A \rightarrow \mathbf{C}$ è *analitica* (o *olomorfa*) in p se per ogni carta locale di un suo atlante analitico $\phi : U \rightarrow \mathbf{C}$ tale che $p \in U$ la funzione

$$f \cdot \phi^{-1} : \phi(A \cap U) \rightarrow \mathbf{C}$$

è analitica in $\phi(p)$. f si dice *analitica su A* se lo è in ogni punto $p \in A$. L'insieme delle funzioni analitiche su A si denota $H(A)$.

Siano X ed Y due superfici di Riemann su cui siano assegnati atlanti analitici, ed $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua. Diremo che f è *analitica* in un punto $p \in X$ se per ogni carta locale $\phi : U \rightarrow \mathbf{C}$ in X tale che $p \in U$ e per ogni carta locale $\psi : V \rightarrow \mathbf{C}$ in Y tale che $f(p) \in V$, la composizione $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbf{C}$ è analitica in $\phi(p)$. f si dice *analitica* se è analitica in ogni punto $p \in X$.

ESERCIZI: 1) Dimostrare che affinché un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ tra due superfici di Riemann sia analitica in un punto $p \in X$ è sufficiente che esistano una carta locale $\phi : U \rightarrow \mathbf{C}$ in X tale che $p \in U$, ed una carta locale $\psi : V \rightarrow \mathbf{C}$ in Y tale che $f(p) \in V$, tali che la composizione $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbf{C}$ sia analitica in $\phi(p)$.

2) Verificare che le definizioni date sopra dipendono solo dalla struttura complessa su X ed Y e non dagli atlanti analitici scelti.

3) Dimostrare che una funzione analitica $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ è analitica come applicazione tra le superfici di Riemann X e \mathbf{C} .

4) Dimostrare che se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ sono applicazioni analitiche tra superficie di Riemann, allora la composizione $g \circ f : X \rightarrow Z$ è un'applicazione analitica.

Un'applicazione analitica $f : X \rightarrow Y$ è un *isomorfismo analitico*, o semplicemente un *isomorfismo*, se esiste un'applicazione analitica $g : Y \rightarrow X$ tale che $g \circ f = 1_X$ e $f \circ g = 1_Y$. Se un isomorfismo di X su Y esiste diremo che X ed Y sono *isomorfe*. È ovvio che l'isomorfismo è una relazione di equivalenza tra superfici di Riemann. Un isomorfismo di una superficie di Riemann X in se stessa si dice un *automorfismo* di X . Gli automorfismi di una superficie di Riemann X costituiscono un gruppo rispetto alla composizione, che si denota $\text{Aut}(X)$.

(2.1) PROPOSIZIONE: Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione analitica tra due superfici di Riemann connesse.

- a) Se f non è costante allora è un'applicazione aperta e ha fibre discrete.
- b) Se X è compatta ed f non è costante allora f è suriettiva e ha fibre finite.
- c) Se X è compatta ed Y non è compatta allora f è costante. In particolare ogni funzione analitica $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ su una superficie di Riemann compatta X è costante.
- d) Se f è biunivoca allora è un isomorfismo.

Dimostrazione

a) Denotiamo con A l'insieme dei punti di X in cui f è aperta. Per la definizione stessa di applicazione aperta, A è aperto. Sia $x \in X \setminus A$, e siano $\phi : U \rightarrow \mathbf{C}$ in X tale che $p \in U$, $\psi : V \rightarrow \mathbf{C}$ in Y tale che $f(p) \in V$ carte locali. Allora la funzione

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbf{C}$$

non è aperta nel punto $\phi(x)$. Pertanto $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è costante in un intorno di $\phi(x)$, e quindi non è aperta in tale intorno: ma allora f non è aperta in un intorno di x . Segue che x è interno a $X \setminus A$, e quindi $X \setminus A$ è aperto, cioè A è chiuso. Dalla connessione di X si deduce che $A = X$ oppure $A = \emptyset$. Poiché f non è costante, $A \neq \emptyset$, quindi f è aperta in tutto X .

Supponiamo che x sia un punto di accumulazione di $f^{-1}(y)$. Sia $\phi : U \rightarrow \mathbf{C}$ una carta locale in X tale che $x \in U$ e sia $\psi : V \rightarrow \mathbf{C}$ una carta locale in Y tale che $y \in V$. Per ipotesi esiste una successione $\{x_n\}$ di punti distinti di $f^{-1}(y)$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$; non è restrittivo supporre che $\{x_n\} \subset U \cap f^{-1}(V)$. Allora la funzione

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} - \psi(y) : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbf{C}$$

si annulla nel punto $\phi(x)$ e nei punti $\phi(x_n)$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi(x)$: dal principio di identità delle funzioni analitiche segue che $\psi \circ f \circ \phi^{-1} - \psi(y)$ è identicamente nulla, e quindi f è costante su $U \cap f^{-1}(V)$. Ma allora f non è aperta in x e ciò contraddice quanto dimostrato in precedenza. Quindi $f^{-1}(y)$ è un sottoinsieme discreto di X .

b) Poiché Y è di Hausdorff ed X è compatto, $f(X)$ è chiuso in Y . Se f non è costante allora $f(X)$ è anche aperto e quindi $f(X) = Y$. Sia $y \in Y$. Allora $f^{-1}(y)$ è chiuso in X e quindi è compatto. Pertanto $f^{-1}(y)$, essendo compatto e discreto, è finito (G2, prop. 9.4 pag. 104).

c) Se f non è costante allora come in b) si deduce che $f(X) = Y$, e ciò contraddice l'ipotesi che Y non sia compatta. Quindi f è costante.

d) Poiché f analitica, è aperta, e quindi è un omeomorfismo. Sia $f^{-1} : Y \rightarrow X$ l'omeomorfismo inverso di f . È sufficiente dimostrare che f^{-1} è analitica. Sia $y \in Y$ e sia $\psi : V \rightarrow \mathbf{C}$ una carta locale in Y tale che $y \in V$; sia inoltre $\phi : U \rightarrow \mathbf{C}$ una carta locale in X tale che $x := f^{-1}(y) \in U$. Si ha:

$$\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})^{-1} : \psi(V \cap f(U)) \rightarrow \mathbf{C}$$

Poiché f è analitica, $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è analitica ed è un omeomorfismo su un aperto di \mathbf{C} , il suo insieme di definizione. Pertanto soddisfa $g'(z) \neq 0$ in ogni punto: dal teorema dell'applicazione inversa segue che $g^{-1} = \phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ è analitica. Pertanto f^{-1} è analitica. *q.e.d.*

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione analitica e non costante tra due superfici di Riemann connesse e sia $p \in X$. Siano $q = f(p)$, $\phi : U \rightarrow \mathbf{C}$ una carta locale in X tale che $p \in U$, e $\psi : V \rightarrow \mathbf{C}$ una carta locale in Y tale che $f(U) \subset V$.

L'indice di ramificazione di f in p si definisce come

$$O_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1} - \psi(q))$$

cioè come

$$e_{\psi \circ f \circ \phi^{-1}}(\phi(p))$$

(cfr. Definizione (5.5)) e si denota $e_f(p)$. È un intero ≥ 1 , indipendente dalla scelta delle carte locali ϕ e ψ .

L'indipendenza dalle carte locali si verifica nel modo seguente.

Dalla definizione segue che in un intorno sufficientemente piccolo di $\phi(p)$ la funzione $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ è la composizione di un isomorfismo analitico locale con la funzione $w \mapsto w^{e_f(p)}$. Scegliendo altre carte locali $\tilde{\phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbf{C}$ e $\tilde{\psi} : \tilde{V} \rightarrow \mathbf{C}$, per opportuni intorni \tilde{U} di p e \tilde{V} di q , si ha:

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})$$

Si deduce che in un intorno sufficientemente piccolo di $\phi(p)$ la funzione $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}$ è la composizione di un isomorfismo analitico locale con la funzione $w \mapsto w^e$ per qualche $e \geq 1$. Poiché $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ e $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ sono applicazioni oloedriche invertibili, segue che $e = e_f(p)$.

Un punto $p \in X$ tale che $e_f(p) \geq 2$ si dice *punto di ramificazione* di f . Un punto di ramificazione p si dice *semplice* se $e_f(p) = 2$. Per il lemma (5.3), i punti di ramificazione di f costituiscono un sottoinsieme discreto di X .

(2.2) PROPOSIZIONE: Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione analitica e non costante tra due superfici di Riemann compatte e connesse.

a) f possiede un numero finito di punti di ramificazione.

b) Se $R(f) \subset X$ è l'insieme dei punti di ramificazione e $S = f[R(f)]$, l'applicazione

$$\tilde{f} : X \setminus f^{-1}(S) \rightarrow Y \setminus S$$

determinata da f è un rivestimento finito; il suo grado n si dice grado di f .

c) Per ogni $y \in Y$ si ha:

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} e_f(x) = n$$

Dimostrazione

a) Come già osservato l'insieme $R(f)$ dei punti di ramificazione di f è un sottoinsieme discreto di X . Poiché X è compatta $R(f)$ è un insieme finito.

b) \tilde{f} è un isomorfismo analitico locale e quindi è un omeomorfismo locale. Inoltre \tilde{f} è suriettiva perché f lo è. Sia $y \in Y \setminus S$ e per ogni $x \in f^{-1}(y)$ sia U_x un intorno aperto di x in $X \setminus f^{-1}(S)$ tale che si abbia $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$ se $x \neq x'$ e la restrizione di f a U_x sia un omeomorfismo sull'immagine. Sia $V \subset \cap_{x \in f^{-1}(y)} f(U_x)$ aperto.

Facciamo vedere che se V è sufficientemente piccolo allora $f^{-1}(V) \subset \cup_{x \in f^{-1}(y)} U_x$. Altrimenti esisterebbe un sistema fondamentale di intorni $\{V_n\}$ di y ed una successione $\{x_n \in f^{-1}(V_n) \setminus (\cup_{x \in f^{-1}(y)} U_x)\}$. Per la compattezza di X la successione $\{x_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k}\}$; necessariamente $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in f^{-1}(y)$, e questa è una contraddizione perché $\cup_x U_x$ è un intorno di $f^{-1}(y)$.

Pertanto $V \subset Y \setminus S$ e $f^{-1}(V) = \cup_x (U_x \cap f^{-1}(V))$ e ognuno degli aperti $U_x \cap f^{-1}(V)$ viene mandato da f omeomorficamente su V : quindi V è ben ricoperto. Se ne deduce che \tilde{f} è un rivestimento. Il suo grado è finito perché f ha fibre finite.

c) Se $y \in Y \setminus S$ allora la conclusione è evidente, perché $e_f(x) = 1$ per ogni $x \in X \setminus f^{-1}(S)$ e f ha grado n .

Supponiamo $y \in S$, e sia $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Per ogni $i = 1, \dots, m$ è possibile trovare intorni aperti U_i di x_i e V_i di y tali che $f(U_i) = V_i$ e in coordinate locali l'applicazione $f : U_i \rightarrow V_i$ sia $z \mapsto z^{e_f(x_i)}$. Se V è un intorno aperto di y contenuto in $V_1 \cap \dots \cap V_m$ e tale che $V \cap S = \{y\}$ allora per ogni $y' \in V$, $y' \neq y$, la fibra $f^{-1}(y')$ consiste di $\sum_{i=1}^m e_f(x_i)$ punti; ma questo numero dev'essere uguale al grado n di f perché $y' \notin S$. *q.e.d.*

Un'applicazione analitica e non costante $f : X \rightarrow Y$ di superfici di Riemann compatte e connesse si dice un *rivestimento ramificato*. I punti dell'immagine $S = f(R(f))$ del luogo di ramificazione $R(f)$ si dicono *punti di diramazione* di f .

Se f ha grado 1 allora necessariamente $R(f) = \emptyset$ e f è un rivestimento di grado 1, cioè è un omeomorfismo, e quindi è un isomorfismo.

(2.3) ESEMPI

1) Sia n un intero positivo,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad a_n \neq 0$$

un polinomio di grado affettivo n . La funzione analitica $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ definita da f si estende ad una funzione analitica non costante

$$\tilde{f} : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$$

ponendo

$$\tilde{f}(z_0, z_1) = [1, f(z_1/z_0)] = [z_0^n, F(z_0, z_1)]$$

dove $F(z_0, z_1) = z_0^n f(z_1/z_0)$ è il polinomio omogeneizzato di f . Poiché evidentemente \tilde{f} coincide con f su $\mathbf{C} = U_0$ e $\tilde{f}(\infty) = \tilde{f}(0, 1) = \infty$, occorre solo verificare che \tilde{f} è analitica in ∞ . Consideriamo un intorno A di ∞ contenuto in U_1 e tale che $f(A) \subset U_1 = \mathbf{P}^1 \setminus \{0\}$; si ha

$$\begin{aligned} \phi_1 \cdot \tilde{f} \cdot \phi_1^{-1}(t) &= \phi_1(\tilde{f}(t, 1)) = \phi_1([t^n, F(t, 1)]) = \\ &= \frac{t^n}{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n} \end{aligned}$$

che è analitica in $\phi_1(A)$. Quindi \tilde{f} è olomorfa in ∞ . Pertanto \tilde{f} , essendo non costante, è un rivestimento ramificato ed in particolare è suriettiva. Quindi $f(z) = 0$ ha soluzioni. Ciò fornisce una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

Si osservi che $e_{\tilde{f}}(\infty) = o_0(\phi_1 \circ \tilde{f} \circ \phi_1^{-1}) = n$. Pertanto, poiché $\tilde{f}^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, \tilde{f} è un rivestimento ramificato di grado n .

2) La funzione

$$\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$$

definita da

$$\exp(z) = e^z$$

non può essere estesa ad una funzione analitica di \mathbf{P}^1 in \mathbf{P}^1 . Infatti \exp non è costante né suriettiva (essendo $0 \notin \text{Im}(\exp)$) e quindi non possiede un'estensione $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ suriettiva; a maggior ragione non possiede un'estensione analitica (per la (4.1)b)).

ESERCIZIO: Dimostrare che le funzioni $\sin, \cos: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ non si estendono a funzioni analitiche $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$.

Il prossimo risultato è una formula che mette in relazione il grado di un rivestimento ramificato di superfici di Riemann compatte, i loro generi e il numero di punti di ramificazione.

(2.4) **TEOREMA** Se $f: X \rightarrow Y$ è un rivestimento ramificato di grado n di superfici di Riemann compatte e connesse di generi $g(X)$ e $g(Y)$ rispettivamente, si ha:

$$2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + \sum_{x \in R(f)} (e_f(x) - 1) \quad [2.1]$$

La [2.1] è chiamata formula di Riemann-Hurwitz.

Dimostrazione

Sia $S \subset Y$ l'insieme dei punti di diramazione di f . È possibile trovare una triangolazione τ di Y tale che:

- abbia ogni punto di S come vertice,
- ogni triangolo non contenga più di un vertice che sta in S ,
- per ogni $T \in \tau$, $f^{-1}(T)$ sia l'unione di n triangoli che a due a due si incontrano in al più un punto di $R(f)$.

Le prime due condizioni possono essere soddisfatte facilmente affinando opportunamente una triangolazione qualunque di Y . L'ultima condizione sarà soddisfatta affinando ulteriormente fino a che ogni triangolo non contenente punti di S tra i suoi vertici sia contenuto in un aperto ben ricoperto di $Y \setminus S$; ed ogni triangolo avente un vertice in $s \in S$

sia contenuto in un aperto V avente le stesse proprietà descritte nella dimostrazione della proposizione (2.2)c).

I triangoli di cui sono unione gli $f^{-1}(T)$, $t \in \tau$, costituiscono una triangolazione $\tilde{\tau}$ di X . Si ha:

$$t(\tilde{\tau}) = nt(\tau); \quad l(\tilde{\tau}) = nl(\tau).$$

Ad ogni vertice p di τ corrispondono un numero di vertici di $\tilde{\tau}$ pari al numero di punti di $f^{-1}(p)$, che è uguale a $n - \sum_{x \in f^{-1}(p)} (e_f(x) - 1)$. Pertanto:

$$v(\tilde{\tau}) = nv(\tau) - \sum_{x \in R(f)} (e_f(x) - 1).$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= -v(\tilde{\tau}) + l(\tilde{\tau}) - t(\tilde{\tau}) = -nv(\tau) + \sum_{x \in R(f)} (e_f(x) - 1) + nl(\tau) - nt(\tau) = \\ &= n(2g(Y) - 2) + \sum_{x \in R(f)} (e_f(x) - 1) \end{aligned}$$

q.e.d.

ESERCIZIO: Verificare la formula di Hurwitz per il rivestimento ramificato $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ definito dalla funzione $z \mapsto z^n$.

Il risultato seguente si applica utilmente in molte circostanze:

(2.5) **PROPOSIZIONE** *Sia Y una superficie di Riemann, $p : X \rightarrow Y$ un rivestimento tale che X abbia base numerabile (ad esempio p abbia fibre finite o numerabili). Esiste un'unica struttura di superficie di Riemann su X tale che p sia analitica.*

Dimostrazione

Per ipotesi X è a base numerabile; inoltre segue subito che X è di Hausdorff dal fatto che p è un rivestimento. Consideriamo un atlante $\{U_j, \phi_j\}_{j \in J}$ per Y tale che gli aperti U_j siano ben ricoperti. Per ogni $j \in J$ sia $p^{-1}(U_j) = \coprod_{\alpha} V_{j\alpha}$ dove i $V_{j\alpha}$ sono aperti di X mandati da p omeomorficamente su U_j . La composizione $\phi_j \circ p : V_{j\alpha} \rightarrow U_j \rightarrow \mathbf{C}$ è una carta locale in X . Al variare di α e di $j \in J$ si ottiene un atlante. Quest'atlante è analitico perché lo è $\{U_j, \phi_j\}$; si verifica subito che p è un'applicazione analitica rispetto alla struttura complessa così definita in X . L'unicità segue dal fatto che, essendo p analitica, le applicazioni $\phi_j \circ p$ sono analitiche, e quindi sono carte locali per qualsiasi struttura complessa che rende p analitica.

q.e.d.

Dimostriamo infine un altro importante risultato riguardante le applicazioni analitiche tra superfici di Riemann.

(2.6) PROPOSIZIONE Sia $f : X \setminus \Delta \rightarrow Y$ un'applicazione analitica, dove X ed Y sono superfici di Riemann, e $\Delta \subset X$ finito. Se esiste un'applicazione continua $\hat{f} : X \rightarrow Y$ che estende f , allora \hat{f} è analitica.

Dimostrazione

Sia $x \in \Delta$, e siano $z : U \rightarrow \mathbf{C}$, $w : V \rightarrow \mathbf{C}$ carte locali in X e in Y rispettivamente, tali che $x \in U$ e $\hat{f}(x) \in V$. La funzione

$$w \circ \hat{f} \circ z^{-1} : z(U \cap \hat{f}^{-1}(V)) \rightarrow \mathbf{C}$$

è analitica in $z(U \cap \hat{f}^{-1}(V)) \setminus z(x)$ e limitata in un intorno di $z(x)$, quindi è analitica anche in $z(x)$. Ciò dimostra che \hat{f} è analitica in x . *q.e.d.*

Come corollario della proposizione precedente possiamo dare una dimostrazione di un importante teorema riguardante le funzioni intere.

((2.7) COROLLARIO (Liouville) Se $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ è una funzione analitica e limitata, allora f è costante.

Dimostrazione

Se f è limitata allora $f \circ \phi_1^{-1}$ è limitata in un intorno di 0, e quindi ha una singolarità eliminabile in 0. Pertanto f si estende ad una funzione olomorfa $\hat{f} : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$. Ma essendo f limitata, \hat{f} non è suriettiva e quindi è costante. *q.e.d.*

3. FUNZIONI MEROMORFE SU UNA SUPERFICIE DI RIEMANN

Sia X una superficie di Riemann. Una *funzione meromorfa* su X è un'applicazione analitica $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ la cui immagine non sia ridotta al solo punto ∞ .

Questa definizione generalizza la (6.4).

Infatti, sia X un aperto di \mathbf{C} ed $f \in M(X)$ una funzione meromorfa nel senso di (6.4). Sia $S \subset X$ il sottoinsieme dei poli di f . Ponendo $f(z) = \infty$ per ogni $z \in S$, si associa ad f un'applicazione che denotiamo con la stessa lettera $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$. Per ogni punto $t \in X \setminus S$ esiste un disco aperto $U_t \subset X \setminus S$ centrato in t tale che la restrizione di f a U_t sia olomorfa e quindi abbia immagine contenuta in \mathbf{C} . Pertanto $\phi_0 \circ f \circ \phi_{0,t}^{-1}$ è olomorfa in ogni $t \in U_t$ e quindi f è olomorfa in ogni punto $t \in X \setminus S$. Se invece $t \in S$ allora esiste un disco U_t centrato in t tale che $U_t \subset X$ e $o_{t'}(f) = 0$ per ogni $t' \in U_t \setminus \{t\}$. Quindi $f(U_t) \subset \mathbf{P}^1 \setminus \{[1, 0]\}$. Si ha:

$$\phi_1 \circ f = 1/f(t)$$

che è olomorfa in U_t . Quindi f è olomorfa anche nei punti di S .

Viceversa, supponiamo che X sia un aperto di \mathbf{C} ed $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ sia un'applicazione olomorfa non identicamente uguale a ∞ . L'insieme $S = f^{-1}(\infty)$ è discreto, per la proposizione (2.1). Sia $t \in S$ e U_t un disco aperto centrato in t tale che $U_t \subset X$ e $f(U_t) \subset \mathbf{P}^1 \setminus \{0\}$. La composizione di $f|_{U_t}$ con la carta locale ϕ_1 è la funzione $1/f : U_t \rightarrow \mathbf{C}$, che per ipotesi è olomorfa in U_t . Pertanto f è meromorfa in U_t . Poiché evidentemente f è olomorfa in ogni punto di $X \setminus S$, concludiamo che f è meromorfa in ogni punto di X nel senso di I.6.

L'insieme delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann X si denota $M(X)$. Supponiamo X connessa. Osserviamo che se $f, g \in M(X)$ allora $f \pm g, fg \in M(X)$ sono ben definite (perché lo sono localmente); similmente se $f \in M(X)$, $f \neq 0$, allora $1/f \in M(X)$. Pertanto $M(X)$ è un campo.

È ovvio che ogni funzione analitica su X è anche meromorfa se la si interpreta come una funzione a valori nell'aperto U_0 di \mathbf{P}^1 , e quindi le funzioni analitiche su X costituiscono un sottoanello $H(X)$ di $M(X)$; in particolare $M(X)$ contiene le funzioni costanti, che costituiscono un sottocampo che si identifica a \mathbf{C} .

Se $f \in M(X)$ allora i punti di $f^{-1}(0)$ e di $f^{-1}(\infty)$ si dicono rispettivamente gli *zeri* e i *poli* di f .

Supponiamo che $f \in M(X)$ non sia identicamente nulla. Sia $x \in X$ e sia $\phi : U \rightarrow \mathbf{C}$ una carta locale tale che $x \in U$ e $f(U)$ sia contenuto in uno dei due aperti U_i , $i = 0, 1$. L'intero:

$$o_x(f) = o_{\phi(x)}(f \circ \phi^{-1})$$

sarà chiamato *ordine di f in x* .

Osserviamo che $o_x(f) \neq 0$ se e solo se $f(x) = 0$ oppure $f(x) = \infty$. Se $f(x) = 0$ allora si ha $o_x(f) = e_f(x)$; se invece $f(x) = \infty$ allora $o_x(f) = -e_f(x)$ perché $1/z$ è una carta locale in un intorno di ∞ . In particolare la definizione di $o_x(f)$ è indipendente dalla carta locale ϕ .

(3.1) PROPOSIZIONE Se f è una funzione meromorfa non costante su una superficie di Riemann compatta X , allora $o_x(f) = 0$ per tutti gli $x \in X$ tranne al più un numero finito, e:

$$\sum_{x \in X} o_x(f) = 0$$

Dimostrazione

Come osservato sopra, $o_x(f)$ è diverso da zero solo nei punti di $f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\infty)$, e quest'insieme è finito perché X è compatta ed f non è costante. Sia n il grado di f . Per la proposizione (4.2)c) si ha:

$$\sum_{x \in f^{-1}(0)} o_x(f) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} e_f(x) = n$$

mentre

$$\sum_{x \in f^{-1}(\infty)} o_x(f) = \sum_{x \in f^{-1}(\infty)} -e_f(x) = -\left(\sum_{x \in f^{-1}(\infty)} e_f(x)\right) = -n$$

e quindi la conclusione segue.

q.e.d.

(3.2) ESEMPI

1) Siano $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, $q(z) = b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m \in \mathbf{C}[z]$, $a_nb_m \neq 0$, due polinomi non nulli privi di fattori comuni, e sia

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

la corrispondente funzione razionale. La funzione meromorfa $R : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$ si estende ad una funzione $\tilde{R} : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ ponendo

$$\tilde{R}(z_0, z_1) = \begin{cases} [Q(z_0, z_1), z_0^{m-n}P(z_0, z_1)] & \text{se } m \geq n \\ [z_0^{n-m}Q(z_0, z_1), P(z_0, z_1)] & \text{se } m < n \end{cases}$$

dove $P(z_0, z_1) = z_0^n p(z_1/z_0)$ e $Q(z_0, z_1) = z_0^m q(z_1/z_0)$ sono i polinomi omogeneizzati di p e di q rispettivamente. Verifichiamo che $\tilde{R} \in M(\mathbf{P}^1)$. Poiché $\tilde{R} \circ \phi_0^{-1} = R$ dobbiamo solo verificare che \tilde{R} è meromorfa in $\infty = [0, 1]$.

Si ha, supponendo $m < n$:

$$\tilde{R} \circ \phi_1^{-1}(t) = \tilde{R}(t, 1) = [t^{n-m}Q(t, 1), P(t, 1)]$$

quindi $\tilde{R}(0, 1) = [0, 1]$ e in un intorno di $t = 0$ abbiamo

$$\phi_1 \circ \tilde{R} \circ \phi_1^{-1}(t) = \frac{t^{n-m}Q(t, 1)}{P(t, 1)} = \frac{b_0t^m + b_1t^{m-1} + \cdots + b_mt^{n-m}}{a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n}$$

e quindi $\phi_1 \circ \tilde{R} \circ \phi_1^{-1}$ ha una singolarità eliminabile in 0 e quindi \tilde{R} è analitica in ∞ . Se $m \geq n$ la verifica è simile. Riassumendo si ha:

$$\tilde{R}(0, 1) = \begin{cases} [0, 1] & \text{se } m < n \text{ (}\tilde{R}\text{ ha un polo di ordine } n - m \text{ in } [0, 1]) \\ [1, 0] & \text{se } m > n \text{ (}\tilde{R}\text{ ha uno zero di ordine } m - n \text{ in } [0, 1]) \\ [b_m, a_n] & \text{se } m = n \end{cases}$$

Viceversa, sia $f(z) \in M(\mathbf{P}^1)$, non identicamente nulla, e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ i poli di f in \mathbf{C} , di ordini n_1, \dots, n_s rispettivamente. La funzione

$$g(z) = f(z)(z - \alpha_1)^{n_1} \cdots (z - \alpha_s)^{n_s}$$

è analitica in tutto \mathbf{C} , e quindi

$$g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

dove il secondo membro è una serie di potenze a raggio di convergenza $+\infty$. Poiché $f(z)$ è analitica all' ∞ , lo è anche $g(z)$, e quindi $\sum_{k \geq 0} a_k t^{-k}$ è una funzione meromorfa in 0. Pertanto $a_k = 0$ per ogni $k \gg 0$. Quindi $g(z)$ è un polinomio, e

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \alpha_1)^{n_1} \cdots (z - \alpha_s)^{n_s}}$$

è una funzione razionale.

Dall'analisi fatta segue che $R(z) \in M(\mathbf{P}^1)$ è analitica in \mathbf{C} se e solo se $R(z)$ è un polinomio.

Se $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ dove $P(z)$ e $Q(z)$ sono due polinomi non nulli privi di fattori comuni, il grado della funzione meromorfa $R(z)$, come applicazione analitica di \mathbf{P}^1 in sé, è uguale a $\max\{\text{gr}(P), \text{gr}(Q)\}$ (per verificarlo è sufficiente calcolare $\sum_{f(x)=0} o_x(f)$).

2) Gli automorfismi di \mathbf{P}^1 .

Poiché gli automorfismi di \mathbf{P}^1 sono le funzioni meromorfe su \mathbf{P}^1 non costanti e di grado 1, essi sono della forma

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{3.1}$$

con $ad - bc \neq 0$ (questa condizione garantisce che numeratore e denominatore non siano proporzionali e quindi che R non sia costante). Una funzione meromorfa della forma [4.1] è detta *trasformazione di Möbius* o *trasformazione lineare fratta*. Pertanto il gruppo $\text{Aut}(\mathbf{P}^1)$ degli automorfismi di \mathbf{P}^1 consiste delle trasformazioni di Möbius [4.1].

Si osservi che la trasformazione [3.1] non determina univocamente i coefficienti a, b, c, d : se infatti $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ allora i coefficienti $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$ definiscono la stessa trasformazione. Si ha $R(-d/c) = \infty$, $R(\infty) = a/c$; in particolare $R(\infty) = \infty$ se e solo se $c = 0$, cioè se $R(z) = az + b$ è un'applicazione lineare.

La composizione di due trasformazioni di Möbius $R(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ e $S(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ è:

$$(S \cdot R)(z) = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}$$

dove

$$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = (a'd' - b'c')(ad - bc) \neq 0$$

La trasformazione identità $I(z) = z$ corrisponde ai coefficienti $a = d \neq 0$, $b = c = 0$, mentre l'inversa della [4.1] è la trasformazione di Möbius:

$$R^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Una conseguenza di queste osservazioni è che si ha un omomorfismo suriettivo di gruppi:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

il cui nucleo consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{I}_2 \quad \lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$$

e quindi si identifica al gruppo moltiplicativo $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Tutto ciò può essere riassunto nella successione esatta di gruppi:

$$(1) \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1) \rightarrow (1)$$

Si deduce che $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1)$ si identifica al gruppo $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ delle proiettività di \mathbf{P}^1 in sé. Per ulteriori dettagli rinviamo al complemento 27.10.1 del testo E. Sernesi: *Geometria 1*.

3) Gli automorfismi di \mathbf{C} .

Sia $z \mapsto f(z)$ un automorfismo di \mathbf{C} : allora f è una funzione intera. Poiché f non è costante, non è analitica all' ∞ (le sole funzioni analitiche sull'intera sfera di Riemann sono le costanti). Pertanto si hanno due possibilità:

- i) f ha una singolarità essenziale all' ∞ .
- ii) f ha un polo all' ∞ .

Poiché f è un omeomorfismo, l'immagine del disco $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ è un aperto non vuoto che non interseca $f(\mathbf{C} \setminus D)$. Quindi $f(\mathbf{C} \setminus D)$ non è denso in \mathbf{C} , e quindi il caso i) non si verifica. Quindi si verifica il caso ii), e pertanto f si estende ad un automorfismo di \mathbf{P}^1 che manda $\infty \mapsto \infty$. Pertanto si ha $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. Quindi: $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ consiste delle trasformazioni lineari:

$$f(z) = az + b,$$

dove $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$.

Se $a = 1$, f è una traslazione, e non ha punti fissi, cioè non esistono punti z tali che $f(z) = z$. Se $a \neq 1$ allora f ha l'unico punto fisso: $z = \frac{b}{1-a}$.

L'esempio (3.2)1) mostra in particolare che $M(\mathbf{P}^1)$ contiene funzioni meromorfe non costanti. Vedremo nel prossimo paragrafo che ogni superficie di Riemann di genere 1 possiede funzioni meromorfe non costanti.

Più in generale vale il seguente risultato, di fondamentale importanza nella teoria delle superfici di Riemann:

(3.3) **TEOREMA** (di esistenza di Riemann) *Su ogni superficie di Riemann compatta e connessa esistono funzioni meromorfe non costanti.*

La dimostrazione di questo teorema utilizza strumenti che non saranno sviluppati in questo corso, e quindi verrà omessa.

4. FUNZIONI MEROMORFE SUI TORI COMPLESSI

Una funzione $f(z)$ meromorfa in \mathbf{C} si dice *periodica* se esiste $\omega \in \mathbf{C}$, $\omega \neq 0$, tale che

$$f(z + \omega) = f(z)$$

per ogni $z \in \mathbf{C}$. Il numero ω si dice un *periodo* di f . Dalla definizione segue che si ha anche $f(z + k\omega) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbf{C}$ e $k \in \mathbf{Z}$, e quindi anche $k\omega$ è un periodo di f se lo è ω .

Se f è costante allora ogni $\omega \in \mathbf{C}$ è periodo di f . Esempi di funzioni periodiche non costanti sono e^z , $\text{sen}(z)$, di periodo $2\pi i$ e 2π rispettivamente.

Una funzione periodica $f(z)$ si dice *doppiamente periodica* o *ellittica* se tutti i suoi periodi sono della forma

$$\omega = h\omega_1 + k\omega_2 \quad h, k \in \mathbf{Z}$$

dove $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ sono due numeri complessi linearmente indipendenti su \mathbf{R} .

L'insieme dei periodi di una funzione ellittica è dunque un reticolo

$$\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

Dato un reticolo Λ , l'insieme delle funzioni ellittiche il cui reticolo dei periodi coincide con, o contiene, Λ , si denota $E(\Lambda)$ ed i suoi elementi si dicono *funzioni ellittiche relative a Λ* . Per convenzione le funzioni costanti si considerano ellittiche relative a qualunque Λ . Si osservi che se $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ allora $E(\Lambda_2) \subset E(\Lambda_1)$.

È immediato verificare che $E(\Lambda)$ costituisce un sottocampo di $M(\mathbf{C})$.

Consideriamo il toro complesso $X = \mathbf{C}/\Lambda$, e denotiamo con $p : \mathbf{C} \rightarrow X$ l'applicazione naturale. È evidente che p è olomorfa.

Se $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ è un'applicazione olomorfa, la composizione

$$g = f \circ p : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$$

è una funzione meromorfa in \mathbf{C} tale che $g(z + \omega) = g(z)$ per ogni $\omega \in \Lambda$; quindi $g \in E(\Lambda)$.

Viceversa, se $g \in E(\Lambda)$ allora g , assumendo lo stesso valore su ogni classe laterale rispetto a Λ , definisce un'applicazione $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ tale che $g = f \circ p$. Poiché le carte locali in X sono definite come inverse locali di p , segue immediatamente che f è olomorfa.

Conclusione: l'applicazione $f \mapsto f \circ p$ definisce un isomorfismo di campi

$$M(X) \rightarrow E(\Lambda)$$

Vogliamo dimostrare che per ogni reticolo Λ esistono funzioni ellittiche non costanti in $E(\Lambda)$, o equivalentemente che esistono funzioni meromorfe non costanti su $X = \mathbf{C}/\Lambda$. Fissiamo dunque un reticolo qualsiasi $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$, con $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ linearmente indipendenti su \mathbf{R} .

(4.1) LEMMA *La serie*

$$\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^r}$$

converge per ogni $r \geq 3$.

Dimostrazione

Per ogni $n \geq 1$ denotiamo con P_n l'insieme degli $\omega \in \Lambda$ della forma

$$\omega = h\omega_1 + k\omega_2$$

con $n \in \{\pm h, \pm k\}$, $|h|, |k| \leq n$. Si verifica immediatamente che: $P_n \cap P_m = \emptyset$ se $n \neq m$, e

$$\Lambda \setminus \{0\} = \bigcup_n P_n$$

Inoltre P_n consiste di $8n$ elementi, ognuno dei quali ha modulo $\geq cn$, dove $c = \min_{\omega \in P_1} |\omega|$. Quindi:

$$\sum_{\omega \in P_n} \frac{1}{|\omega|^r} \leq \frac{8n}{c^r n^r}$$

Sommando rispetto ad n troviamo:

$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^r} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\omega \in P_n} \frac{1}{|\omega|^r} \right) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{8}{c^r n^{r-1}}$$

e questa serie converge per $r \geq 3$. La conclusione segue.

q.e.d.

(4.2) PROPOSIZIONE *La serie di funzioni meromorfe:*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

converge normalmente in ogni disco $D_0(R)$, $R > 0$, e quindi ha per somma una funzione meromorfa in tutto il piano.

Dimostrazione

Fissato $R > 0$, si ha $|\omega| \geq R$ per tutti gli $\omega \in \Lambda$ eccettuato al più un numero finito. Quindi per tutti i termini della serie, eccettuato al più un numero finito, si ha, se $|z| < R$:

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{2\omega z - z^2}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| =$$

$$= \frac{|z(2 - \frac{z}{\omega})|}{|\omega^3| |1 - \frac{z}{\omega}|^2} \leq \frac{R \frac{3}{2}}{|\omega^3| \frac{1}{4}} = \frac{6R}{|\omega^3|}$$

Dal lemma (4.1) segue che la serie $\wp(z)$ converge normalmente nel disco $D_0(R)$. *q.e.d.*

La funzione meromorfa in \mathbf{C} somma della serie $\wp(z)$ è detta *funzione \wp di Weierstrass* e denotata con lo stesso simbolo. Ovviamente $\wp(z)$ dipende dalla scelta del reticolo Λ . Le sue principali proprietà sono date dalla seguente:

(4.3) PROPOSIZIONE:

- a) $\wp(z) \in E(\Lambda)$, cioè $\wp(z)$ è una funzione ellittica relativa a Λ .
- b) I poli di $\wp(z)$ sono esattamente i punti di Λ , ed essi sono poli di ordine 2 con residuo nullo.
- c) La funzione meromorfa su X definita da $\wp(z)$ ha grado 2.
- d) $\wp(-z) = \wp(z)$ per ogni $z \in \mathbf{C}$, cioè $\wp(z)$ è una funzione pari.
- e) La derivata $\wp'(z)$ appartiene a $E(\Lambda)$, e soddisfa:

$$\wp'(-z) = -\wp'(z)$$

per ogni $z \in \mathbf{C}$, cioè è una funzione dispari; inoltre ha per poli tutti e soli i punti di Λ , che sono poli di ordine 3 con residuo nullo.

Dimostrazione

d) Si ha:

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(-z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

e sostituendo ω al posto di $-\omega$ si riottiene la serie originaria.

e) La convergenza normale implica che la serie $\wp(z)$ può essere derivata termine a termine. Quindi:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

La conclusione segue immediatamente.

b) Ogni $z \notin \Lambda$ è punto di regolarità di ogni termine della serie $\wp(z)$, e quindi è punto di regolarità della funzione $\wp(z)$. Inoltre dalla definizione segue che per ogni $\omega \in \Lambda$ si ha, in un intorno di ω :

$$\wp(z) = \frac{1}{(z - \omega)^2} + f(z)$$

dove $f(z)$ è olomorfa. La conclusione segue.

a) Dalla periodicità di $\wp'(z)$ si deduce che esiste una costante C tale che

$$\wp(z + \omega_1) = \wp(z) + C$$

per ogni $z \in \mathbf{C}$. Prendendo $z = -\frac{\omega_1}{2}$ (che non è un polo di \wp) si ottiene:

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + C$$

e poiché \wp è pari, si deduce che $C = 0$. Argomentando in modo simile per ω_2 si conclude.

c) Dalla b) segue che l'applicazione $\wp : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ definita da $\wp(z)$ ha un solo polo, e di ordine 2. Quindi, per la prop. (2.2)c), \wp ha grado 2. *q.e.d.*

Dalla discussione precedente discende il:

(4.4) COROLLARIO $E(\Lambda) = M(X)$ contiene funzioni non costanti per ogni reticolo Λ .

Si osservi che la funzione $\wp(z)$ non è meromorfa all'infinito, cioè non si estende a \mathbf{P}^1 , quindi ha una singolarità essenziale in ∞ , pur definendo una funzione meromorfa su tutto X .

Per poter proseguire lo studio delle funzioni $\wp(u)$ e $\wp'(u)$ è necessario considerare i loro sviluppi in serie di Laurent. Allo scopo introduciamo le cosiddette *serie di Eisenstein*. Esse sono definite per ogni $r \geq 3$ come:

$$G_r = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^r}$$

Ovviamente $G_r = G_r(\Lambda)$ dipende dal reticolo Λ . Per il Lemma (4.1) la serie G_r converge assolutamente per ogni $r \geq 3$. Denotando con lo stesso simbolo la sua somma osserviamo che si ha

$$G_r = 0$$

per ogni r dispari perché

$$-1/\omega^r = 1/(-\omega)^r$$

e quindi i termini corrispondenti ad ω e a $-\omega$ si cancellano. Ciò posto si ha:

(4.5) LEMMA *Gli sviluppi di Laurent di $\wp(u)$ e di $\wp'(u)$ nell'origine sono*

$$\wp(u) = u^{-2} + \sum_{j \geq 2} (2j-1)G_{2j}u^{2j-2}$$

$$\wp'(u) = -2u^{-3} + \sum_{j \geq 1} 2j(2j+1)G_{2j+2}u^{2j-1}$$

Dimostrazione

Lo sviluppo di $\wp'(u)$ segue da quello di $\wp(u)$ derivandolo termine a termine. Per $\wp(u)$ osserviamo che si ha:

$$(u - \omega)^{-2} = \omega^{-2} \left[1 + \sum_{j \geq 1} (j+1) \frac{u^j}{\omega^j} \right]$$

e quindi

$$\begin{aligned} \wp(u) - u^{-2} &= \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} [(u - \omega)^{-2} - \omega^{-2}] = \\ &= \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \sum_{j \geq 1} (j+1) \frac{u^j}{\omega^{j+2}} = \sum_{j \geq 1} (j+1) G_{j+2} u^j \end{aligned}$$

che è l'espressione cercata, tenuto conto del fatto che $G_r = 0$ per r dispari. *q.e.d.*

Dimostriamo ora il seguente importante risultato:

(4.6) **TEOREMA** *Le funzioni $\wp(u)$ e $\wp'(u)$ soddisfano l'identità*

$$(1) \quad \wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$$

dove abbiamo posto:

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6$$

Dimostrazione

Utilizzando il Lemma (4.5) si calcola che primo e secondo membro della (1), che hanno un polo di ordine 6 nell'origine, hanno uguali i termini in u^{-6}, \dots, u^{-1} ed il termine costante. Quindi la loro differenza è una funzione ellittica olomorfa che si annulla nell'origine, cioè è la funzione identicamente nulla. *q.e.d.*

Il teorema (4.6) afferma che al variare di $u \in \mathbf{C}$ il punto $(\wp(u), \wp'(u))$ varia sull'curva piana \mathcal{C} di equazione:

$$(2) \quad W^2 = 4Z^3 - g_2Z - g_3$$

Osserviamo che il *secondo membro della (2)*, cioè il polinomio

$$(3) \quad 4Z^3 - g_2Z - g_3$$

possiede 3 radici distinte, che sono

$$e_1 = \wp(\omega_1/2), \quad e_2 = \wp(\omega_2/2), \quad e_3 = \wp((\omega_1 + \omega_2)/2)$$

Sia infatti $\omega \in \{\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2\}$. Poiché $-\omega \equiv \omega \pmod{\Lambda}$ si ha

$$\wp'(\omega) = \wp'(-\omega) = -\wp'(\omega)$$

cioè $\wp'(\omega) = 0$. Dalla (1) segue che e_1, e_2, e_3 sono radici di (3). Poiché $\wp'(\omega) = 0$ segue che l'equazione

$$\wp(u) - \wp(\omega) = 0$$

ha in ω una radice doppia. Dato che \wp ha ordine 2 (cioè definisce una funzione meromorfa di grado 2 su X), in nessun altro punto σ del parallelogramma fondamentale si ha $\wp(\sigma) = \wp(\omega)$. Quindi le tre radici e_1, e_2, e_3 sono distinte.

Prendiamo nota che questo fatto significa che, come è immediato verificare, la curva \mathcal{C} è *nonsingolare* anche all'infinito.

Se (z, w) è un punto di \mathcal{C} diverso da $(e_i, 0)$, cioè tale che $w \neq 0$, allora si ha $\wp(u) = \wp(-u) = z$ per qualche $u \not\equiv -u \pmod{\Lambda}$ perché $w \neq 0$. D'altra parte essendo $\wp'(-u) = -\wp'(u)$ deduciamo che *per ogni punto (z, w) della curva \mathcal{C} esiste un unico $u \pmod{\Lambda}$ tale che*

$$(4) \quad (z, w) = (\wp(u), \wp'(u))$$

Quest'osservazione può naturalmente estendersi anche al punto improprio di \mathcal{C} . In altre parole quindi la (4) stabilisce una *corrispondenza biunivoca tra i punti della superficie di Riemann $X = \mathbf{C}/\Lambda$ e quelli della curva proiettiva \mathcal{C}* ; in altre parole la (4) fornisce una parametrizzazione della curva \mathcal{C} mediante i punti di \mathbf{C}/Λ .

5. IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

(5.1) **TEOREMA** (delle funzioni implicite) Sia $f(z, w)$ un polinomio di grado $n \geq 1$ rispetto a w . Sia $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ tale che

$$f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w}(a, b) \neq 0$$

Allora esiste una ed una sola serie di potenze

$$\bar{w} = b + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots \in \mathbf{C}[[t]]$$

tale che, posto $\bar{z} = a + t$, si abbia $f(\bar{z}, \bar{w}) = 0$. La serie \bar{w} ha raggio di convergenza positivo.

Dimostrazione

Introduciamo nuove indeterminate ξ, η e poniamo

$$z = a + \xi$$

$$w = b + \eta \tag{5.1}$$

$$g(\xi, \eta) = f(a + \xi, b + \eta).$$

Si ha:

$$g(\xi, \eta) = g_{00} + g_{10}\xi + g_{01}\eta + g_{20}\xi^2 + g_{11}\xi\eta + g_{02}\eta^2 + \cdots \tag{5.2}$$

dove abbiamo denotato con $g_{jk} \in \mathbf{C}$ i coefficienti.

Poiché $g(0, 0) = f(a, b) = 0$, si ha $g_{00} = 0$. Inoltre

$$g_{01} = g_\eta(0, 0) = f_w(a, b) \neq 0.$$

Poiché le trasformazioni [5.1] sono invertibili, sarà sufficiente dimostrare il teorema per il polinomio $g(\xi, \eta)$ nel punto $(0, 0)$.

Il teorema afferma l'esistenza di un'unica serie di potenze:

$$\bar{\eta}(\xi) = C_1 \xi + C_2 \xi^2 + \cdots \tag{5.3}$$

a raggio di convergenza positivo, tale che $g(\xi, \bar{\eta}(\xi)) = 0$.

Come serie formale $\bar{\eta}(\xi)$ esiste ed i suoi coefficienti sono univocamente determinati dalle condizioni seguenti, ottenute sostituendo la [5.3] nella [5.2] ed uguagliando a zero:

$$g_{01}C_1 + g_{10} = 0$$

$$g_{01}C_2 + g_{20} + g_{11}C_1 + g_{02}C_1^2 = 0$$

.....

Quindi ci resta solo da far vedere che la serie $\bar{\eta}(\xi)$ ha raggio di convergenza positivo. Il procedimento che utilizzeremo è dovuto a Cauchy.

Non è restrittivo supporre che $g_{01} = -1$ (basta moltiplicare $g(\xi, \eta)$ per $-g_{01}^{-1}$). Sotto quest'ipotesi la serie formale $\bar{\eta}(\xi)$ soddisfa identicamente l'equazione:

$$\eta = h(\xi, \eta)$$

dove

$$h(\xi, \eta) = g_{10}\xi + g_{20}\xi^2 + g_{11}\xi\eta + g_{02}\eta^2 + \dots$$

Sia M un numero reale positivo maggiore dei moduli di tutti i coefficienti di $h(\xi, \eta)$, e consideriamo la funzione

$$H(\xi, \eta) = \frac{M}{(1-\xi)(1-\eta)} - M - M\eta$$

che è definita per $\xi \neq 1 \neq \eta$. Consideriamo l'equazione:

$$\eta = H(\xi, \eta). \tag{5.4}$$

Esplicitando la η la [5.4] dà:

$$\eta = \frac{1 - \left[1 - \frac{4M(M+1)\xi}{1-\xi}\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1+M)} = \frac{1 - B_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{4M(M+1)\xi}{1-\xi}\right)}{2(1+M)}$$

e questa formula definisce η come funzione olomorfa di ξ in un intorno di $\xi = 0$. Quindi esiste una serie di potenze a raggio di convergenza positivo

$$\epsilon(\xi) = D_1\xi + D_2\xi^2 + \dots$$

tale che

$$\epsilon(\xi) = H(\xi, \epsilon(\xi))$$

identicamente. Per calcolare i coefficienti di $\epsilon(\xi)$ riscriviamo $H(\xi, \eta)$ come serie formale in ξ ed η nel modo seguente:

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) &= M(1 + \xi + \xi^2 + \dots)(1 + \eta + \eta^2 + \dots) - M - M\eta = \\ &= M\xi + M\xi^2 + M\xi\eta + M\eta^2 + \dots \end{aligned}$$

Andando a sostituire $\epsilon(\xi)$ al posto di η nell'equazione

$$\eta = M\xi + M\xi^2 + M\xi\eta + M\eta^2 + \dots$$

troviamo che i coefficienti di $\epsilon(\xi)$ sono:

$$D_1 = M$$

$$D_2 = M(1 + D_1 + D_1^2)$$

$$D_3 = M(1 + D_2 + D_1 + D_1^2 + 2D_1D_2 + D_1^3)$$

.....

In particolare, tutti i coefficienti D_j sono reali positivi e $|C_j| < D_j$ per ogni j . Da ciò segue che il raggio di convergenza di $\bar{\eta}(\xi)$ è non minore di quello di $\epsilon(\xi)$, e ciò conclude la dimostrazione. *q.e.d.*

(5.2) DEFINIZIONE Una funzione olomorfa $w(z)$ in un aperto A di \mathbf{C} si dice una funzione algebrica se esiste un polinomio $f(z, w)$, non costante rispetto a w , tale che si abbia $f(z, w(z)) = 0$ identicamente in A .

Consideriamo un polinomio $f(z, w)$ irriducibile in due indeterminate z, w a coefficienti complessi; possiamo scriverlo nella forma seguente:

$$f(z, w) = f_n(z)w^n + f_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + f_1(z)w + f_0(z)$$

dove $f_n, \dots, f_0 \in \mathbf{C}[z]$. Denotiamo con $D(z)$ il discriminante di $f(z, w)$ rispetto a w . Supporremo che f abbia grado effettivo $n \geq 1$ in w , cioè che si abbia

i) $f_n \neq 0$;

poiché f è irriducibile, si ha anche:

ii) f_n, \dots, f_0 non hanno fattori non costanti in comune;

iii) $D(z)$ non è identicamente nullo.

Un punto $a \in \mathbf{C}$ si dice *ordinario* (o *regolare*) per f rispetto a w se $f_n(a)D(a) \neq 0$; altrimenti a si dice un *punto eccezionale* per f rispetto a w .

Se a è un punto regolare per f (rispetto a w) e $b \in \mathbf{C}$ è tale che $f(a, b) = 0$, allora b è una radice semplice del polinomio $f(a, w)$ (cioè $f_w(a, b) \neq 0$) ed $f(a, w)$ ha grado n in w .

Dal teorema (5.1) segue che per ogni punto $a \in \mathbf{C}$ regolare per f l'equazione

$$f(z, w) = 0$$

definisce n funzioni olomorfe $w_1(z), \dots, w_n(z)$ in un disco aperto $D_\rho(a)$ di centro a e raggio $\rho > 0$. Se ρ è sufficientemente piccolo perché $D_\rho(a)$ non contenga punti eccezionali per f , al variare di z in $D_\rho(a)$ i valori $w_1(z), \dots, w_n(z)$ soddisfano identicamente:

$$f(z, w_j(z)) \equiv 0;$$

e quindi sono le n radici distinte del polinomio $f(z, w)$. in altre parole, $w_1(z), \dots, w_n(z)$ definiscono altrettante funzioni algebriche in $D_\rho(a)$.

In generale $w_1(z), \dots, w_n(z)$ sono definite solo localmente nell'intorno di ogni $a \in \mathbf{C}$ non eccezionale.

Ad esempio sia

$$f(z, w) = w^2 - z$$

Per ogni $a \neq 0$ le funzioni algebriche $w_1(z), w_2(z)$ sono definite nel disco $D_\rho(a)$, dove $\rho = |a|$, e coincidono con le due determinazioni $\pm\sqrt{z}$. Se $z = Re^{i\theta} \in D_\rho(a)$, allora

$$\{w_1(z), w_2(z)\} = \{\sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}, \sqrt{R}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}\}$$

Quindi le due determinazioni $\pm\sqrt{z}$ sono distinte in ogni punto di $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ e sono localmente funzioni olomorfe.

È però facile convincersi che $\pm\sqrt{z}$ non sono funzioni olomorfe in tutto $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Se lo fossero, le loro restrizioni ad una circonferenza, ad esempio ad $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, sarebbero continue. Ma d'altra parte, muovendo z in senso antiorario lungo \mathbf{S}^1 , a partire dal punto 1 per ritornare allo stesso punto, cioè incrementando θ di 2π , si passa dalla determinazione $1 = e^0$ alla determinazione $-1 = e^\pi$, e quindi le due determinazioni vengono scambiate dopo un giro completo intorno ad una circonferenza. Ciò non avverrebbe se le due determinazioni $\pm\sqrt{z}$ fossero due distinte funzioni olomorfe.

6. LA SUPERFICIE DI RIEMANN DI UNA CURVA ALGEBRICA PIANA

In questo paragrafo associeremo una superficie di Riemann compatta ad ogni curva piana complessa irriducibile (affine o proiettiva). La costruzione che descriveremo fa uso del seguente risultato di carattere generale:

(6.1) PROPOSIZIONE *Sia Y una superficie di Riemann compatta, $S \subset Y$ un sottoinsieme finito, $p : X^\circ \rightarrow Y \setminus S$ un rivestimento finito, con X° connesso. Allora esiste un'inclusione aperta $X^\circ \subset X$ in cui X è una superficie di Riemann compatta e connessa tale che $X \setminus X^\circ$ sia un insieme finito, ed un'estensione di p ad un rivestimento ramificato $\hat{p} : X \rightarrow Y$. La superficie X è univocamente determinata a meno di isomorfismo canonico.*

Dimostrazione

Esistenza. Consideriamo il disco aperto unitario $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ e poniamo $D^\circ = D \setminus \{0\}$. Sia $q : E^\circ \rightarrow D^\circ$ un rivestimento connesso di grado m . Poiché $\pi_1(D^\circ) \cong \mathbf{Z}$, q corrisponde al sottogruppo $m\mathbf{Z}$ di \mathbf{Z} . Il rivestimento di grado m corrispondente a questo sottogruppo è

$$p_m : D^\circ \rightarrow D^\circ, \quad z \mapsto z^m$$

e quindi esiste un omeomorfismo $\psi : D^\circ \rightarrow E^\circ$ tale che $q \cdot \psi = p_m$. Questo omeomorfismo non è univocamente determinato, ma dipende dalla scelta dell'immagine in E° di un punto base in D° , e ci sono esattamente m scelte possibili, corrispondenti alle m controimmagini rispetto a q del punto base in D° . Le altre possibili scelte di ψ sono della forma $z \mapsto \psi(\zeta_k z)$, dove $\zeta_k = e^{2k\pi i/m}$ è un radice primitiva m -esima dell'unità, $k = 1, \dots, m-1$. Definiamo E come l'unione di E° con un punto a , e definiamo in E una struttura di superficie di Riemann in modo che l'applicazione $D \rightarrow E$ ottenuta mandando $0 \mapsto a$ e che coincide con ψ su D° , sia un isomorfismo. La definizione di questa struttura non dipende dalla scelta di ψ perché l'applicazione $z \mapsto \psi(\zeta_k z)$ è la composizione di un automorfismo di D° con ψ .

Consideriamo ora il rivestimento assegnato p . Il problema è locale in Y . Sia $y \in S$ e sia $\phi : U_y \rightarrow D$ una carta locale in Y tale che $y \in U_y$ e $\phi(y) = 0$, e tale che $U_y \cap S = \{y\}$; poniamo $U_y^\circ = U_y \setminus \{y\}$. Allora

$$p^{-1}(U_y^\circ) = V_1^\circ \cup \dots \cup V_N^\circ$$

dove ognuno dei $V_i^\circ \rightarrow U_y^\circ$ è un rivestimento connesso, di grado m_i . Per quanto visto nella prima parte, per ogni $i = 1, \dots, N$ possiamo trovare un isomorfismo $\psi_i : V_i^\circ \rightarrow D^\circ$ tale che il seguente diagramma di applicazioni olomorfe sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \psi_i & \\ V_i^\circ & \rightarrow & D^\circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_y^\circ & \rightarrow & D^\circ \\ & \phi & \end{array} \quad p_m$$

Pertanto aggiungendo un punto c_i ad ogni V_i° otteniamo spazi V_i tali che ogni ψ_i si estende ad un omeomorfismo $V_i \rightarrow D$. Prendendo queste estensioni come carte locali ed eseguendo queste operazioni in ogni punto di S si ottiene uno spazio X che è l'unione di X° con un numero finito di punti. Le carte locali che abbiamo costruito sono compatibili con quelle di X° (la verifica è lasciata al lettore) e danno pertanto ad X una struttura di superficie di Riemann. Il rivestimento p si estende ad un'applicazione continua $\hat{p} : X \rightarrow Y$ che è olomorfa per la 2.6.

Dimostriamo che X è compatta. Consideriamo una successione $\{x_n\}$ in X e sia $\{y_n = \hat{p}(x_n)\}$ la successione delle immagini tramite \hat{p} . Poiché Y è compatta $\{y_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente e quindi, dopo aver eventualmente rinumerato gli indici, possiamo supporre che $\{y_n\}$ sia convergente; sia $y = \lim y_n$. Se $y \notin S$ sia $U_y \subset Y \setminus S$ un intorno aperto di y ben ricoperto; se $y \in S$ sia $U_y \subset Y$ un intorno aperto di y come nella prima parte della dimostrazione. Salvo trascurare un numero finito di indici possiamo supporre che $y_n \in U_y$ per ogni n . Supponiamo dapprima $y \in S$. Poiché $\hat{p}^{-1}(U_y)$ possiede un numero finito di componenti connesse $\{x_n\}$ possiede una sottosuccessione che è contenuta in uno degli aperti V_i ; sia essa $\{x_{n_k}\} \subset V_{i_0}$. Da $\lim y_n = y$ segue che $\lim |\phi(y_n)| = 0$ e quindi $\lim |\psi_i(x_{n_k})| = 0$. Pertanto $\lim x_{n_k} = c_{i_0}$.

Unicità. Osserviamo che X è stata costruita in modo che, per ogni punto $y \in S$, $\hat{f}^{-1}(y)$ consista di tanti punti quante sono le componenti connesse di $\hat{f}^{-1}(U_y^\circ)$. Sia $g : X' \rightarrow Y$ soddisfacente le condizioni della proposizione. Allora $g^{-1}(U_y^\circ) = \hat{f}^{-1}(U_y^\circ)$ e quindi, poiché g è propria, $g^{-1}(y)$ contiene almeno un punto per ogni componente connessa di $\hat{f}^{-1}(U_y^\circ)$. Inoltre $g^{-1}(y)$ non contiene altri punti perché un punto x siffatto sarebbe isolato, e quindi X' non potrebbe essere una superficie in un intorno di x . Quindi l'identità $X^\circ = X^\circ$ si estende ad un'applicazione biunivoca e continua $\alpha : X \rightarrow X'$ che è olomorfa per la (2.6), e quindi è un isomorfismo, per la (2.1)d). *q.e.d.*

Consideriamo ora una curva piana complessa irriducibile $\mathcal{C} \subset \mathbf{C}^2$ di equazione:

$$f(z, w) = 0$$

dove $f(z, w)$ è un polinomio irriducibile in due indeterminate z, w a coefficienti complessi. Mantenendo le notazioni del §5, possiamo scrivere f nella forma seguente:

$$f(z, w) = f_n(z)w^n + f_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + f_1(z)w + f_0(z)$$

dove $f_n, \dots, f_0 \in \mathbf{C}[z]$. Supporremo che f abbia grado effettivo $n \geq 1$ in w , cioè che si abbia $f_n \neq 0$. Se d denota il grado di $f(z, w)$, si ha ovviamente $n \leq d$.

Denotiamo con $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{C}$ la proiezione $p(z, w) = z$.

(6.2) PROPOSIZIONE *Sia $S \subset \mathbf{C}$ l'insieme dei punti eccezionali per f rispetto a w . Allora $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$, come sottospazio topologico di \mathbf{C}^2 , ha una struttura di superficie di Riemann connessa tale che $p : \mathcal{C} \setminus p^{-1}(S) \rightarrow \mathbf{C} \setminus S$ sia un rivestimento olomorfo di grado n .*

Dimostrazione

Sia $a \in \mathbf{C} \setminus S$ e siano $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{C}$ le radici di

$$f(a, w) = 0$$

Per il teorema delle funzioni implicite esistono serie di potenze a raggio di convergenza positivo:

$$\bar{w}_1(t) = b_1 + c_{11}t + c_{12}t^2 + \dots$$

.....

.....

$$\bar{w}_n(t) = b_n + c_{n1}t + c_{n2}t^2 + \dots$$

tali che

$$f(a + t, \bar{w}_i(t)) = 0$$

per ogni $i = 1, \dots, n$. Sia $\rho > 0$ tale che

i) ρ sia minore dei raggi di convergenza di $\bar{w}_1(t), \dots, \bar{w}_n(t)$.

ii) $D_\rho(a) \subset \mathbf{C} \setminus S$.

iii) per ogni $t \in D_\rho(0)$ e per ogni $i \neq j$ si abbia:

$$(a + t, \bar{w}_i(t)) \neq (a + t, \bar{w}_j(t))$$

La iii) è soddisfatta perché $b_i \neq b_j$ e \bar{w}_i e \bar{w}_j sono continue.

Sia

$$k_j : D_\rho(0) \rightarrow \mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$$

l'applicazione

$$k_j(t) = (a + t, \bar{w}_j(t))$$

Allora

$$p^{-1}(D_\rho(a)) = k_1(D_\rho(0)) \cup \dots \cup k_n(D_\rho(0))$$

e la restrizione $\varphi_{a,j}$ di p a $k_j(D_\rho(0))$ è un omeomorfismo perché la composizione:

$$D_\rho(0) \xrightarrow{k_j} k_j(D_\rho(0)) \xrightarrow{p} D_\rho(a)$$

è una traslazione. Quindi p è un rivestimento di grado n .

Al variare di $a \in \mathbf{C} \setminus S$ e di $j = 1, \dots, n$ le coppie $(k_j(D_\rho(0)), \varphi_{a,j})$ costituiscono un atlante per $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$, che è olomorfo perché $\varphi_{a',i} \circ \varphi_{a,j}^{-1}$ è l'identità di $D_a(\rho) \cap D_{a'}(\rho')$.

Quindi resta definita una struttura di superficie di Riemann su $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$. È evidente che con questa struttura l'applicazione p è olomorfa.

Dimostriamo che $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$ è connessa. Sia Z° una sua componente connessa. Se $Z^\circ \neq \mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$ la restrizione di p definisce un rivestimento $Z^\circ \rightarrow \mathbf{C} \setminus S$ di grado $\nu < n$. Per ogni $z \in \mathbf{C} \setminus S$ siano $\sigma_1(z), \dots, \sigma_\nu(z)$ le funzioni simmetriche elementari negli ν valori w_1, \dots, w_ν corrispondenti ai ν punti $(z, w_1), \dots, (z, w_\nu)$ di Z° al di sopra di z . Le funzioni $\sigma_1(z), \dots, \sigma_\nu(z)$ sono ben definite in tutto $\mathbf{C} \setminus S$; inoltre, essendo espressioni polinomiali nelle radici w_1, \dots, w_ν di $f(z, w)$, che sono localmente funzioni algebriche, le $\sigma_1(z), \dots, \sigma_\nu(z)$ sono funzioni olomorfe in $\mathbf{C} \setminus S$.

D'altra parte le funzioni $\sigma_1(z), \dots, \sigma_\nu(z)$ sono meromorfe in ogni punto di S . Per dimostrarlo, sia $a \in S$ e sia $q \geq 0$ tale che $f_n(z) = (z - a)^q g(z)$, con $g(a) \neq 0$; poniamo $y = (z - a)^q w$. Allora si ha:

$$\frac{f(z, w)}{f_n w^n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{y g} + \frac{(z - a)^q f_{n-2}}{y^2 g} + \dots + \frac{(z - a)^{(n-1)q} f_0}{y^n g} \quad [6.1]$$

Se si sostituisce w con una radice di $f(z, w)$, al tendere di z ad a le quantità

$$\frac{(z - a)^{(k-1)q} f_{n-k}}{g}$$

si mantengono limitate, mentre il primo membro è nullo; quindi affinché l'uguaglianza [6.1] sia verificata, cioè sia nullo anche il secondo membro, è necessario che anche y si mantenga limitata. Ma allora, essendo le funzioni $\sigma_1(z), \dots, \sigma_\nu(z)$ espressioni polinomiali nelle radici w_1, \dots, w_ν di $f(z, w)$, segue che, per qualche $N \gg 0$, $(z - a)^N \sigma_1(z), \dots, (z - a)^N \sigma_\nu(z)$ si mantengono limitate al tendere di z ad a , e ciò significa precisamente che $\sigma_1(z), \dots, \sigma_\nu(z)$ sono meromorfe in a .

Nell'intorno di ∞ le $\sigma_1(z), \dots, \sigma_\nu(z)$ si comportano come le funzioni $\sigma_1(u^{-1}), \dots, \sigma_\nu(u^{-1})$ nell'intorno di 0 ; poiché queste sono le funzioni simmetriche elementari di ν delle radici del polinomio $u^d f(u^{-1}, w)$, si deduce come prima che $\sigma_1(u^{-1}), \dots, \sigma_\nu(u^{-1})$ sono meromorfe in 0 , cioè che $\sigma_1(z), \dots, \sigma_\nu(z)$ sono meromorfe in ∞ . Pertanto $\sigma_1(z), \dots, \sigma_\nu(z)$ sono funzioni meromorfe su \mathbf{P}^1 , cioè sono funzioni razionali.

Consideriamo il polinomio:

$$g(z, w) = w^\nu - \sigma_1(z)w^{\nu-1} + \sigma_2(z)w^{\nu-2} - \dots + (-1)^\nu \sigma_\nu(z) \in \mathbf{C}(z)[w].$$

Questo polinomio ha grado ν in w , e per ogni (z_0, w_0) con $z_0 \notin S$ tali che $g(z_0, w_0) = 0$ si ha $f(z_0, w_0) = 0$. Pertanto $g(z, w)$ divide $f(z, w)$ in $\mathbf{C}(z)[w]$. Dal lemma A.16, di *Sernesi: Geometria I*, segue che $f(z, w)$ è riducibile anche in $\mathbf{C}[z, w]$, una contraddizione: quindi $Z^\circ = \mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$, cioè $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$ è connessa. *q.e.d.*

Poiché $\mathbf{C} \setminus S \subset \mathbf{P}^1$ la proposizione (6.2) fornisce un rivestimento olomorfo connesso

$$p : \mathcal{C} \setminus p^{-1}(S) \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus (S \cup \{\infty\}).$$

Dalla proposizione (6.1) segue che p si estende ad un rivestimento ramificato di grado n

$$z : X \rightarrow \mathbf{P}^1$$

dove X è una superficie di Riemann compatta e connessa contenente $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$ come complementare di un numero finito di punti, cioè esiste un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \setminus p^{-1}(S) & \subset & X \\ \downarrow p & & \downarrow z \\ \mathbf{P}^1 \setminus (S \cup \{\infty\}) & \subset & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

X è detta *superficie di Riemann della curva algebrica* \mathcal{C} .

Si osservi che se il polinomio f non è costante neanche rispetto alla z , la costruzione precedente può essere eseguita scambiando la z con la w , cioè considerando la proiezione

$$q : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{C} : (z, w) \mapsto w$$

si ottiene in questo modo una superficie di Riemann compatta \tilde{X} che contiene $\mathcal{C} \setminus q^{-1}(T)$ (T l'insieme dei punti eccezionali per f rispetto a q) come complementare di un insieme finito, ed un rivestimento ramificato

$$w : \tilde{X} \rightarrow \mathbf{P}^1$$

che estende q .

Non è difficile dimostrare che \tilde{X} è isomorfa ad X .

Più in generale si può definire *la superficie di Riemann associata ad una curva proiettiva irriducibile*, riducendosi a considerare un suo modello affine e riconducendosi alla definizione precedente. La superficie di Riemann compatta X che si ottiene non dipende dalla scelta dell'aperto affine.

Si osservi che la superficie di Riemann X della curva algebrica \mathcal{C} è stata costruita insieme ad una funzione meromorfa non costante z ; in particolare $M(X)$ non si riduce alle sole costanti. Quindi le superfici di Riemann delle curve algebriche possiedono funzioni meromorfe non costanti.

Il genere della superficie di Riemann associata ad una curva piana (affine o proiettiva) irriducibile \mathcal{C} viene chiamato *genere di* \mathcal{C} , e denotato $g(\mathcal{C})$.

7. OSSERVAZIONI ED ESEMPI

Manteniamo le notazioni del §6. Supponiamo che (a, b) sia un punto della curva affine irriducibile \mathcal{C} di equazione $f(z, w) = 0$ appartenente a $p^{-1}(S)$. Se $\frac{\partial f}{\partial w}(a, b) \neq 0$ allora ragionando come nella dimostrazione della proposizione (6.2) si può costruire una carta locale in un intorno di (a, b) , e quindi la struttura di superficie di Riemann su $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$ può essere estesa a $(\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)) \cup \{(a, b)\}$.

Supponiamo invece che $\frac{\partial f}{\partial w}(a, b) = 0$. Se si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b) \neq 0$$

allora (a, b) è un punto semplice per \mathcal{C} , e b è regolare per f rispetto a z ; si può quindi applicare il teorema delle funzioni implicite scambiando la z con la w , e deducendo l'esistenza di una serie di potenze a raggio di convergenza positivo:

$$\bar{z} = a + d_1 t + d_2 t^2 + \dots$$

tale che si abbia identicamente

$$f(\bar{z}, b + t) = 0. \quad [7.1]$$

Scegliendo $\rho > 0$ tale che D_ρ sia contenuto nel disco di convergenza di \bar{z} , otteniamo un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} D_\rho & \rightarrow & \mathcal{C} \\ t & \mapsto & (\bar{z}(t), b + t) \end{array}$$

che è un omeomorfismo su un intorno aperto di (a, b) in \mathcal{C} . Pertanto il suo inverso

$$k(D_\rho) \rightarrow \mathbf{C}$$

è una carta locale in \mathcal{C} . È immediato verificare che questa carta locale è olomorficamente compatibile con le carte locali costruite nel corso della dimostrazione della proposizione (6.2) nell'intorno dei punti di $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$. Quindi anche in questo caso la struttura di superficie di Riemann su $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$ può essere estesa a $(\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)) \cup \{(a, b)\}$.

Si osservi che in questo caso (a, b) è un punto di ramificazione per la proiezione p . Infatti si ha:

$$f(z, w) = c_{10}(z - a) + c_{20}(z - a)^2 + c_{11}(z - a)(w - b) + c_{02}(w - b)^2 + \dots$$

dove

$$c_{10} = \frac{\partial f}{\partial z}(a, b) \neq 0;$$

la condizione [7.1] dà:

$$c_{10}d_1 = 0$$

e

$$c_{10}d_2 + c_{20}d_1^2 + c_{11}d_1 + c_{02} = 0$$

Pertanto $d_1 = 0$ e $d_2 \neq 0$ a meno che non sia $c_{02} = 0$, cioè a meno che (a, b) non sia un punto di flesso per \mathcal{C} . Quindi:

$$e_f(a, b) = o(\bar{z} - a) = \min\{i : d_i \neq 0\} \geq 2$$

e vale l'uguaglianza a meno che (a, b) non sia un punto di flesso per \mathcal{C} . Se invece anche $\frac{\partial f}{\partial z}(a, b) = 0$ allora (a, b) è un punto singolare della curva \mathcal{C} e nulla possiamo dire in questo caso sulla possibilità o meno di estendere ad (a, b) la struttura di superficie di Riemann.

Riassumendo, la struttura di superficie di Riemann su $\mathcal{C} \setminus p^{-1}(S)$ può essere estesa a tutti i punti semplici di \mathcal{C} , cioè a $\mathcal{C} \setminus \text{Sing}(\mathcal{C})$, avendo denotato con $\text{Sing}(\mathcal{C})$ l'insieme dei punti singolari di \mathcal{C} .

Ragionando in modo simile utilizzando coordinate non omogenee opportune si può giungere alla stessa conclusione nel caso in cui \mathcal{C} sia una curva proiettiva.

Se in particolare \mathcal{C} è una curva proiettiva nonsingolare, cioè $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \emptyset$, allora vediamo che \mathcal{C} stessa ha una struttura di superficie di Riemann che è compatta ed ha un aperto a complementare finito isomorfo ad un aperto, a complementare finito, della sua superficie di Riemann X . Supponendo, come è lecito fare, che $w_\infty \notin \mathcal{C}$, vediamo che l'applicazione

$$\bar{p}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$$

coincide con $z : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ su un suo aperto a complementare finito. Per la proposizione 8.1 si deduce che le superfici di Riemann \mathcal{C} ed X sono isomorfe.

Ad esempio, la superficie di Riemann X di una retta r , di equazione $a_0 + a_1Z + a_2W = 0$, è isomorfa a \mathbf{P}^1 ; supponendo infatti $a_2 \neq 0$, la proiezione $(z, w) \mapsto z$ ha grado 1 e quindi definisce un isomorfismo di X su \mathbf{P}^1 ; il caso in cui $a_2 = 0$ si tratta nello stesso modo scambiando tra loro le variabili. Per quanto detto sopra, X coincide con la chiusura proiettiva di r .

Se $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^2$ è una conica irriducibile di equazione $F(Z_0, Z_1, Z_2) = 0$, allora \mathcal{C} è una superficie di Riemann, il cui genere si calcola nel modo seguente. La proiezione olomorfa $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$ è un rivestimento ramificato di grado 2. I suoi punti di ramificazione sono semplici perché p ha grado 2, e coincidono con i punti di intersezione di \mathcal{C} con la retta di equazione

$$\frac{\partial F}{\partial Z_2} = 0.$$

Quindi p possiede esattamente due punti di ramificazione semplici, e dalla formula di Hurwitz segue che $g(\mathcal{C}) = 0$.

Più in generale, se \mathcal{C} è una curva piana proiettiva non singolare di grado d , di equazione $F(Z_0, Z_1, Z_2) = 0$, i punti di ramificazione del rivestimento ramificato $z : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$ sono i punti di intersezione di \mathcal{C} con la curva di equazione:

$$\frac{\partial F}{\partial Z_2} = 0. \quad [7.2]$$

che ha grado $d-1$. È ben noto ed elementare che il numero di tali punti di intersezione non supera $d(d-1)$ (cfr. *Sernesi: Geometria I*, corollario 33.3). Una analisi più accurata porta a definire un numero intero positivo per ogni punto di intersezione di due curve piane prive di componenti comuni, detto *molteplicità di intersezione* delle due curve nel punto. Un risultato più preciso, e non elementare, il *teorema di Bezout*, afferma che due curve piane proiettive prive di componenti irriducibili in comune, di gradi m ed n rispettivamente, hanno precisamente mn punti di intersezione, purché ognuno di essi venga contato con la sua molteplicità di intersezione.

Nel caso della curva \mathcal{C} e della curva \mathcal{D} di equazione [7.2], si calcola che per ogni punto $Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ la molteplicità di intersezione è uguale a $e_z(Q) - 1$. Applicando la formula di Hurwitz, e supponendo che il grado della proiezione z sia uguale a d , si ha:

$$2g(\mathcal{C}) - 2 = -2d + \sum_{Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} e_z(Q) - 1 = -2d + d(d-1)$$

da cui si deduce:

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

che è la *formula che dà il genere di una curva piana proiettiva irriducibile e nonsingolare*.

La tabella seguente fornisce $g = g(\mathcal{C})$ per i primi valori di d :

| | |
|-----|-----|
| d | g |
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 3 |
| 5 | 6 |
| 6 | 10 |
| 7 | 15 |

Come si vede, non tutti i possibili valori di g vengono realizzati da curve piane nonsingolari. Per ottenerli è necessario includere anche curve singol