Cap. I. Funzioni analitiche

1. SERIE FORMALI DI POTENZE

Sia T una indeterminata. Una *serie formale di potenze* (o semplicemente una *serie formale*) nella T a coefficienti complessi è un'espressione

$$f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots$$

in cui $a_k \in \mathbf{C}$ per ogni k. Una serie formale può anche identificarsi con la successione dei suoi coefficienti

$$\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$$

a_0 si dice il *termine costante* della serie $f(T)$. Se

$$f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k, \quad g(T) = \sum_{k \geq 0} b_k T^k$$

sono due serie formali, definiamo la loro *somma* $f + g$ come

$$(f+g)(T) = \sum_{k \geq 0} c_k T^k$$

dove

$$c_k = a_k + b_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Definiamo il *prodotto* fg come:

$$(fg)(T) = \sum_{k \geq 0} d_k T^k$$

dove

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Se $\alpha \in \mathbf{C}$ definiamo αf come

$$(\alpha f)(T) = \sum_{k \geq 0} (\alpha a_k) T^k$$

La *serie nulla* è la serie $0(T)$ i cui coefficienti sono tutti uguali a zero.

L'insieme delle serie formali nella T a coefficienti complessi si denota con il simbolo $\mathbf{C}[[T]]$. Con le operazioni di somma e di prodotto che abbiamo introdotto $\mathbf{C}[[T]]$ è un anello contenente $\mathbf{C}[T]$ come sottoanello.

Una serie formale $a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots$ è invertibile in $\mathbf{C}[[T]]$ se e solo se $a_0 \neq 0$. Se infatti esiste $b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots \in \mathbf{C}[[T]]$ tale che

$$(a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots)(b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots) = 1$$

allora $a_0b_0 = 1$ e quindi $a_0 \neq 0$. Viceversa, se $a_0 \neq 0$ l'inversa $b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots$ di $a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots$ è univocamente individuata dalle condizioni:

$a_0b_0 = 1$
$a_1b_0 + a_0b_1 = 0$
$a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0$
$\cdots\cdots$

che permettono di calcolare induttivamente i coefficienti $b_0, b_1, b_2, \ldots$.

Una serie formale $\sum_{k \geq 0} a_k T^k$ può essere derivata termine a termine ponendo

$$(\sum_{k \geq 0} a_k T^k)' := \sum_{k \geq 1} k a_k T^{k-1}$$

Segue immediatamente dalla definizione che il prodotto di due serie di potenze è uguale a zero se e solo se uno almeno dei fattori è nullo; pertanto $\mathbf{C}[[T]]$ è un dominio di integrità.

Il campo dei quozienti di $\mathbf{C}[[T]]$ si denota $\mathbf{C}((T))$. I suoi elementi si dicono *serie di Laurent formali* nella indeterminata T.

(1.1) LEMMA *Ogni elemento non nullo $X \in \mathbf{C}((T))$ può essere scritto in modo unico nella forma*

$$X = T^\nu (a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots) \qquad \nu \in \mathbf{Z},\ a_0 \neq 0$$

Dimostrazione

Sia:

$$X = \frac{(b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots)}{(c_0 + c_1T + c_2T^2 + \cdots)}$$

e sia $h \geq 0$ il più piccolo intero tale che $c_h \neq 0$. La serie di potenze $c_h + c_{h+1}T + c_{h+2}T^2 + \cdots$ è invertibile in $\mathbf{C}[[T]]$: sia $d_0 + d_1T + d_2T^2 + \cdots$ la sua inversa. Allora:

$$X = T^{-h}(b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots)(d_0 + d_1T + d_2T^2 + \cdots)$$

e poiché $(b_0 + b_1T + b_2T^2 + \cdots)(d_0 + d_1T + d_2T^2 + \cdots) \in \mathbf{C}[[T]]$ la conclusione segue. *q.e.d.*

L'intero ν si chiama *ordine* della serie di Laurent X, e si denota $o(X)$. Porremo $o(0) = \infty$. Otteniamo in questo modo un'applicazione:

$$o : \mathbf{C}((T)) \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$$

che possiede le seguenti proprietà, di immediata verifica. Per ogni $X, Y \in \mathbf{C}((T))$ si ha:

$o(XY) = o(X) + o(Y)$
$o(X \pm Y) \geq \min(o(X), o(Y))$ e vale l'uguaglianza se $o(X) \neq o(Y)$.
$X \in \mathbf{C}[[T]]$ se e solo se $o(X) \geq 0$.

In particolare, per ogni $X \neq 0$ si ha $o(X^{-1}) = -o(X)$.

Dal lemma segue che ogni elemento $X \in \mathbf{C}((T))$ si può scrivere in modo unico come una serie di potenze in T a esponenti in $\mathbf{Z}$ avente solo un numero finito di termini con esponente negativo, cioè nella forma:

$$X = a_{-m}T^{-m} + \cdots + a_{-1}T^{-1} + P \qquad a_{-m} \neq 0$$

dove

$$P = \sum_{k \geq 0} a_k T^k \in \mathbf{C}[[T]]$$

L'espressione $a_{-m}T^{-m} + \cdots + a_{-1}T^{-1}$ si chiama *parte principale* di X.

2. SERIE CONVERGENTI

Sia $\{\alpha_k\}$ una successione di numeri complessi, e consideriamo la serie

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k$$

Definiamo la somma parziale

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$$

Diremo che la serie *converge* se esiste $w \in \mathbf{C}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = w$$

In tal caso diremo che w è la *somma della serie* e scriveremo:

$$w = \sum_{k\geq 0} \alpha_k$$

Se $A = \sum_{k\geq 0} \alpha_k$ e $B = \sum_{k\geq 0} \beta_k$ sono due serie convergenti allora la loro somma ed il loro prodotto sono serie convergenti. Precisamente, detta

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k$$

la somma parziale della serie B, $A \pm B$ ha per somma il $\lim_{n\to\infty} s_n \pm t_n$, mentre cB ha per somma il $\lim_{n\to\infty} ct_n$ per ogni $c \in \mathbf{C}$.

Sia $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ una serie di numeri complessi. Diremo che la serie *converge assolutamente* se la serie a termini reali nonnegativi $\sum_{k\geq 0} |\alpha_k|$ converge.

Se una serie converge assolutamente allora converge. Infatti, per ogni $m \leq n$ si ha:

$$s_n - s_m = \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n$$

e quindi:

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|$$

Dall'assoluta convergenza segue che dato $\epsilon > 0$ esiste N tale che $\sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k| < \epsilon$ se $m, n \geq N$: ciò dimostra che la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali è di Cauchy nello spazio metrico $\mathbf{C}$, e quindi converge.

Si noti che se $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ converge allora $\lim \alpha_k = 0$: infatti $\alpha_k = s_k - s_{k-1}$ e $\{s_k\}$ è una successione di Cauchy.

Nel seguito utilizzeremo liberamente i seguenti fatti elementari riguardanti l'assoluta convergenza, la cui dimostrazione viene lasciata come esercizio:

(i) (*Criterio del confronto*): Sia $\sum_{k\geq 0} r_k$ una serie convergente di numeri reali non-negativi. Se $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ è una serie di numeri complessi tale che $|\alpha_k| \leq r_k$ per ogni k allora la serie $\sum \alpha_k$ converge assolutamente.

(ii) Se una serie di numeri complessi $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ è assolutamente convergente, allora ogni serie ottenuta riordinando i suoi termini converge assolutamente allo stesso limite.

(iii) Se una serie doppia

$$\sum_{k\geq 0} \Big(\sum_{h\geq 0} \alpha_{hk} \Big)$$

converge assolutamente, allora la serie ottenuta scambiando l'ordine di sommazione converge assolutamente allo stesso limite.

Sia S un insieme ed $f : S \to \mathbf{C}$ una funzione limitata. Definiamo la *norma del sup* di f come:

$$||f||_S = ||f|| = \sup_{s\in S} |f(s)|$$

Segue immediatamente dalla definizione che, date comunque due funzioni limitate $f, g : S \to \mathbf{C}$ e $c \in \mathbf{C}$, si ha $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ e $||cf|| = |c| \ ||f||$.

Sia $\{f_n : S \to \mathbf{C}\}$ una successione di funzioni limitate. Diremo che questa successione *converge uniformemente in* S se esiste una funzione limitata $f : S \to \mathbf{C}$ con le seguenti proprietà: dato comunque $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$||f_n - f|| < \epsilon$$

se $n \geq N$. Si osservi che, anche senza supporre f limitata, se $||f_n - f||$ è ben definita segue che f è limitata.

Diremo che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy se dato comunque $\epsilon > 0$ esiste $N > O$ tale che

$$||f_n - f_m|| < \epsilon$$

se $m, n \geq N$.

Si osservi che, se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy, allora per ogni $s \in S$ la successione di numeri complessi $\{f_n(s)\}$ soddisfa:

$$|f_n(s) - f_m(s)| \leq ||f_n - f_m|| \qquad \forall \ n, m$$

e quindi è una successione di Cauchy e pertanto converge.

(2.1) TEOREMA *Se una successione $\{f_n\}$ di funzioni limitate su S è di Cauchy allora converge uniformemente in S.*

Dimostrazione
Per ogni $s \in S$ poniamo

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s)$$

Dato $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$|f_n(s) - f_m(s) < \epsilon \qquad \forall \ \ s \in S$$

se $n, m \geq N$. Sia $n \geq N$. Dato $s \in S$ sia $m \geq N$ (dipendente da s) tale che

$$|f(s) - f_m(s)| < \epsilon$$

Allora:

$$f(s) - f_n(s)| \leq |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_n(s)| <$$
$$< \epsilon + ||f_m - f_n|| < 2\epsilon$$

Poiché ciò è vero per ogni $s \in S$ segue che

$$||f - f_n|| < 2\epsilon$$

e ciò conclude la dimostrazione. *q.e.d.*

Consideriamo una serie $\sum f_k$ di funzioni limitate su S, e sia

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

la somma parziale n-esima. Diremo che la serie *converge uniformemente in* S se la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ converge uniformemente in S. Diremo che la serie $\sum f_k$ *converge assolutamente in* $s \in S$ se la serie numerica

$$\sum |f_k(s)|$$

converge. Diremo che $\sum f_k$ *converge assolutamente in* S se converge assolutamente in ogni $s \in S$.

(2.2) TEOREMA (Criterio del confronto) *Sia $\{c_k\}$ una successione di numeri reali nonnegativi tale che la serie $\sum c_k$ converga. Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni limitate su S tali che $||f_k|| \leq c_k$ per ogni k. Allora la serie $\sum f_k$ converge uniformemente e assolutamente in S.*

Dimostrazione

Siano $m \leq n$. Allora le somme parziali soddisfano:

$$||s_n - s_m|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||f_k|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k$$

L'ipotesi sulla convergenza di $\sum c_k$ implica l'uniforme convergenza della successione delle somme parziali. Lo stesso ragionamento dimostra anche la convergenza assoluta. *q.e.d.*

DEFINIZIONE *Una serie, della forma $\sum_{k\geq 0} ar^k$, $a, r \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, è detta una* serie geometrica.

PROPOSIZIONE: Una serie geometrica converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Nel caso convergente si ha:

$$\sum_{k\geq 0} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Dimostrazione

Si ha $s_{n-1} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$. Se $|r| < 1$ allora $\lim r^n = 0$ e quindi $\lim s_{n-1} = \frac{a}{1-r}$ e la serie converge. D'altra parte se $|r| \geq 1$ allora ar^n non tende a 0 e quindi la serie non converge. *q.e.d.*

La dimostrazione del risultato seguente è lasciata come esercizio:

(2.3) TEOREMA *Sia $S \subset \mathbf{C}$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue e limitate su S. Se la successione converge uniformemente in S allora la funzione limite f è continua in S.*

I risultati precedenti verranno applicati allo studio della convergenza di serie di potenze, prendendo $f_k(z) = a_k z^k$, dove $a_k \in \mathbf{C}$.

(2.4) TEOREMA *Sia $\{a_k\}$ una successione di numeri complessi, e sia $r > 0$ tale che la serie*

$$\sum_{k\geq 0} |a_k| r^k$$

converga. Allora la serie $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ converge assolutamente e uniformemente nel disco chiuso $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r\}$.

Dimostrazione

È una caso particolare del criterio del confronto. *q.e.d.*

(2.5) TEOREMA *Sia $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ una serie di potenze. Se la serie non converge assolutamente per qualche $w \in \mathbf{C}$ allora esiste un numero reale $r \geq 0$ tale che la serie converga assolutamente per $|z| < r$ e non converga assolutamente per $|z| > r$.*

Dimostrazione

Sia r l'estremo superiore dei numeri reali $s \geq 0$ tali che $\sum |a_k| s^k$ converge. Allora per ipotesi $r < \infty$ e $\sum |a_k||z|^k$ diverge se $|z| > r$, e converge se $|z| < r$, per il criterio del confronto *q.e.d.*

Il numero r del teorema (2.5) è chiamato *raggio di convergenza* della serie di potenze $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$. Se la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbf{C}$ allora diremo che ha *raggio di convergenza infinito*. Quando il raggio di convergenza è 0 la serie converge assolutamente solo per $z = 0$.

Se la serie ha raggio di convergenza $r > 0$ si dirà una *serie convergente*. Il disco aperto $D_r(0)$ di centro l'origine e raggio r è detto *disco di convergenza* della serie. Più in genereale se D è un disco aperto di centro l'origine e di raggio $\leq r$, diremo che la serie *converge in* D.

(2.6) TEOREMA *Sia $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ una serie di potenze, e sia r il suo raggio di convergenza. Allora*

$$\frac{1}{r} = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

intendendo che la successione $|a_k|^{\frac{1}{k}}$ non è limitata se $r = 0$, e che $\limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = 0$ se $r = \infty$.

Dimostrazione

Supponiamo dapprima $r \neq 0, \infty$, e sia $t = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$. Dato comunque $\epsilon > 0$ esiste solo un numero finito di indici k tali che $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq t + \epsilon$. Quindi per tutti i k eccettuati al più un numero finito si ha:

$$|a_k| \leq (t + \epsilon)^k$$

e quindi se $|z| < \frac{1}{t+\epsilon}$, posto $A = |z|(t + \epsilon)$ si ha $A < 1$ e

$$|a_k||z^k| < A^k$$

Pertanto la serie $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ converge assolutamente per confronto con la serie geometrica $\sum A^k$. Deduciamo che il raggio di convergenza r soddisfa $r \geq \frac{1}{t+\epsilon}$ per ogni $\epsilon > 0$ e quindi $r \geq \frac{1}{t}$.

Viceversa, dato $\epsilon > 0$ esistono infiniti k tali che $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq t - \epsilon$ e pertanto

$$|a_k| \geq (t - \epsilon)^k$$

Quindi la serie $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ non converge se $|z| = \frac{1}{t-\epsilon}$ perché il suo termine k-esimo non tende a 0. Ne consegue che il raggio di convergenza r soddisfa $r \leq \frac{1}{t-\epsilon}$ per ogni $\epsilon > 0$, donde $r \leq \frac{1}{t}$. Ciò conclude la dimostrazione nel caso $t \neq 0, \infty$. Il caso in cui $t = 0$ oppure $t = \infty$ si dimostra in modo simile ed è lasciato come esercizio. *q.e.d.*

ESEMPIO - Il teorema precedente non dice cosa accade se $|z| = r$. Ad esempio la serie $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$ ha raggio di convergenza 1 e $f(c)$ converge per ogni $c \neq 1$ tale che $|c| = 1$.

Consideriamo invece la serie $f(z) = \sum_{k \geq 1} z^{2^k}$, che ha anche raggio di convergenza 1. Detta

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z^{2^k}$$

la somma parziale n-esima, si ha

$$\lim_{x \text{ reale } \to 1} s_x(x) = n$$

e quindi

$$\lim_{x \text{ reale } \to 1} f(x) = \infty$$

perché per ogni $n > 0$ esiste $\delta_n > 0$ tale che per $x > 1 - \delta$ si ha $s_n(x) > n - 1$ e quindi $f(x) > n - 1$. D'altra parte $f(z) = z^2 + f(z^2)$ e quindi

$$\lim_{x \text{ reale } \to -1} f(x) = \infty$$

Analogamente, avendosi

$$f(z) = z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$$

si ha

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \infty$$

se ξ è una radice $2n$-esima di 1. Poiché le radici $2n$-esime dell'unità sono dense in S^1 la funzione f somma della serie non si estende a nessun punto di $\partial D_1 = S^1$.

(2.7) COROLLARIO *Se* $\lim |a_k|^{\frac{1}{k}} = t$ *esiste, allora la serie* $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ *ha raggio di convergenza* $r = \frac{1}{t}$.

Dimostrazione
Segue subito dalla dimostrazione del teorema. *q.e.d.*

(2.8) COROLLARIO *Si supponga che la serie* $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ *abbia raggio di convergenza* $r > 0$. *Allora esiste un numero reale* $A > 0$ *tale che*

$$|a_k| \leq A^k$$

per ogni k.

Dimostrazione
Prendiamo $A_1 = t + \epsilon$ dove $t = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$ e $\epsilon > 0$. Allora

$$|a_k| \leq A_1^k$$

per ogni k eccettuato al più un numero finito. Allora è possibile sostituire A_1 con un A in modo che la disuguaglianza sia verificata per tutti i k. *q.e.d.*

Utilizzeremo anche il seguente criterio di convergenza, per la cui dimostrazione rinviamo ad un testo di analisi matematica.

(2.9) CRITERIO DEL RAPPORTO *Sia* $\{a_k\}$ *una successione di numeri reali positivi, e supponiamo che* $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = t \geq 0$. *Allora si ha anche*

$$\lim a_k^{\frac{1}{k}} = t$$

3. OPERAZIONI SULLE SERIE CONVERGENTI

In questo paragrafo verificheremo che se si eseguono le operazioni definite per le serie formali (somma, prodotto, moltiplicazione per uno scalare, inversa) su serie convergenti, si ottengono ancora serie convergenti.

(3.1) PROPOSIZIONE *Siano $f = f(T)$ e $g = g(T)$ serie di potenze convergenti in un disco aperto $D_r(0)$, allora anche $f+g$ e fg sono convergenti nello stesso disco, e se $\alpha \in \mathbf{C}$, allora αf converge in $D_r(0)$. Inoltre per ogni $z \in D_r(0)$ si ha:*

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z), \quad (fg)(z) = f(z)g(z), \quad (\alpha f)(z) = \alpha f(z)$$

Dimostrazione

Diamo la dimostrazione nel caso del prodotto. Siano $f = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$, $g = \sum_{k \geq 0} b_k T^k$, e quindi

$$fg = \sum_{k \geq 0} c_k T^k, \quad \text{dove} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Sia $0 < s < r$. Poiché sia f che g hanno raggio di convergenza $\geq r$, per il criterio della radice esiste un numero positivo C tale che

$$|a_k| \leq \frac{C}{s^k}, \quad \text{e} \quad |b_k| \leq \frac{C}{s^k}$$

per ogni k. Quindi:

$$|c_k| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| \ |b_{k-i}| \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{C}{s^i} \frac{C}{s^{k-i}} = (k+1)\frac{C^2}{s^k}$$

Segue che:

$$|c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{(k+1)^{\frac{1}{k}} C^{\frac{2}{k}}}{s}$$

Ma poiché $\lim_{k \to \infty} (k+1)^{\frac{1}{k}} C^{\frac{2}{k}} = 1$, segue che

$$\limsup_{k \to \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{s}$$

Poiché ciò è vero per ogni $0 < s < r$ segue che $\limsup |c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{r}$, e quindi la serie fg converge nel disco $D_r(0)$.

Si osservi che abbiamo anche dimostrato che la serie a termini reali positivi

$$\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{i=0}^{k}|a_i|\ |b_{k-i}|\Big)|z^k|$$

converge per ogni $z \in D_r(0)$.

Siano

$$f_N(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_Nt^N$$

e

$$g_N(T) = b_0 + b_1T + \cdots + b_NT^N$$

i polinomi ottenuti per troncazione delle serie f e g. Allora, per ogni $z \in D_r(0)$ si ha:

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} f_N(z), \quad g(z) = \lim_{N\to\infty} g_N(z)$$

Inoltre:

$$|(fg)(z) - f_N(z)g_N(z)| \leq \sum_{k\geq N+1}\Big(\sum_{i=0}^{k}|a_i|\ |b_{k-i}|\Big)|z^k|$$

ed il secondo membro tende a 0 al tendere di $N \to \infty$. Pertanto:

$$f(z)g(z) = \lim_N f_N(z)g_N(z) = (fg)(z)$$

e ciò conclude la dimostrazione nel caso del prodotto.

Gli altri casi sono più semplici e vengono lasciati come esercizio. *q.e.d.*

Denotiamo con $\mathbf{C}\{\{T\}\}$ il sottoinsieme di $\mathbf{C}[[T]]$ costituito dalle serie aventi raggio di convergenza positivo. Dalla proposizione precedente segue che $\mathbf{C}\{\{T\}\}$ è un sottoanello di $\mathbf{C}[[T]]$, che si chiama *anello delle serie convergenti.* Si hanno ovvie inclusioni che sono omomorfismi di anelli:

$$\mathbf{C}[T] \subset \mathbf{C}\{\{T\}\} \subset \mathbf{C}[[T]]$$

(3.2) PROPOSIZIONE *Sia f una serie di potenze a raggio di convergenza positivo con $o(f) = 0$. Allora anche la serie g tale che $fg = 1$ ha raggio di convergenza positivo.*

Dimostrazione

Per la (3.1) non è restrittivo supporre che f abbia termine costante uguale a 1, salvo sostituire f con $a_0^{-1}f$. Quindi:

$$f(T) = 1 + a_1T + a_2T^2 + \cdots = 1 - h(T)$$

dove $o(h) \geq 1$. Per il corollario (2.8) esiste $A > 0$ tale che $|a_k| \leq A^k$ per ogni $k \geq 1$. Allora:

$$\frac{1}{f(T)} = \frac{1}{1 - h(T)} = 1 + h(T) + h(T)^2 + \cdots$$

dove la somma a secondo membro è ben definita perché $o(h(T)^j) \geq j$ e quindi, per ogni k, al coefficiente di T^k a secondo membro contribuiscono solo un numero finito di addendi. La serie $h(T)$ è dominata termine a termine in modulo dalla serie

$$\sum_{k \geq 1} A^k T^k = \frac{AT}{1 - AT}$$

e quindi $g(T) = \frac{1}{f(T)}$ è dominata termine a termine in modulo dalla serie

$$1 + \frac{AT}{1 - AT} + \frac{(AT)^2}{(1 - AT)^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{AT}{1-AT}}$$

Ma:

$$\frac{1}{1 - \frac{AT}{1-AT}} = (1 - AT)(1 + 2AT + (2AT)^2 + \cdots)$$

che è dominata termine a termine in modulo da:

$$(1 + AT)(1 + 2AT + (2AT)^2 + \cdots)$$

Perciò $g(T)$ è dominata termine a termine in modulo da un prodotto di serie di potenze aventi raggio di convergenza positivo, e pertanto ha raggio di convergenza positivo. *q.e.d.*

Il seguente corollario è immediato.

(3.3) COROLLARIO *Se $f(T)$ e $g(T)$ sono serie aventi raggio di convergenza positivo e $o(g) = 0$, allora $\frac{f(T)}{g(T)}$ è una serie a raggio di convergenza positivo.*

(3.4) PROPOSIZIONE *Sia $f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$ una serie avente raggio di convergenza $r > 0$. Allora la serie*

$$f'(T) = \sum_{k \geq 1} k a_k T^{k-1}$$

ottenuta derivando f termine a termine (la serie derivata di f*) ha raggio di convergenza r.*

Dimostrazione

Si ha

$$\limsup |ka_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |k|^{\frac{1}{k}} \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{r}$$

e quindi la serie

$$\sum_{k\geq 1} ka_k T^k = Tf'(T)$$

ha raggio di convergenza uguale a r. La conclusione segue. *q.e.d.*

Siano $f(T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$, $h(T) = \sum_{j\geq 1} b_j T^j$ due serie formali, con $o(h) \geq 1$. Allora è ben definita la serie formale $f(h(T))$, che si dice *composizione di f ed h*, ottenuta per sostituzione di h in f, cioè ponendo:

$$f(h(T)) = \sum_{k\geq 0} a_k h(T)^k = \sum_{k\geq 0} a_k (\sum_{j\geq 1} b_j T^j)^k$$

Infatti per ogni $k \geq 0$ si ha $o(h(T)^k) \geq k$, e quindi il coefficiente di T^k in $f(h(T))$ è ben definito come somma di un numero finito di termini, per ogni $k \geq 0$. La serie $f(h(T))$ si denota anche $(f \circ h)(T)$. È immediato che il suo ordine è

$$o(f \circ h) = o(f)\ o(h)$$

(3.5) TEOREMA *Supponiamo che $f(T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k$ e $h(T) = \sum_{j\geq 1} b_j T^j$ siano serie di potenze con $o(h) > 0$, aventi raggio di convergenza positivo, e sia*

$$g(T) = f(h(T))$$

Sia $r > 0$ tale che f converga nel disco $D_r(0)$, ed $s > 0$ sia tale che

$$\sum_{k\geq 1} |b_k| s^k < r$$

Allora g converge nel disco $D_s(0)$, e per ogni $z \in D_s(0)$ si ha:

$$g(z) = f(h(z))$$

Dimostrazione

Ogni coefficiente della serie $g(T)$ è dominato in modulo dal corrispondente coefficiente della serie

$$\sum_{k\geq 0} |a_k|(\sum_{j\geq 1} |b_j|T^j)^k \tag{1}$$

e per ipotesi la serie a secondo membro converge assolutamente per $|z| < s$. Quindi $g(z)$ converge assolutamente per $|z| < s$.

Poniamo

$$f_N(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_NT^N$$

Allora ogni coefficiente della serie $g(T) - f_N(h(T))$ è dominato in modulo dal corrispondente coefficiente della serie:

$$\sum_{k>N} |a_k|(\sum_{j\geq 1} |b_j|T^j)^k$$

Dalla convergenza assoluta della serie (1) deduciamo che, dato $\epsilon > 0$, esiste N_0 tale che per ogni $N \geq N_0$ e $|z| \leq s$ si abbia:

$$|g(z) - f_N(h(z))| < \epsilon$$

Poiché la successione di polinomi $\{f_N(z)\}$ converge uniformemente alla funzione $f(z)$ nel disco chiuso di raggio r, possiamo scegliere N_0 sufficientemente grande in modo che per $N \geq N_0$ si abbia

$$|f_N(h(z)) - f(h(z))| < \epsilon$$

e con ciò si dimostra che

$$|g(z) - f(h(z))| < 2\epsilon$$

per ogni $\epsilon > 0$, e quindi $g(z) - f(h(z)) = 0$. *q.e.d.*

4. FUNZIONI ANALITICHE

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Una funzione

$$f : U \to \mathbf{C}$$

si dice *analitica in un punto* $z_0 \in U$ se esiste una serie di potenze

$$\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$$

che converge assolutamente per $|z - z_0| < r$ per qualche $r > 0$, e tale che si abbia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$$

per ogni z siffatto. f si dice *analitica in* U se lo è in ogni punto di U.

Se f è analitica in z_0 diremo anche che f *ha un'espansione (o uno sviluppo) in serie di potenze* in z_0. Un punto z_0 tale che $f(z_0) = 0$ si dice uno *zero* di f.

L'insieme delle funzioni analitiche in U si denota $H(U)$.

Le funzioni appartenenti a $H(\mathbf{C})$, cioè analitiche in tutto il piano, si dicono *funzioni intere*. Sono funzioni intere i polinomi (in particolare le funzioni lineari, cioè della forma $f(z) = az + b$), la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, che verranno introdotte tra poco.

(4.1) PROPOSIZIONE: *(i) Se* $f, g \in H(U)$ *e* $\alpha \in \mathbf{C}$, *allora* $f + g$, fg, $\alpha f \in H(U)$. *Inoltre* $\frac{f}{g}$ *è definita ed analitica in ogni aperto contenuto nel sottoinsieme degli* $z \in U$ *tali che* $g(z) \neq 0$.

(ii) Se $V \subset \mathbf{C}$ *è un aperto e* $h : V \to U$ *ed* $f : U \to \mathbf{C}$ *sono analitiche, allora* $f \circ h$ *è analitica in* V.

Dimostrazione

(i) segue immediatamente dalle proprietà di convergenza dimostrate per le serie di potenze nel §3.

(ii) Se $z_0 \in V$ e $h(z_0) = w_0$, allora:

$$h(z) = w_0 + \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k$$

e quindi la funzione $h(z) - w_0$ è rappresentata in un intorno di z_0 da una serie priva di termine costante. Se

$$f(w) = \sum_{n \geq 0} a_n (w - w_0)^n$$

in un intorno di w_0 allora applicando il teorema (3.5) possiamo sostituire la serie $h(z) - w_0 = \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k$ al posto di $w - w_0$ e ottenere:

$$f(h(z)) = \sum_{n \geq 0} a_n (\sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k)^n$$

che è uno sviluppo in serie di $f \circ h$ in un intorno di z_0. *q.e.d.*

Dalla (4.1) segue in particolare che una funzione razionale $\frac{P(z)}{Q(z)}$, dove $P, Q \in \mathbf{C}[z]$ e $\neq 0$, è ben definita ed analitica in tutti i punti di $z \in \mathbf{C}$ in cui $Q(z) \neq 0$.

(4.2) TEOREMA *Se $f \in H(U)$ allora f è continua in U.*

Dimostrazione

Segue facilmente dal teorema (2.3). Diamo comunque una dimostrazione diretta del teorema.

Sia $a \in U$ ed $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$ in un disco aperto $D_r(a)$ di centro a e raggio $r > 0$; sia $f(a) = b$. Non è restrittivo supporre $a = 0 = b$. Quindi:

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^k = z \sum_{k \geq 1} a_k z^{k-1}$$

Se $|z| < r$ la serie $\sum_{k \geq 1} a_k z^k$ converge assolutamente e quindi altrettanto avviene per la serie $\sum_{k \geq 1} a_k z^{k-1}$. Pertanto, se $0 < \rho < r$ e $|z| < \rho$ si ha:

$$|f(z)| \leq |z| \sum_{k \geq 1} |a_k| \rho^{k-1}$$

e quindi $|f(z)|$ tende a 0 al tendere di $|z|$ a 0. *q.e.d.*

La seguente proposizione ci dice che sono analitiche le funzioni definite da serie di potenze.

(4.3) PROPOSIZIONE *Sia $a \in \mathbf{C}$ e $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$ una serie di potenze convergente assolutamente nel disco aperto $D_r(a)$ per qualche $r > 0$. Allora la funzione $f : D_r(a) \to \mathbf{C}$ definita dalla serie è analitica.*

Dimostrazione

Non è restrittivo supporre $a = 0$, e quindi che si abbia $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ in $D_r(0)$. Sia $z_0 \in D_r(0)$, e sia $s > 0$ tale che $|z_0| + s < r$. Scriviamo

$$z = z_0 + (z - z_0)$$

e quindi:

$$z^k = [z_0 + (z - z_0)]^k$$

Possiamo pertanto riscrivere:

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k \Big[\sum_{j\geq 0}^{k} \binom{k}{j} z_0^{k-j} (z - z_0)^j \Big]$$

Se $|z - z_0| < s$ allora $|z_0| + |z - z_0| < r$ e quindi la serie

$$\sum_{k\geq 0} |a_k| [|z_0| + |z - z_0|]^k = \sum_{k\geq 0} |a_k| \Big[\sum_{j\geq 0}^{k} \binom{k}{j} |z_0|^{k-j} |z - z_0|^j \Big]$$

converge. Scambiando l'ordine di sommatoria otteniamo che la serie:

$$\sum_{j\geq 0} \Big[\sum_{k\geq j} a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j} \Big] (z - z_0)^j$$

converge assolutamente ad $f(z)$ per $|z - z_0| < s$. *q.e.d.*

(4.4) DEFINIZIONE *Una funzione $f : U \to \mathbf{C}$ si dice* derivabile in senso complesso, *o* olomorfa, *in un punto $a \in U$ se esiste il*

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

In tal caso esso si denota $f'(a)$. f si dice derivabile in senso complesso *o* olomorfa *in U se lo è in ogni punto di U.*

(4.5) TEOREMA *Se f è analitica in U allora f è olomorfa in U e la sua derivata f' è una funzione analitica in U.*

Dimostrazione

Sia $a \in U$ e sia $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k (z - a)^k$ in un disco aperto $D_r(a)$, $r > 0$. Per la proposizione (3.4) la serie $\sum_{k\geq 1} k a_k (z - a)^{k-1}$ converge assolutamente in $D_r(a)$ ad una funzione analitica che chiameremo $g(z)$. Siano $z, w \in D_r(a)$, $w \neq z$, e sia

$$|w - a|, |z - a| < \rho < r$$

Allora, si ha:

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)=\sum_{k\geq 2}a_k\Big[\frac{(z-a)^k-(w-a)^k}{z-w}-k(w-a)^{k-1}\Big]=$$

(ponendo $t=z-a$, e $v=w-a$)

$$=\sum_{k\geq 2}a_k\Big[\frac{t^k-v^k}{t-v}-kv^{k-1}\Big]=\sum_{k\geq 2}a_k\big[(t^{k-1}+t^{k-2}v+\cdots+tv^{k-2}+v^{k-1})-kv^{k-1}\big]=$$

$$=\sum_{k\geq 2}a_k\big[t^{k-1}+t^{k-2}v+\cdots+tv^{k-2}-(k-1)v^{k-1}\big]=$$

$$=\sum_{k\geq 2}a_k\big[(t-v)(t^{k-2}+2t^{k-3}v+\cdots+(k-2)tv^{k-3}+(k-1)v^{k-2}\big]=$$

$$=\sum_{k\geq 2}a_k\Big[(t-v)\sum_{j=1}^{k-1}jt^{k-1-j}v^{j-1}\Big]$$

Allora, essendo $|t|<\rho$ e $|v|<\rho$, abbiamo:

$$|t-v|\Big|\sum_{j=1}^{k-1}jt^{k-1-j}v^{j-1}\Big|\leq|z-w|\frac{k(k-1)}{2}\rho^{k-2}$$

e pertanto:

$$\Big|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\Big|\leq\frac{1}{2}|z-w|\sum_{k\geq 2}|a_k|k(k-1)\rho^{k-2}$$

La serie a secondo membro è la serie dei moduli, calcolata in $z=\rho$, della derivata seconda della serie $\sum_{k\geq 0}a_kz^k$, e quindi converge. Pertanto il secondo membro tende a 0 per $z\to w$. Ciò dimostra che f è derivabile in ogni punto di $D_r(a)$ e che la sua derivata coincide con la funzione analitica g. Ciò conclude la dimostrazione. *q.e.d.*

Osservazione. Usando il teorema integrale di Cauchy (che non dimostreremo), è possibile far vedere che, viceversa, ogni funzione olomorfa è analitica. Noi utilizzeremo questo fatto solo in una circostanza (e cioè per la dimostrazione del teorema (6.2)), mentre per il resto tutto quello che diremo sarà indipendente dal teorema di Cauchy.

Il seguente corollario dicende immediatamente dal teorema:

(4.6) COROLLARIO *Se $f\in H(U)$ allora f possiede derivate di ogni ordine che sono funzioni analitiche in U.* *q.e.d.*

Supponiamo che la funzione $f(z)$ sia analitica in un intorno di $a \in \mathbf{C}$ e che in a si abbia:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

Allora dalla dimostrazione del teorema (4.5) segue che la derivata n-esima di f si esprime in un intorno di a come:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq n} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (z-a)^{k-n}$$

In particolare si ha:

$$f^{(n)}(a) = n! a_n$$

e quindi per ogni n:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad [4.1]$$

In particolare la successione dei coefficienti $\{a_k\}$ è univocamente determinata da f e da a.

È facile verificare che le regole usuali di derivazione si applicano alle funzioni olomorfe. Così ad esempio si ha:

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \end{aligned}$$

per ogni scelta di f, g olomorfe. In particolare si ha:

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

per ogni $n \in \mathbf{Z}$. Similmente si ha:

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$$

se g è olomorfa in un intorno di $z \in \mathbf{C}$, ed f è olomorfa in un intorno di $g(z)$.

(4.7) DEFINIZIONE *sia $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione sull'aperto U a valori complessi. Una primitiva per f è una funzione g olomorfa in U e tale che $g'(z) = f(z)$ per ogni $z \in U$.*

È ovvio che una primitiva, se esiste, è determinata a meno di una costante additiva.

(4.8) PROPOSIZIONE *Sia f una funzione analitica che ha uno sviluppo in serie in un disco $D_r(a)$. Allora f possiede una primitiva in $D_r(a)$.*

Dimostrazione

Supponiamo che si abbia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

in $D_r(a)$. Allora la serie

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} (z-a)^{k+1} \qquad [4.2]$$

converge nel disco $D_r(a)$ perché i suoi coefficienti sono maggiorati in modulo dai coefficienti della serie $f(z)$. Inoltre, detta $g(z) \in H(D_r(a))$ la funzione somma della serie [4.2], si ha $g'(z) = f(z)$. Quindi g è una primitiva di f in $D_r(a)$. *q.e.d.*

Osservazione: Se $f \in H(U)$, dove U è un aperto di $\mathbf{C}$, la proposizione (4.8) implica che per ogni punto $a \in U$ esiste un disco $D_r(a) \subset U$ tale che la restrizione di f a $D_r(a)$ possieda una primitiva. Ciò non significa però che f possiede una primitiva in tutto U. In altre parole, non è necessariamente vero che è possibile trovare primitive di f nelle vicinanze di ogni punto di U in modo che si incollino per definire un'unica funzione primitiva di f in tutto U. Un esempio è fornito dalla funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ analitica in $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Infatti ogni sua primitiva locale, cioè nell'intorno di un punto di $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, deve infatti differire per una costante additiva da una determinazione del log(z) (si veda la discussione del logaritmo complesso qui sotto). Ma, come spiegato nell'esempio che segue, una tale determinazione non può essere definita in tutto $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

oooooooooo

ESEMPI:

La funzione $\frac{1}{1-z}$ Dalla proposizione (4.1) segue che la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

è analitica nell'aperto $U = \mathbf{C}\backslash\{0\}$. Il suo sviluppo in serie nell'origine è

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} z^k$$

Questa serie ha raggio di convergenza $r_0 = 1$ e quindi rappresenta la funzione f nel disco $D_1(0)$. Consideriamo un qualsiasi punto $b \in D_1(0)$, $b \neq 0$. Dalla dimostrazione della proposizione (4.3) segue che lo sviluppo in serie di $f(z)$ in b è:

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} b_j (z-b)^j$$

dove

$$b_j = \sum_{k \geq j} \binom{k}{j} b^{k-j}$$

Questa serie converge a $(1-b)^{-(j+1)}$ e pertanto lo sviluppo in serie di $f(z)$ in b si può riscrivere come:

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} (1-b)^{-(j+1)} (z-b)^j$$

Il raggio di convergenza r_b di questa serie è dato da:

$$\frac{1}{r_b} = \lim_{j \to \infty} (|1-b|^{-(j+1)})^{\frac{1}{j}} = |1-b|^{-1}$$

cioè $r_b = |1-b|$, che è la distanza di b dal punto 1 in cui la funzione $f(z)$ non è definita. Si osservi che $D_{r_b}(b) \not\subset D_1(0)$ a meno che b non sia reale e $0 < b < 1$.

La funzione esponenziale e il logaritmo

Vogliamo determinare quali sono le serie di potenze

$$E(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k \in \mathbf{C}[[T]]$$

tali che $E'(T) = E(T)$, e $E(0) = a_0 = 1$.

Poiché

$$E'(T) = a_1 + 2a_2 T + 3a_3 T^2 + \cdots$$

otteniamo $a_{k-1} = k a_k$ e $a_0 = 1$, e quindi deduciamo $a_k = \frac{1}{k!}$. In particolare la serie cercata $E(T)$ esiste ed è unica. Si ha:

$$E(T) := \sum_{k \geq 0} \frac{T^k}{k!}$$

Poiché $\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$, vediamo che $E(T)$ ha raggio di convergenza $r = \infty$. La *funzione esponenziale* e^z è la funzione olomorfa in tutto $\mathbf{C}$ somma della serie $E(z)$.

È facile dedurre le principali proprietà di e^z direttamente dalla definizione. Dimostriamo ad esempio l'identità

$$e^{a+b} = e^a \ e^b \qquad \forall a, b$$

Sia $c \in \mathbf{C}$. Si ha:

$$(e^z \ e^{c-z})' = e^z \ e^{c-z} - e^z \ e^{c-z} = 0$$

e quindi $e^z \ e^{c-z} = \text{cost.}$; prendendo $z = 0$ deduciamo che $e^z \ e^{c-z} = e^c$, e ponendo $z = a$ e $c = b + a$ si conclude.

In particolare $e^z \ e^{-z} = e^0 = 1$ e quindi $e^z \neq 0$ per ogni z e $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

Inoltre $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ perché tutti i coefficienti di $E(z)$ sono reali. In particolare, se $y \in \mathbf{R}$:

$$|e^{iy}| = e^{iy} \ e^{-iy} = 1$$

Inoltre, essendo $e^{x+iy} = e^x\ e^{\mathrm{i}y}$,si ha $|e^{x+iy}| = e^x$, e quindi $|e^{x+iy}| = 1$ se e solo se $x = 0$ cioè se e solo se $z = \mathrm{i}y$ è puramente immaginario.

Per mezzo della funzione esponenziale è possibile definire le *funzioni trigonometriche* ponendo:

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}; \quad \mathrm{sen}(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

Dalle definizioni si deducono facilmente tutte le principali proprietà di queste funzioni. In particolare:

$$\cos(z)' = -\mathrm{sen}(z); \quad \mathrm{sen}(z)' = \cos(z)$$

$$\mathrm{sen}(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$$

Si ha inoltre

$$e^{\mathrm{i}y} = \cos(y) + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}(y) \qquad y \in \mathbf{R}$$

Calcolando si trovano gli sviluppi in serie:

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

$$\mathrm{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

Per $z = x$ reale queste serie si riducono agli usuali sviluppi in serie di Taylor di $\cos(x)$ e $\mathrm{sen}(x)$, e quindi le funzioni trigonometriche complesse prolungano a $\mathbf{C}$ le funzioni trigonometriche già conosciute nel caso reale.

Studiamo la *periodicità* di e^z. Sia $p \in \mathbf{C}$ un periodo, cioè un numero complesso tale che $e^{z+p} = e^z$ per ogni $z \in \mathbf{C}$. Ciò avviene se e solo se $e^p = 1$. Quindi $p = \mathrm{i}t$, t reale. D'altra parte

$$e^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}(t) = 1$$

significa $\cos(t) = 1,\ \mathrm{sen}(t) = 0$, il che avviene se e solo se $t = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

Quindi i periodi di e^z sono tutti e soli i multipli interi di $2\pi\mathrm{i}$.

Sia $w \in \mathbf{C}$. Un *logaritmo* di w è un numero complesso z tale che $e^z = w$. Ovviamente, poiché $e^z \neq 0$ il numero $w = 0$ non ha logaritmo. Se $w \neq 0$ allora l'equazione $e^{x+\mathrm{i}y} = w$ è equivalente a

$$e^x = |w|, \quad e^{\mathrm{i}y} = \frac{w}{|w|}$$

La prima equazione possiede l'unica soluzione $x = \log(|w|)$. La seconda equazione ha infinite soluzioni della forma $y = \theta + 2k\pi$. Ogni tale soluzione è detta una *determinazione dell'argomento* di w, e si denota $\arg(w)$.

In conclusione, ogni $w = |w|(\cos(\theta) + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}(\theta)) \neq 0$ possiede infiniti logaritmi, della forma:

$$\log(w) = \log(|w|) + \mathrm{i}\ (\theta + 2k\pi)$$

$k \in \mathbf{Z}$.

5. ZERI DI UNA FUNZIONE ANALITICA

In questo paragrafo dimostreremo che due funzioni analitiche che coincidono su un insieme abbastanza grande, in un senso che preciseremo, coincidono identicamente. Questa proprietà generalizza una proprietà ben nota dei polinomi: se due polinomi di grado $\leq n$ assumono gli stessi valori in $n+1$ punti distinti di $\mathbf{C}$, allora concidono.

Iniziamo con un primo risultato del tipo indicato.

(5.1) TEOREMA (Principio del prolungamento analitico): *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso, $z_0 \in U$, ed $f \in H(U)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $f^{(k)}(z_0) = 0$ per ogni $k \geq 0$.
(ii) f è identicamente nulla in un intorno di z_0.
(iii) f è identicamente nulla in U.

Dimostrazione

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$ lo sviluppo in serie di f in z_0. Dalla [4.1] segue che $a_k = 0$ per ogni k, e quindi $f(z) = 0$ in un intorno di z_0.

(ii) $\Rightarrow$ (i) e (iii) $\Rightarrow$ (i) sono ovvie.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Dobbiamo dimostrare che l'insieme

$$\Delta = \{a \in U : f \ \text{ è identicamente nulla in un intorno di } a\}$$

coincide con U. Osserviamo che $z_0 \in \Delta$ e quindi $\Delta \neq \emptyset$. Pertanto, poiché U è connesso, sarà sufficiente dimostrare che Δ è aperto e chiuso in U.

Δ è aperto per definizione.

Sia $c \in \overline{\Delta}$. Allora esiste una successione $\{c_n\} \to c$ tale che $c_n \in \Delta$. In ogni punto c_n è verificata la condizione (ii), e quindi anche la (i), cioè $f^{(k)}(c_n) = 0$ per ogni $k \geq 0$ e per ogni n. Ma allora, essendo le derivate $f^{(k)}(z)$ funzioni continue, si ha anche $f^{(k)}(c) = 0$ per ogni k, cioè in c è soddisfatta la condizione (i). Ma allora anche la (ii) è soddisfatta, cioè $c \in \Delta$, e quindi Δ è chiuso. *q.e.d.*

(5.2) COROLLARIO *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso. Se $f, g \in H(U)$ coincidono in un intorno di un punto $z_0 \in U$ allora coincidono identicamente in tutto U.*

Dimostrazione

Basta applicare il teorema alla funzione $f-g$. *q.e.d.*

Sia f una funzione analitica in un intorno di un punto $a \in \mathbf{C}$ e sia

$$f(z)=\sum_{k\geq 0} a_k(z-a)^k$$

il suo sviluppo in serie in a. Supponiamo che f non sia identicamente nulla in un intorno di a. In tal caso i coefficienti a_k non sono tutti nulli.

L'ordine di f in a è definito come il più piccolo esponente k tale che $a_k \neq 0$, e si denota $o_a(f)$.

E' evidente che $o_a(f)$ coincide con l'ordine della serie $\sum_{k\geq 0} a_k T^k$ secondo la definizione data nel §1.

(5.3) LEMMA *Sia f una funzione analitica non costante in un intorno aperto A di $a \in \mathbf{C}$. Allora:*
(i) $o_a(f)>0$ se e solo se $f(a)=0$.
(ii) Esiste un aperto $U(a) \subset A$ contenente a tale che $o_z(f)=0$ per ogni $z \in U(a)$, $z \neq a$.
(iii) Posto $f'=\frac{df}{dz}$ si ha:

$$o_a(f')=o_a(f-f(a))-1$$

(iv) Se g è una funzione olomorfa e non costante su un aperto B di $\mathbf{C}$ tale che $g(B) \subset A$, e se per qualche $b \in B$ si ha $g(b)=a$, $g'(b) \neq 0$, allora:

$$o_b(f \circ g)=o_a(f)$$

Dimostrazione

(i) è ovvia.

(ii) Se $o_a(f)=0$ la conclusione è ovvia per la continuità di f. Supponiamo che a sia uno zero di f, cioè che si abbia $a_0=f(a)=0$, e che f non sia identicamente nulla in un intorno di a; sia $h=o_a(f)>0$. Allora possiamo scrivere:

$$f(z)=\sum_{k\geq h} a_k(z-a)^k=(z-a)^h \sum_{k\geq h} a_k(z-a)^{k-h}$$

La serie $\sum_{k\geq h} a_k(z-a)^{k-h}$ converge in un intorno di a ad una funzione analitica $g(z)$. Poiché $g(a)=a_h \neq 0$, esiste $r>0$ tale che $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in D_r(a)$. Ma allora $f(z)=(z-a)g(z) \neq 0$ per ogni $z \in D_r(a)$, $z \neq a$. Quindi il punto a è isolato nell'insieme degli zeri di f.

(iii) è immediata.

(iv) Se $o_a(f) = 0$ la conclusione è ovvia. Supponiamo $o_a(f) > 0$ e procediamo per induzione su $o_a(f)$. Per la b) si ha:

$$o_b(f \circ g) = 1 + o_b((f \circ g)') = 1 + o_b[f'(g(w))g'(w)] =$$

$$= 1 + o_b(f' \circ g) + o_b(g') = 1 + o_b(f' \circ g)$$

Poiché dalla b) segue che $o_a(f') = o_a(f) - 1$, per l'ipotesi induttiva si ha $o_b(f' \circ g) = o_a(f')$ e quindi:

$$o_b(f \circ g) = 1 + o_a(f') = o_a(f)$$

q.e.d.

Applicando il teorema (5.1) deduciamo il seguente risultato:

(5.4) TEOREMA (Principio d'identità delle funzioni analitiche) *Se $U \subset \mathbf{C}$ è un aperto connesso ed $f \in H(U)$ non è identicamente nulla, l'insieme degli zeri di f è un insieme discreto, cioè tutti i suoi punti sono isolati.*

Abbiamo il seguente immediato

(5.5) COROLLARIO *Se $U \subset \mathbf{C}$ è un aperto connesso ed $f, g \in H(U)$, allora l'insieme*

$$S = \{z \in U : f(z) = g(z)\}$$

è discreto oppure $S = U$. In particolare, se $f \in H(U)$ e $c \in \mathbf{C}$, allora

$$f^{-1}(c) = \{z \in U : f(z) = c\}$$

se non è vuoto, è un insieme discreto oppure $f^{-1}(c) = U$, cioè f è costante.

(5.5) DEFINIZIONE *Sia $f : A \to \mathbf{C}$ una funzione analitica definita su un aperto A di $\mathbf{C}$ e sia $a \in A$.* L'indice di ramificazione *di f in a è*

$$e_f(a) = o_a(f(z) - f(a))$$

Il punto a si dice di ramificazione *per f se $e_f(a) \geq 2$. In tal caso diremo che f* ramifica *in a.*

Dal Lemma (5.3) segue che si ha

$$e_f(a) = o_a(f') + 1$$

e che l'insieme dei punti di ramificazione di f è un sottoinsieme discreto di A.

ESEMPIO. Per un fissato intero $n \geq 2$ ed una costante $c \in \mathbf{C}$ la funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, definita da $f(z) = z^n + c$, ramifica solo nel punto $z = 0$ con indice di ramificazione n. Se invece $n = 1$ la f non ramifica in alcun punto.

Il Lemma seguente generalizza (5.3)(iv):

(5.6) LEMMA *Sia f una funzione analitica non costante in un intorno aperto A di $a \in \mathbf{C}$. Se g è una funzione olomorfa e non costante su un aperto B di $\mathbf{C}$ tale che $g(B) \subset A$, e se per qualche $b \in B$ si ha $g(b) = a$ allora:*

$$e_{f \circ g}(b) = e_f(a) e_g(b)$$

Dimostrazione
Si ha

$$e_{f \circ g}(b) = 1 + o_b((f \circ g)') = 1 + o_b[(f' \circ g)g'] = 1 + o_b(f' \circ g) + o_b(g') = o_b(f' \circ g) + e_g(b)$$

Se $e_f(a) = 1$ allora $o_a(f') = 0$ e quindi si ha anche $o_b(f' \circ g) = 0$. Dall'uguaglianza precedente segue che $e_{f \circ g}(b) = e_g(b)$ ela conclusione è vera in questo caso. Supponiamo $e_f(a) \geq 2$ e procediamo per induzione su $e_f(a)$. Per l'ipotesi induttiva si ha:

$$o_b(f' \circ g) = e_{f' \circ g}(b) = e_{f'}(a) e_g(b) = [e_f(a) - 1] e_g(b)$$

e quindi:

$$e_{f \circ g}(b) = o_b(f' \circ g) + e_g(b) = [e_f(a) - 1] e_g(b) + e_g(b) = e_f(a) e_g(b)$$

q.e.d.

Si osservi che nel caso in cui $a = 0 = f(a)$ il Lemma afferma che

$$o_b(f \circ g) = o_0(f) o_b(g)$$

oooooooooo

d. *La serie binomiale*

Sia $\alpha \neq 0$ un numero complesso. Definiamo i *coefficienti binomiali* come:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}$$

per $k \geq 1$, e $\binom{\alpha}{0} = 1$. Definiamo la *serie binomiale* nel modo seguente:

$$B_\alpha(t) = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} t^k$$

(5.6) LEMMA *Se α non è uguale ad un intero ≥ 0, il raggio di convergenza di $B_\alpha(t)$ è uguale ad* 1.

Dimostrazione

L'ipotesi su α implica che nessuno dei coefficienti $\binom{\alpha}{k}$ è zero. Si ha:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|1 - \frac{\alpha+1}{k+1}\right|$$

che converge ad 1 per $k \to \infty$. La conclusione segue dal criterio del rapporto. *q.e.d.*

Se m è un intero positivo segue dal lemma che la serie $B_{\frac{1}{m}}(x)$ converge assolutamente per x reale tale che $|x| < 1$. D'altra parte è ben noto dai corsi di analisi matematica che la somma di tale serie soddisfa $B_{\frac{1}{m}}(x)^m = 1 + x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ tale che $|x| < 1$. Dal principio di identità delle funzioni olomorfe discende quindi che nel disco aperto $D_1(0) \subset \mathbf{C}$ la funzione somma della serie $B_{\frac{1}{m}}(z)$ soddisfa

$$B_{\frac{1}{m}}(z)^m = 1 + z$$

.

6. SINGOLARITA' DELLE FUNZIONI ANALITICHE

(6.1) DEFINIZIONE *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Se $a \in U$ ed $f \in H(U)\backslash\{a\}$ diremo che f ha una* singolarità isolata *nel punto a. Se f può essere estesa ad una funzione analitica in tutto U, diremo che a è una* singolarità eliminabile *per f, ovvero che f ha una singolarità eliminabile in a.*

Nella dimostrazione del teorema seguente utilizzeremo l'implicazione (che non abbiamo dimostrato) "f olomorfa $\Rightarrow$ f analitica".

(6.2) TEOREMA *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $a \in U$, e sia $f \in H(U)\backslash\{a\}$. Se f è limitata in $D_r(a)\backslash\{a\}$ per qualche $r > 0$, allora f ha una singolarità eliminabile in a.*

Dimostrazione

Definiamo $h : U \to \mathbf{C}$ ponendo

$$\begin{aligned} h(a) &= \quad 0 \\ h(z) &= \quad (z-a)^2 f(z), \qquad z \neq a \end{aligned}$$

Si ha:

$$\lim_{z\to a} \frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} (z-a)f(z) = 0$$

perché f è limitata in un intorno di a. Pertanto h è olomorfa in tutto U, e quindi h è analitica in U. Poiché $h(a) = 0 = h'(a)$ si ha:

$$h(z) = \sum_{k\geq 2} c_k (z-a)^k$$

in un intorno di a. Ponendo $f(a) = c_2$ definiamo un'estensione di f a tutto U che è analitica perché in un intorno di a si ha:

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} c_{k+2} (z-a)^k$$

q.e.d.

Le singolarità non eliminabili delle funzioni analitiche si classificano in *polari* e *essenziali* e possono essere caratterizzate dal comportamento della funzione in un loro intorno. Per i nostri scopi saraà sufficiente adottare la seguente definizione:

(6.3) DEFINIZIONE *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto. Se $a \in U$ ed $f \in H(U)\backslash\{a\}$ diremo che f ha una* singolarità polare *(o un* polo*) nel punto a se la funzione $1/f$ ha una singolarità eliminabile in a ed $1/f(a) = 0$, cioè $o_a(1/f) > 0$. Se a non è né una singolarità eliminabile né un polo diremo che f ha una singolarià essenziale in a.*

Se f ha un polo in a ed $o_a(1/f) = m$ diremo che f ha ordine $-m$ in a ovvero che a è un polo di ordine m. Quindi l'ordine di f in un polo è negativo, mentre l'ordine del polo è positivo. Questa terminologia può generare confusione ma è quella comunemente usata.

Ad esempio la funzione $\frac{1}{z}$ ha un polo di ordine 1 in 0, cioè ha ordine -1 in 0. Un esempio di singolarità essenziale è il punto 0 per la funzione $e^{\frac{1}{z}}$.

Se f ha un polo di ordine m in a allora in un intorno D di a possiamo scrivere

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m g(z)$$

con g analitica e $o_z(g) = 0$ per ogni $z \in D$. Pertanto, se in D

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$$

allora in $D\backslash\{a\}$:

$$f(z) = (z-a)^{-m} \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k = \frac{a_0}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{z-a} + \sum_{k \geq m} a_k (z-a)^{k-m}$$

L'espressione a terzo membro si dice lo *sviluppo in serie di Laurent* di f in a. La somma

$$\frac{a_0}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{z-a}$$

è la *parte principale* dello sviluppo in serie di Laurent; il coefficiente a_{m-1} di $\frac{1}{z-a}$ si dice il *residuo* di f in a.

(6.4) DEFINIZIONE *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, $S \subset U$ un sottoinsieme discreto. Una funzione $f \in H(U\backslash S)$ si dice* meromorfa *in U se in ogni punto di S la funzione ha una singolarità eliminabile oppure un polo. L'insieme di tutte le funzioni meromorfe in U si denota $M(U)$.*

Ovviamente si ha

$$H(U) \subset M(U)$$

Inoltre segue facilmente dalla definizione che se $f, g \in M(U)$ allora $f \pm g \in M(U)$ e $fg \in M(U)$. Inoltre se $f \in M(U)$ non è identicamente nulla allora $1/f \in M(U)$. Pertanto $M(U)$ è un campo con le operazioni di somma e di prodotto di funzioni.

7. PROPRIETA' GEOMETRICHE DELLE FUNZIONI ANALITICHE

Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto, e $f \in H(U)$. Diremo f un *isomorfismo analitico* se la sua immagine $V = f(U)$ è un aperto di $\mathbf{C}$ ed esiste una funzione analitica $g : V \to U$ tale che $f \circ g = 1_V$ e $g \circ f = 1_U$, cioè tale che f e g siano funzioni inverse una dell'altra.

Diremo che $f \in H(U)$ è un *isomorfismo analitico locale in un punto* $z_0 \in U$ se esiste un intorno aperto $U_0 \subset U$ di z_0 tale che la restrizione di f ad U_0 sia un isomorfismo analitico. Diremo f un *isomorfismo analitico locale* se è un isomorfismo analitico locale in ogni punto $z \in U$.

Ovviamente ogni isomorfismo analitico è anche un isomorfismo analitico locale. Dalle definizioni segue inoltre che un isomorfismo analitico locale è un'applicazione aperta.

Dimostriamo un importante risultato preliminare su cui baseremo le nostre considerazioni successive.

(7.1) PROPOSIZIONE *Sia $f(z)$ una serie di potenze tale che $o(f) = 1$. Allora esiste un'unica serie di potenze $g(z)$ tale che $o(g) = 1$ e $f(g(z)) = z$, e la serie $g(z)$ soddisfa anche l'identità $g(f(z)) = z$. Se f è convergente allora anche g è convergente. La serie $g(z)$ si dice* inversa formale *di f.*

Dimostrazione

Per ipotesi possiamo supporre che la serie f sia della forma:

$$f(z) = a_1 z - \sum_{k \geq 2} a_k z^k$$

con $a_1 \neq 0$. Dobbiamo trovare una serie di potenze $g(z) = \sum_{k \geq 1} b_k z^k$ tale che $b_1 \neq 0$ e

$$a_1 g(z) - a_2 g(z)^2 - a_3 g(z)^3 - \cdots = z$$

Qust'uguaglianza corrisponde ad infinite equazioni nei coefficienti incogniti $b_1, b_2, \ldots$ ottenute eguagliando tra loro i coefficienti delle serie a primo e secondo membro. Queste equazioni sono della forma:

$$a_1 b_1 = 1$$

$$a_1 b_k - P_k(a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{k-1}) = 0 \qquad k \geq 2$$

dove P_k è un polinomio a coefficienti interi positivi. Poiché $a_1 \neq 0$ se ne deduce immediatamente che queste equazioni possono essere risolte induttivamente, individuando univocamente i coefficienti b_k. Quindi la serie $g(z)$ esiste ed è unica.

Dimostriamo che $g(f(z)) = z$. Applicando la stessa dimostrazione a g deduciamo che esiste una serie di potenze $h(z)$ tale che $o(h) = 1$ e $g(h(z)) = z$. Ma allora si ha:

$$g(f(z)) = g(f(g(h(z)))) = g(h(z)) = z$$

come si voleva.

Supponiamo ora che f sia convergente. Salvo moltiplicare f per a_1^{-1} se necessario, possiamo supporre che $a_1 = 1$. Quest'ipotesi non è restrittiva, perché, dimostrata la convergenza della serie g costruita per $a_1^{-1}f$, seguirà immediatamente quella della serie costruita per f.

Sia

$$f^*(z) = z - \sum_{k\geq 2} a_k^* z^k$$

una serie di potenze con a_k^* reale ≥ 0 e tale che $|a_k| \leq a_k^*$ per ogni k. Sia $\varphi(z) = \sum_{k\geq 1} c_k z^k$ l'inversa formale di $f^*(z)$.

Si ha $c_1 = 1$ e

$$c_k - P_k(a_2^*, \dots, a_k^*, c_1, \dots, c_{k-1}) = 0$$

con gli stessi polinomi P_k di prima. Per induzione segue allora che ogni c_k è reale ≥ 0, e che

$$|b_k| \leq c_k$$

Per concludere sarà quindi sufficiente scegliere la serie f^* in modo che $\varphi(z)$ abbia raggio di convergenza positivo. Poiché esiste $A > 0$ tale che

$$|a_k| \leq A^k$$

per ogni $k \geq 2$, poniamo:

$$f^*(z) = z - \sum_{k\geq 2} A^k z^k = z - \frac{A^2 z^2}{1 - Az}$$

La serie $\varphi(z)$ soddisfa $f^*(\varphi(z)) = z$, cioè:

$$\varphi(z) - \frac{A^2 \varphi(z)^2}{1 - A\varphi(z)} = z$$

che è equivalente all'equazione quadratica:

$$(A^2 + A)\varphi(z)^2 - (1 + Az)\varphi(z) + z = 0$$

Quest'equazione ha la soluzione:

$$\varphi(z) = \frac{(1 + Az) - \sqrt{(1 + Az)^2 - 4z(A^2 + A)}}{2(A^2 + A)}$$

L'espressione sotto radice è della forma:

$$(1+Az)^2\left(1-\frac{4z(A^2+A)}{(1+Az)^2}\right)$$

e la sua radice quadrata è data da:

$$(1+Az)\left(1-\frac{4z(A^2+A)}{(1+Az)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

La funzione $1-\frac{4z(A^2+A)}{(1+Az)^2}$ è somma di una serie di potenze della forma $1+h(z)$ con $o(h)\geq 1$. Sostituendo nella serie binomiale $B_{\frac{1}{2}}(z)$ otteniamo una serie $B_{\frac{1}{2}}(h(z))$ convergente ad $(1+h(z))^{\frac{1}{2}}$. Quindi $\varphi(z)$ è esprimibile come composizione di serie convergenti, ed è pertanto convergente. Ciò dimostra che anche la serie $g(z)$ è convergente. *q.e.d.*

ESERCIZIO: Verificare che l'inversa formale di e^z-1 è la serie

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{w^k}{k}$$

la quale ha raggio di convergenza 1. Notare che invece e^z-1 ha raggio di convergenza ∞.

(7.2) COROLLARIO *Sia f una funzione analitica in un aperto $U\subset\mathbf{C}$ e sia $z_0\in U$ tale che $f'(z_0)\neq 0$. Allora f è un isomorfismo analitico locale in z_0.*

Dimostrazione

Supponiamo dapprima che $z_0=0$ e $f(0)=0$. Quindi f è analitica in un intorno di 0, e ciò significa che f può essere rappresentata come somma di una serie di potenze convergenti in 0, e quindi possiamo pensare f come definita nel suo disco aperto di convergenza $f: D\to\mathbf{C}$. Sia g l'inversa formale di f e sia V_0 un disco aperto centrato in 0 e contenuto nel disco di convergenza di g e tale che $g(V_0)\subset D$; V_0 esiste perché g è continua. Sia $U_0=f^{-1}(V_0)$, e sia

$$f_0: U_0\to V_0$$

la restrizione di f a U_0. Si osservi che $g(V_0)\subset U_0$ perché per ogni $w\in V_0$ si ha $f(g(w))=w$. Pertanto la restrizione g_0 di g a V_0 definisce un'applicazione analitica $g_0: V_0\to U_0$ tale che $f_0(g_0(w))=w$ per ogni $w\in V_0$. D'altra parte per come è stata definita f_0 si ha anche $g_0(f_0(z))=z$ per ogni $z\in U_0$, e quindi f_0 e g_0 sono isomorfismi analitici inversi uno dell'altro; ciò conclude la dimostrazione nel caso $z_0=0$ e $f(z_0)=0$.

Il caso generale si riduce a quello precedente per traslazione. Precisamente, per una f arbitraria tale che $f(z)=\sum_{k\geq 0}a_k(z-z_0)^k$, si ponga $w=z-z_0$, e

$$F(w)=f(w+z_0)-f(z_0)=\sum_{k\geq 1}a_kw^k$$

Pertanto:

$$f(z) = F(z - z_0) + f(z_0)$$

Allora per quanto dimostrato nella prima parte F possiede un'inversa locale G. Poniamo $w_0 = f(z_0)$, e sia

$$g(w) = G(w - w_0) + z_0$$

Allora g è un'inversa locale per f. Infatti:

$$f(g(w)) = F(g(w) - z_0) + f(z_0) = F(G(w - w_0) + z_0 - z_0) + f(z_0) =$$

$$= w - w_0 + f(z_0) = w$$

e viceversa:

$$g(f(z)) = G(f(z) - w_0) + z_0 = G(F(z - z_0) + f(z_0) - w_0) + z_0 = z - z_0 + z_0 = z$$

e ciò conclude la dimostrazione. *q.e.d.*

Dal corollario (7.2) segue ad esempio che la funzione esponenziale è un isomorfismo analitico locale, essendo $(e^z)' = e^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbf{C}$. Pertanto ogni $w_0 \neq 0$ possiede un intorno aperto su cui è definita una determinazione analitica di $\log(w)$ avente come valore in w_0 una qualsiasi preassegnata determinazione di $\log(w_0)$.

Ciò implica facilmente che $e^{(\cdot)} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ è un rivestimento, ed è il rivestimento universale di $\mathbf{C}^*$.

Il risultato che segue descrive una proprietà geometrica fondamentale delle funzioni analitiche.

(7.3) TEOREMA (dell'applicazione aperta) *Sia $U \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso e $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione analitica. Se f non è costante allora f è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione

Poiché f non è costante la sua derivata $f'(z)$ si annulla al più su un sottoinsieme discreto $S \subset U$. Per il corollario (7.2), la restrizione di f ad $U \backslash S$ è un isomorfismo analitico locale e quindi è aperta. Ci resta da verificare che f è aperta anche nei punti di S.

Sia $a \in S$; non è restrittivo supporre che $f(a) = 0$. Allora $r := o_a(f) \geq 2$. Si ha $f(z) = \sum_{k \geq r} a_k (z - a)^k$, $a_r \neq 0$, e $f(z) = (z - a)^r g(z)$ in un opportuno intorno $V \subset U$ di a, dove $g(z) = \sum_{k \geq 0} a_{k+r}(z - a)^k$, e $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in V$.

Poiché $g(a) = a_r \neq 0$ la funzione $g(z)$ manda un intorno W di a in un disco D di centro a_r su cui è ben definita una determinazione analitica del logaritmo complesso (perché, come abbiamo osservato in precedenza, la funzione esponenziale è un isomorfismo analitico locale). Pertanto è ben definita ed analitica in W la funzione

$$h(z) = \exp\left(\frac{1}{r}\log(g(z))\right)$$

dove abbiamo posto $\exp(-) = e^{(-)}$. Per come è stata definita la funzione h, si ha $g(z) = h(z)^r$ e quindi

$$f(z) = ((z-a)\ h(z))^r \qquad [7.1]$$

per ogni $z \in W$. Dalla [7.1] segue che la funzione $f(z)$ è la composizione della funzione

$$z \mapsto (z-a)\ h(z)$$

con la funzione

$$w \mapsto w^r$$

Si osservi che $h(a) \neq 0$ e quindi $o_a[(z-a)h(z)] = 1$. Pertanto la funzione $(z-a)h(z)$ è un isomorfismo analitico locale in a, in particolare è aperta in un intorno di a. Inoltre è elementare verificare che la funzione $w \mapsto w^r$ è aperta. In conclusione $f(z)$ è aperta in un intorno di a. *q.e.d.*

(7.4) OSSERVAZIONE: Dalla dimostrazione del teorema (7.3) segue che nell'intorno di un punto $a \in U$ in cui $f'(a) = 0$ l'applicazione f è la composizione di un isomorfismo analitico locale con l'applicazione $w \mapsto w^r$, dove $r = o_a(f - f(a))$.

Cap. II. Superfici topologiche e differenziabili

1. DEFINIZIONI

Una *superficie topologica* è uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile S tale che per ogni punto $p \in S$ esista un aperto U contenente p ed un omeomorfismo $\phi_U : U \to A$ dove A è un aperto di $\mathbf{R}^2$. La coppia (U, ϕ_U) si dice una *carta locale* per S. Quindi se S è una superficie esiste una famiglia di carte locali $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tale che $\{U_i\}_{i \in I}$ sia un ricoprimento aperto di S. Una tale famiglia si dice un *atlante* per S.

La nozione di superficie topologica è un caso particolare ($n = 2$) di quella di *varietà topologica di dimensione* n (cfr. [S2], pag. 99).

Due carte locali (U, ϕ_U) e (V, ϕ_V) per S si dicono *differenziabilmente compatibili* se $U \cap V = \emptyset$ oppure $U \cap V \neq \emptyset$ e l'applicazione

$$\phi_V \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap V) \to \mathbf{R}^2$$

è differenziabile di classe C^∞, cioè possiede derivate parziali continue di ogni ordine.

Un atlante $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ per S si dice un *atlante differenziabile* se per ogni $i, j \in I$ le carte locali (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) sono differenziabilmente compatibili.

Due atlanti differenziabili si dicono *equivalenti* se la loro unione è un atlante differenziabile.

Se sulla superficie topologica S è assegnato un atlante differenziabile, si dice che su S è definita una *struttura di superficie differenziabile*, ed in tal caso diremo che S è una *superficie differenziabile*. Per definizione due atlanti differenziabili equivalenti definiscono la stessa struttura di superficie differenziabile.

Anche la nozione di superficie differenziabile è un caso particolare di quella di *varietà differenziabile di dimensione* n, per la quale rinviamo a [S2], cap. 5.

Sono esempi di superfici differenziabili $\mathbf{R}^2$, S^2, $S^1 \times S^1$, $\mathbf{P}^2$ (cfr. [S2]). Ogni aperto di una superficie differenziabile è una superficie differenziabile.

Se S è una superficie differenziabile, $U \subset S$ è un aperto, ed $f : U \to \mathbf{R}$ è una *funzione*, diremo che f è *differenziabile* se per ogni $i \in I$ tale che $U \cap U_i \neq \emptyset$ la funzione $f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U \cap U_i) \to \mathbf{R}$ è differenziabile.

Un'*applicazione continua* $F : S \to S'$ tra due superfici differenziabili si dice *differenziabile* se per ogni carta locale (U, ϕ_U) per S e ogni carta locale $(U', \phi_{U'})$ per S', l'applicazione $\phi_{U'} \circ F \circ \phi_U^{-1}$ è differenziabile nell'aperto in cui è definita.

Se un'applicazione differenziabile $F : S \to S'$ è un omeomorfismo il cui inverso $G : S' \to S$ è differenziabile, allora F si dice un *diffeomorfismo*. Se un diffeomorfismo F esiste, S ed S' si dicono *diffeomorfe*.

2. ORIENTABILITÀ

Sia S una superficie differenziabile, $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlante differenziabile per S.
Supponiamo $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. All'applicazione differenziabile $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \mathbf{R}^2$ è associata una matrice jacobiana

$$J(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_j^1}{\partial x_i^1} & \frac{\partial x_j^1}{\partial x_i^2} \\ \frac{\partial x_j^2}{\partial x_i^1} & \frac{\partial x_j^2}{\partial x_i^2} \end{pmatrix}$$

i cui elementi sono le seguenti funzioni differenziabili su $\phi_i(U_i \cap U_j)$:

$$\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_i^\beta} = \frac{\partial(\phi_j \circ \phi_i^{-1})_\alpha}{\partial x_\beta} \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2$$

Per il teorema della funzione inversa di ha

$$\det[J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(p)] \neq 0$$

per ogni $p \in \phi_i(U_i \cap U_j)$, perché $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ e $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sono applicazioni differenziabili una inversa dell'altra.

Diremo che le carte locali $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ sono *concordemente orientate* se

$$\det[J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(p)] > 0$$

per ogni $p \in \phi_i(U_i \cap U_j)$. Se questa condizione non è verificata le carte locali (U_i, ϕ_i), (U_j, ϕ_j) si diranno *discordemente orientate*.

Si osservi che, essendo $\det[J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})]$ una funzione continua su $\phi_i(U_i \cap U_j)$, il suo valore si mantiene di segno costante su ogni componente connessa di $\phi_i(U_i \cap U_j)$.

Se (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) sono concordemente orientate per ogni $i, j \in I$ diremo $\mathcal{U}$ un *atlante orientato*. Se possiede un atlante orientato diremo S una *superficie orientabile*. Altrimenti S si dice *non orientabile*.

Due atlanti orientati si dicono *concordi* se la loro unione è un atlante orientato. L'essere concordi è una relazione di equivalenza tra atlanti orientati. Una classe di equivalenza di atlanti orientati si dice una *orientazione* di S. Assegnare una orientazione di S significa assegnare un atlante orientato. In tal caso diremo S *orientata*.

Ogni superficie differenziabile orientabile possiede esattamente due orientazioni (cfr. [S2], §23).

$\mathbf{R}^2$, S^2, $S^1 \times S^1$ sono superfici orientabili (cfr. [S2], §23).

Prima di dare esempi di superfici non orientabili, dimostriamo la seguente

PROPOSIZIONE *Sia S una superficie differenziabile orientabile, $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlante differenziabile per S tale che U_i sia connesso per ogni $i \in I$. Se $\mathcal{U}$ non è orientato allora ad $\mathcal{U}$ è possibile associare un atlante orientato*

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{(U_i, \tilde{\phi}_i)\}_{i \in I}$$

le cui carte locali sono definite sugli stessi aperti e dove $\tilde{\phi}_i = (\phi_i^1, \phi_i^2)$ *oppure* $\tilde{\phi}_i = (\phi_i^2, \phi_i^1)$ *per ogni* $i \in I$.

Dimostrazione

Poiché S è orientabile esiste un atlante orientato $\mathcal{V} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Per ogni $i \in I$ consideriamo la carta locale (U_i, ϕ_i), e sia $x \in U_i$. Sia $\alpha \in A$ tale che $x \in V_\alpha$. Poniamo:

$$\tilde{\phi}_i = \begin{cases} (\phi_i^1, \phi_i^2) & \text{se } \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x)) > 0 \\ (\phi_i^2, \phi_i^1) & \text{se } \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x)) < 0 \end{cases}$$

Si osservi che la definizione di $\tilde{\phi}_i$ è indipendente dalla scelta di (V_α, ψ_α). Se infatti $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ allora, essendo

$$\psi_\beta \circ \phi_i^{-1} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \phi_i^{-1}$$

su $\phi_i(V_\alpha \cap V_\beta \cap U_i$, si ha:

$$\det[J(\psi_\beta \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x)) = \det[J(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x)) =$$

$$= \det[J(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})](\psi_\alpha(x)) \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x))$$

donde si deduce che $\det[J(\psi_\beta \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x))$ e $\det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x))$ hanno lo stesso segno.

Inoltre, poiché U_i è connesso, il segno di $\det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})](\phi_i(x))$ è indipendente da $x \in U_i$. Quindi la definizione di $\tilde{\mathcal{U}}$ è ben posta, cioè dipende solo da $\mathcal{U}$ e da $\mathcal{V}$.

Verifichiamo che l'atlante $\tilde{\mathcal{U}}$ è orientato.

Sia $x \in U_i \cap U_j \cap V_\alpha$. Allora si ha:

$$J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x)) = J(\phi_j \circ \psi_\alpha^{-1})(\psi_\alpha(x)) \; J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x)) =$$

$$= [J(\psi_\alpha \circ \phi_j^{-1})(\psi_\alpha(x))]^{-1} \; J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x))$$

e quindi:

$$\det[J(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x))] = \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_j^{-1})(\psi_\alpha(x))]^{-1} \det[J(\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x))] > 0$$

q.e.d.

COROLLARIO *Se* S *possiede un atlante della forma* $\mathcal{U} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$, *dove gli aperti* U *e* V *sono connessi,* $U \cap V$ *è sconnesso, e* $\det[J(\psi \circ \varphi)]$ *di segni opposti in due componenti connesse di* $U \cap V$, *allora* S *non è orientabile.*

Dimostrazione

Poiché evidentemente non è possibile associare ad $\mathcal{U}$ un atlante orientato $\tilde{\mathcal{U}}$ come nella proposizione, segue che S non è orientabile. *q.e.d.*

ESEMPIO. *Il nastro di Möbius aperto M^o.*

È il quoziente di $\mathbf{I} \times (0,1)$ rispetto alla relazione di equivalenza μ che identifica $(0,t)$ con $(1,1-t)$ per ogni $t \in (0,1)$. Denotiamo con $\pi : \mathbf{I} \times (0,1) \to M^o$ la proiezione.

Dimostriamo che M^o è una superficie differenziabile non orientabile.

Un atlante differenziabile può essere così definito:

$$\mathcal{U} = \{(U,\varphi),(V,\psi)\}$$

dove

$$U = \pi[(\frac{1}{4},\frac{3}{4}) \times (0,1)],\ \varphi = \pi^{-1}$$

$$V = \pi[([0,\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3},1]) \times (0,1)],$$

$$\psi(\pi(x,y)) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } x < \frac{1}{3} \\ (x-1,1-y) & \text{se } x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

È evidente che $\mathcal{U}$ è un atlante differenziabile. Inoltre:

$$J(\psi \circ \varphi^{-1})(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{3} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{se } \frac{2}{3} < x < \frac{3}{4} \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{U}$ è un atlante differenziabile non orientato. Dal corollario segue che M^o non è orientabile.

PROPOSIZIONE *Se S è una superficie differenziabile e orientabile, allora ogni aperto di S è una superficie differenziabile e orientabile. Equivalentemente, se una superficie differenziabile S possiede un aperto che è una superficie non orientabile, anche S non è orientabile.*

Dimostrazione

Ovvia

COROLLARIO *Se una superficie differenziabile S possiede un aperto diffeomorfo ad M^o, allora S non è orientabile.*

INSERIRE QUI GLI APPUNTI DISTRIBUITI A LEZIONE SULLA CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI TOPOLOGICHE

Dal teorema (3.1) discende che, per ogni superficie compatta e connessa S, è possibile definire la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di S come

$$\chi(S) := \chi(S, \tau)$$

per una qualsiasi triangolazione τ di S.

PROPOSIZIONE *Sia S una superficie compatta e connessa ottenuta come quoziente di un poligono etichettato P_{2m} di $2m$ lati, tale che i $2m$ vertici di P_{2m} abbiano per immagini k punti distinti di S. Allora*

$$\chi(S) = 1 + k - m$$

Dimostrazione

L'asserto segue facilmente calcolando $\chi(S, \tau)$ per la triangolazione τ indotta su S dal ricoprimento mediante triangoli di P_{2m} illustrato dalla figura seguente.

COROLLARIO

$$\chi(S^2) = 2; \quad \chi(gT) = 2 - 2g; \quad \chi(g\mathbf{P}^2) = 2 - g$$

In particolare due multitori di generi diversi non sono omeomorfi, e due multipiani proiettivi di generi diversi non sono omeomorfi.

Dimostrazione
Immediata.

Non è difficile, anche se complicato, dimostrare che i multitori sono superfici orientabili. Poiché abbiamo visto che i multipiani proiettivi sono non orientabili, segue che le superfici che compaiono nell'enunciato del teorema di classificazione sono a due a due non omeomorfe.