Corso GE5 2002/2003 (E. Sernesi)
Primo appello esame - 19/6/03

1. Classificare la superficie topologica ottenuta come quoziente del poligono etichettato corrispondente all'etichettatura:

$$aabcbdc^{-1}ed^{-1}e^{-1}$$

2. Si consideri la funzione:

$$f(z) = \frac{e^{z-1} - 1}{z^2 - 1}$$

a) Determinare il più grande aperto U di $\mathbf{C}$ in cui f è analitica.
b) Per ogni $z_0 \in \mathbf{C} \setminus U$ classificare il comportamento di $f(z)$ in z_0.
c) Determinare il comportamento di $f(z)$ all'infinito.
d) Calcolare lo sviluppo in serie di $f(z)$ in 0.

3. Sia $f \in M(\mathbf{P}^1)$ la funzione meromorfa determinata dalla funzione razionale

$$\frac{1}{4z^3 + 9z^2 - 12z + 136}$$

Determinare $R(f)$ e verificare la formula di Hurwitz.

4. Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{k \geq 1} \frac{2^k}{k!} z^k$$

5. Descrivere la struttura di superficie di Riemann su $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$.

Soluzioni

1) $5\mathbf{P}^2$

2) f è analitica in $U = \mathbf{C}\backslash\{1, -1\}$. Ha un polo di ordine 1 in $z = -1$ e una singolarità eliminabile in $z = 1$. All'∞ ha una singolarità essenziale. L'espressione più semplice dello sviluppo in serie in 0 è:

$$(1 - e^{-1}) \sum_{k \geq 0} z^{2k} - \sum_{n \geq 1} \sum_{h+k=n} (\frac{1}{k!} - 1) z^{h+2k}$$

3) f ramifica in $-2, \frac{1}{2}, \infty$ con indici $2, 2, 3$ rispettivamente. Il grado di f è 3.

4) $r = \infty$.