Diametro della suddivisione baricentrica di un simplesso

Siano $w_0, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^N$ e sia

$$\Delta := [w_0, \ldots, w_n] = \{\sum_i t_i w_i : \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

il loro inviluppo convesso. Se i w_i sono linearmente indipendenti Δ è detto un n-simplesso. Il punto

$$b = \frac{1}{n+1}(w_0 + \cdots + w_n) \in \Delta$$

è detto *baricentro* di Δ. Definiamo il *diametro* di Δ come

$$\mathrm{diam}(\Delta) = \max\{|v - w| : v, w \in \Delta\}$$

Lemma 0.1 $\mathrm{diam}(\Delta) = \max\{|w_i - w_j| : 0 \leq i, j \leq n\}$.

Dim. Se $v, w = \sum t_i w_i \in \Delta$ allora:

$$\begin{aligned} |v - w| &= |v - \sum t_i w_i| = (\sum t_i)v - \sum t_i w_i| = |\sum_i t_i(v - w_i)| \\ &\leq \sum_i t_i |v - w_i| \leq (\sum_i t_i)\max\{|v - w_i| = \max\{|v - w_i| \end{aligned}$$

Applicando lo stesso ragionamento questa volta a w_i e a $V = \sum_j s_j w_j$ si ottiene l'asserto.

La **suddivisione baricentrica** di Δ è definita, per induzione su n, come l'unione di tutti i $[b, v_1, \ldots, v_n]$, dove $[v_1, \ldots, v_n]$ appartiene alla suddivisione baricentrica di una faccia di Δ.

Proposizione 0.2 *Sia $[b, v_1, \ldots, v_n]$ appartenente alla suddivisione baricentrica di Δ. Allora:*

$$\mathrm{diam}([b, v_1, \ldots, v_n]) \leq \frac{n}{n+1}\mathrm{diam}(\Delta)$$

Dim. Per induzione su n. Se $n = 1$ si ha $\Delta = [w_0, w_1]$ e $\mathrm{diam}([b, w_i]) = \frac{1}{2}\mathrm{diam}(\Delta)$.

Supponiamo $n \geq 2$. Abbiamo:

$$\mathrm{diam}([b, v_1, \dots, v_n]) = \max\{|b - v_i|, |v_i - v_j| : 1 \leq i, j \leq n\}$$

Poiché $v_1, \dots, v_n$ appartengono a una faccia di Δ, sia essa Δ_s, abbiamo, per l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} \max\{|v_i - v_j|\} = \mathrm{diam}([v_1, \dots, v_n]) &\leq \frac{n-1}{n}\mathrm{diam}(\Delta_s) \\ &\leq \frac{n-1}{n}\mathrm{diam}(\Delta) < \frac{n}{n+1}\mathrm{diam}(\Delta) \end{aligned}$$

Per calcolare $|b - v_i|$ si presentano due casi: $v_i = w_j$ per qualche j oppure $v_i = \frac{1}{n}(w_0 + \cdots + \widehat{w}_j + \cdots + w_n)$ per qualche j, cioè v_i è il baricentro di una faccia di Δ. In questo secondo caso, ripetendo il ragionamento utilizzato per dimostrare il Lemma, deduciamo che

$$|b - v_i| \leq \max\{|b - w_k| : k \neq j\}$$

In ogni caso sarà quindi sufficiente dimostrare che $|b - w_i| \leq \frac{n}{n+1}\mathrm{diam}(\Delta)$ per ogni $i = 0, \dots n$.

Sia

$$b_i = \frac{1}{n}(w_0 + \cdots + \widehat{w}_i + \cdots + w_n)$$

il baricentro della faccia $\Delta_i = [w_o, \dots, \widehat{w}_i, \dots, w_n]$. Allora:

$$b = \frac{1}{n+1}w_i + \frac{n}{n+1}b_i$$

e quindi:

$$\begin{aligned} |b - w_i| &= \left| \frac{-n}{n+1}w_i + \frac{n}{n+1}b_i \right| \\ &= \frac{n}{n+1}|w_i - b_i| \leq \frac{n}{n+1}\mathrm{diam}(\Delta) \end{aligned}$$