GE4 - a.a. 2002/03
Secondo appello di esame - 10/2/2003

Non è consentito consultare libri né appunti. Durante la prova non si può uscire.

1. (10 punti) Sia C le curva di $\mathbf{E}^3$ parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}), \qquad t \in \mathbf{R}$$

Dimostrare che i piani osculatori affini di C nei punti $(0,0,0)$, $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ e $(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ si incontrano in un punto contenuto nel piano determinato da questi tre punti.

2. (12 punti) Sia $S \subset \mathbf{E}^3$ la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare attorno all'asse Z la curva C parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (t, 0, \log t), \quad t \in \mathbf{R}^+$$

(i) Determinare un'applicazione $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{E}^3$ che parametrizzi localmente S.
(ii) Determinare il campo di versori normali determinato da φ.
(iii) Classificare i punti di S.
(iv) In ogni punto determinare la matrice dell'operatore forma rispetto alla base indotta da φ e dedurre le direzioni principali e le curvature principali.

3. (8 punti) Sia $S \subset \mathbf{E}^3$ una superficie elementare. Definire l'applicazione di Gauss di S e l'operatore forma di S e spiegare la relazione che intercorre tra questi due oggetti.

SOLUZIONI

1) I punti considerati sono rispettivamente $\alpha(0)$, $\alpha(1)$ e $\alpha(-1)$. Il piano da essi determinato ha equazione $X - 3Z = 0$. Si ha:

$$\alpha' = (1, t, t^2), \quad \alpha'' = (0, 1, 2t), \quad \alpha' \wedge \alpha'' = (t^2, -2t, 1)$$

e quindi

$$[\alpha' \wedge \alpha''](0) = (0, 0, 1), \quad [\alpha' \wedge \alpha''](1) = (1, -2, 1) \quad [\alpha' \wedge \alpha''](-1) = (1, 2, 1)$$

Pertanto i tre piani osculatori hanno equazioni rispettivamente:

$$Z = 0, \quad X - 2Y + Z - \frac{1}{3} = 0, \quad X + 2Y + Z + \frac{1}{3} = 0$$

I 4 piani così ottenuti hanno in comune il punto $(0, -\frac{1}{6}, 0)$.

2) Si veda l'esercizio 20.4, pag. 290, di [C].