GE4 - a.a. 2002/03
Primo appello di esame - 16/1/2003

Non è consentito consultare libri né appunti. Durante la prova non si può uscire.

1. (10 punti) Sia C le curva di $\mathbf{E}^3$ parametrizzata da:

$$\alpha(t) = (sin(t), cos(t), logsin(t)) \qquad t \in (0, \pi)$$

(i) Determinare la curvatura di C in ogni punto. Determinare i punti di curvatura massima. Verificare che C non ha flessi.
(ii) Nel punto $\alpha(\frac{\pi}{2})$ calcolare il triedro di Frenet di C, ed equazioni cartesiane del piano osculatore affine e del piano normale affine.

2. (12 punti) Sia $S = \varphi(\mathbf{E}^2) \subset \mathbf{E}^3$ dove

$$\varphi(u, v) = (u, v, uv) \qquad (u, v) \in \mathbf{E}^2$$

(i) Verificare che S è una superficie.
(ii) Nel punto $P = (1, 1, 1)$ calcolare la matrice della prima forma quadratica fondamentale $\mathbf{I}(u, v)$. Calcolare l'angolo convesso formato dai vettori dalla base di $T_P(S)$ definita da φ usando $\mathbf{I}(u, v)$. Determinare un'equazione cartesiana del piano tangente affine ad S in P.
(iii) Calcolare la curvatura media e la curvatura gaussiana di S in ogni punto. Classificare i punti di S specificando se vi sono o no punti ombelicali. Determinare gli eventuali punti in cui la curvatura gaussiana assume un massimo.

3. (8 punti) Definire curvature principali e direzioni principali di una superficie elementare in un suo punto. Enunciare il teorema di Rodriguez.