

# GEOMETRIA 3

Edoardo Sernesi



# Indice

<b>1</b>	<b>Funzioni analitiche</b>	<b>5</b>
1.1	Funzioni olomorfe . . . . .	5
1.2	Serie formali . . . . .	8
1.3	Serie convergenti . . . . .	11
1.4	Operazioni sulle serie convergenti . . . . .	17
1.5	Funzioni analitiche . . . . .	21
1.6	Esempi . . . . .	25
1.7	Ordine e indice di ramificazione . . . . .	30
1.8	Zeri delle funzioni analitiche . . . . .	32
1.9	Proprietà geometriche . . . . .	34
1.10	Il principio del massimo modulo . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Integrazione complessa</b>	<b>43</b>
2.1	Curve e archi . . . . .	43
2.2	Integrazione lungo archi . . . . .	48
2.3	Il teorema di Goursat . . . . .	53
2.4	Il teorema di Cauchy . . . . .	56
2.5	La formula integrale di Cauchy . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Singolarità isolate e residui</b>	<b>67</b>
3.1	Serie di Laurent . . . . .	67
3.2	La serie di Laurent di una funzione olomorfa . . . . .	68
3.3	Singolarità isolate . . . . .	71
3.4	Il teorema dei residui . . . . .	75
3.5	Calcolo esplicito di residui . . . . .	79
3.6	Calcolo di integrali definiti . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Successioni e serie di funzioni</b>	<b>91</b>
4.1	Convergenza sui compatti . . . . .	91
4.2	Serie di funzioni meromorfe . . . . .	93
4.3	Un esempio . . . . .	95
4.4	Prodotti infiniti . . . . .	98
4.5	L'espansione di $\sin \pi z$ . . . . .	100

<b>5</b>	<b>Classificazione delle superfici topologiche</b>	<b>103</b>
5.1	Poligoni etichettati . . . . .	103
5.2	Dimostrazione del teorema 5.1.3 . . . . .	105
5.3	Triangolabilità . . . . .	110
5.4	Caratteristica di Eulero-Poincaré e triangolazioni . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Superfici di Riemann</b>	<b>115</b>
6.1	Definizioni . . . . .	115
6.2	Applicazioni olomorfe tra superfici di Riemann . . . . .	117
6.3	La formula di Riemann-Hurwitz . . . . .	122
6.4	Funzioni meromorfe sulle superfici di Riemann . . . . .	126
6.5	Le funzioni meromorfe sui tori complessi . . . . .	130
6.6	Il teorema delle funzioni implicite . . . . .	135
6.7	La superficie di Riemann di una curva algebrica piana . . . . .	138
6.8	Funzioni meromorfe sulle curve piane . . . . .	142
6.9	Divisori . . . . .	143
6.10	Funzioni meromorfe con poli limitati . . . . .	146
6.11	Il teorema di Bezout per le curve piane nonsingolari . . . . .	148
6.12	La formula di Plücker . . . . .	149
6.13	Forme differenziali olomorfe e meromorfe . . . . .	150
6.14	Serie lineari . . . . .	155
6.15	Applicazioni olomorfe di una superficie di Riemann in uno spazio proiettivo . . . . .	156
6.16	La serie lineare di un'applicazione olomorfa . . . . .	157
6.17	Proprietà delle applicazioni olomorfe . . . . .	159
6.18	Il teorema di Riemann-Roch . . . . .	161
6.19	Superfici di Riemann di genere 1 . . . . .	163

# Capitolo 1

## Funzioni analitiche

### 1.1 Funzioni olomorfe

Se  $U \subset \mathbb{C}$  è un aperto del piano complesso, ed  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione, scriveremo  $f(z)$ , oppure  $f(x + iy)$ , per denotarne il valore in un punto  $z = x + iy \in U$ . Scriveremo anche

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dove  $u$  e  $v$  sono funzioni di due variabili reali a valori reali, chiamate rispettivamente la *parte reale* e la *parte immaginaria* di  $f$ .

**Definizione 1.1.1.** *Sia  $V \subset \mathbb{C}$  un aperto,  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione, e  $a \in \bar{V}$ . Un numero complesso  $c$  si dice limite di  $\varphi$  al tendere di  $z \in V$  ad  $a$ , e si scrive:*

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = c$$

*se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta_\epsilon > 0$  tale che  $|\varphi(z) - c| < \epsilon$  per ogni  $z \in V$  tale che  $|z - a| < \delta_\epsilon$ .*

È facile verificare che questa nozione di limite gode di proprietà simili a quelle possedute dalla analoga nozione di limite di una funzione di variabile reale. In particolare, il limite di un prodotto o di una somma di funzioni è il prodotto, risp. la somma, dei limiti delle funzioni.

**Definizione 1.1.2.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto del piano complesso. Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  si dice derivabile in senso complesso, o olomorfa, in un punto  $a \in U$  se è continua in  $a$  ed esiste il*

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

che si denota  $f'(a)$  e si chiama derivata di  $f$  in  $a$ .  $f$  si dice derivabile in senso complesso o olomorfa in  $U$  se lo è in ogni punto di  $U$ . In tal caso la funzione

$$f' : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto f'(z)$$

è detta derivata di  $f(z)$ .

L'insieme delle funzioni olomorfe in un aperto  $U$  si denota  $H(U)$ . Una funzione olomorfa in tutto il piano si dice *intera*.

**Proposizione 1.1.3.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto. Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa in  $a \in U$  allora  $f$  è continua in  $a$ .*

*Dimostr.* Si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h = f'(a)0 = 0$$

perché il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti.  $\square$

Le due proposizioni che seguono si dimostrano in modo del tutto simile agli analoghi risultati validi per funzioni di variabile reale, e quindi ne omettiamo la dimostrazione.

**Proposizione 1.1.4.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto e siano  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  funzioni olomorfe in un punto  $a \in U$ . Allora*

(i)  $f + g$  è olomorfa in  $a$  e

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

(ii)  $fg$  è olomorfa in  $a$  e

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(iii) Se  $g(a) \neq 0$  allora  $f/g$  è olomorfa in  $a$  e

$$(f/g)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

**Proposizione 1.1.5.** *Siano  $U, V \subset \mathbb{C}$  aperti,  $f : U \rightarrow V$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  funzioni. Se  $f$  è olomorfa in  $z \in U$  e  $g$  è olomorfa in  $w = f(z)$ , allora  $g \circ f$  è olomorfa in  $z$  e:*

$$(g \circ f)'(z) = g'(w)f'(z)$$

**Esempio 1.1.6.** Le funzioni costanti sono oloomorfe e hanno derivata nulla in ogni punto. Inoltre:

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

se  $n > 0$  e  $z \in \mathbb{C}$ , oppure  $n < 0$  e  $z \neq 0$  (la dimostrazione si dà come nel caso di funzioni di variabile reale). Quindi, per la Proposizione 1.1.4, i polinomi sono funzioni intere; similmente le funzioni razionali, cioè le funzioni definite dal quoziente di due polinomi, sono oloomorfe in tutti i punti in cui non si annulla il denominatore.

**Esempio 1.1.7.** La funzione  $f(z) = \bar{z}$  non è oloomorfa in alcun punto di  $\mathbb{C}$ . Verifichiamolo in 0. Scrivendo  $z = x + iy \neq 0$  il rapporto incrementale è:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 1 & \text{se } y = 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e quindi non possiede limite per  $z \rightarrow 0$ . In modo simile si verifica che  $\bar{z}$  non è derivabile in alcun altro punto di  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 1.1.8.** Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto. Se una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è oloomorfa in un punto  $z_0 = x_0 + iy_0$  allora la sua parte reale  $u$  e la sua parte immaginaria  $v$  sono derivabili parzialmente nel punto  $(x_0, y_0)$  e sussistono le seguenti identità nel punto  $(x_0, y_0)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

Le (1.1) si dicono equazioni di Cauchy-Riemann.

*Dimostr.* Facendo tendere  $z \rightarrow z_0$  mantenendo la parte immaginaria costante si ottiene l'identità:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Facendo invece tendere  $z \rightarrow z_0$  mantenendo la parte reale costante si ottiene:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Quindi  $u$  e  $v$  possiedono derivate parziali in  $(x_0, y_0)$  e sussistono le (1.1).  $\square$

**Esempio 1.1.9.** La funzione  $f(z) = \bar{z} = x - iy$  ha parte reale  $u = x$  e parte immaginaria  $v = -y$ , che sono derivabili parzialmente in ogni punto. Però si ha identicamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

e quindi le (1.1) non sono verificate. Quindi, come già verificato direttamente nell'esempio 1.1.7, la funzione  $\bar{z}$  non è oloomorfa in alcun punto di  $\mathbb{C}$ .

In questo capitolo studieremo una classe di funzioni olomorfe, le funzioni analitiche. Nel successivo capitolo dimostreremo, tra l'altro, che tutte le funzioni olomorfe sono analitiche, cioè che queste due classi di funzioni coincidono.

## 1.2 Serie formali

Sia  $T$  una indeterminata. Una *serie formale di potenze* (o semplicemente una *serie formale*) nella  $T$  a coefficienti complessi è un'espressione

$$f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots$$

in cui  $a_k \in \mathbb{C}$  per ogni  $k$ . Una serie formale può anche identificarsi con la successione dei suoi coefficienti

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

$a_0$  si dice il *termine costante* della serie  $f(T)$  e si denota anche con  $f(0)$ . Se

$$f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k, \quad g(T) = \sum_{k \geq 0} b_k T^k$$

sono due serie formali, definiamo la loro *somma*  $f + g$  come

$$(f + g)(T) = \sum_{k \geq 0} c_k T^k$$

dove

$$c_k = a_k + b_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Definiamo il *prodotto*  $fg$  come:

$$(fg)(T) = \sum_{k \geq 0} d_k T^k$$

dove

$$d_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

Se  $\alpha \in \mathbb{C}$  definiamo  $\alpha f$  come

$$(\alpha f)(T) = \sum_{k \geq 0} (\alpha a_k) T^k$$

La *serie nulla* è la serie  $0(T)$  i cui coefficienti sono tutti uguali a zero.

L'insieme delle serie formali nella  $T$  a coefficienti complessi si denota con il simbolo  $\mathbb{C}[[T]]$ . Con le operazioni di somma e di prodotto che abbiamo introdotto  $\mathbb{C}[[T]]$  è un anello contenente come sottoanello l'anello dei polinomi  $\mathbb{C}[T]$ . Segue immediatamente dalla definizione che il prodotto di due serie di potenze è uguale a zero se e solo se uno almeno dei fattori è nullo; pertanto  $\mathbb{C}[[T]]$  è un dominio di integrità.



**Lemma 1.2.1.** Una serie formale  $a_0 + a_1T + a_2T^2 + \dots$  è invertibile in  $\mathbb{C}[[T]]$  se e solo se  $a_0 \neq 0$ .

*Dimostr.* Se infatti esiste  $b_0 + b_1T + b_2T^2 + \dots \in \mathbb{C}[[T]]$  tale che

$$(a_0 + a_1T + a_2T^2 + \dots)(b_0 + b_1T + b_2T^2 + \dots) = 1$$

allora  $a_0b_0 = 1$  e quindi  $a_0 \neq 0$ . Viceversa, se  $a_0 \neq 0$  l'inversa  $b_0 + b_1T + b_2T^2 + \dots$  di  $a_0 + a_1T + a_2T^2 + \dots$  è univocamente individuata dalle condizioni:

$$\begin{aligned} a_0b_0 &= 1 \\ a_1b_0 + a_0b_1 &= 0 \\ a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

che permettono di calcolare induttivamente i coefficienti  $b_0, b_1, b_2, \dots$   $\square$

Una serie formale  $\sum_{k \geq 0} a_k T^k$  può essere *derivata termine a termine* ponendo

$$\left(\sum_{k \geq 0} a_k T^k\right)' := \sum_{k \geq 1} k a_k T^{k-1}$$

La serie ottenuta iterando la derivata  $k$  volte si denota con  $f^{(k)}(T)$  e fornisce l'identità

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \quad (1.2)$$

**Esempio 1.2.2.** In  $\mathbb{C}[[T]]$  si ha

$$(1 - T)^{-1} = 1 + T + T^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} T^k$$

Per induzione su  $n$  si dimostra facilmente che, più in generale, si ha:

$$(1 - T)^{-n-1} = \sum_{k \geq 0} \binom{k+n}{n} T^k \quad (1.3)$$

per ogni  $n \geq 0$ . (Suggerimento: utilizzare l'identità

$$\binom{k+n}{n} = \sum_{j=0}^k \binom{j+n-1}{n-1}$$

che si deduce per induzione dalla:

$$\binom{n+k}{n} = \binom{n+k-1}{n} + \binom{n+k-1}{n-1}$$

(cfr. [2], p. 54.) La (1.3) può anche scriversi nella forma equivalente seguente:

$$(1 - T)^{-n-1} = \sum_{k \geq n} \binom{k}{n} T^{k-n} \quad (1.4)$$

**Esercizio.** Sia  $f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$  una serie formale. Dimostrare che si ha:

$$\frac{f(T)}{1-T} = \sum_{n \geq 0} s_n T^n$$

dove  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

Il campo dei quozienti di  $\mathbb{C}[[T]]$  si denota  $\mathbb{C}((T))$ . I suoi elementi si dicono *serie di Laurent meromorfe formali* nella indeterminata  $T$ .

**Lemma 1.2.3.** *Ogni elemento non nullo  $X \in \mathbb{C}((T))$  può essere scritto in modo unico nella forma*

$$X = T^\nu (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots) \quad \nu \in \mathbf{Z}, a_0 \neq 0$$

*Dimostr.* Sia:

$$X = \frac{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots}{c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + \dots}$$

e sia  $h \geq 0$  il più piccolo intero tale che  $c_h \neq 0$ . La serie di potenze

$$c_h + c_{h+1} T + c_{h+2} T^2 + \dots$$

è invertibile in  $\mathbb{C}[[T]]$ : sia

$$d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + \dots = (c_h + c_{h+1} T + c_{h+2} T^2 + \dots)^{-1}$$

Allora:

$$X = T^{-h} (b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots) (d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + \dots)$$

e poiché  $(b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots)(d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + \dots) \in \mathbb{C}[[T]]$  si ha

$$(b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots)(d_0 + d_1 T + d_2 T^2 + \dots) = T^k (a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots) \quad a_0 \neq 0$$

per qualche  $k \geq 0$ , la conclusione segue con  $\nu = k - h$ .  $\square$

L'intero  $\nu$  si chiama *ordine* della serie di Laurent  $X$ , e si denota  $o(X)$ . Porremo  $o(0) = \infty$ . Otteniamo in questo modo un'applicazione:

$$o : \mathbb{C}((T)) \rightarrow \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$$

che possiede le seguenti proprietà, di immediata verifica. Per ogni  $X, Y \in \mathbb{C}((T))$  si ha:

- $o(XY) = o(X) + o(Y)$
- $o(X \pm Y) \geq \min(o(X), o(Y))$  e vale l'uguaglianza se  $o(X) \neq o(Y)$ .
- $X \in \mathbb{C}[[T]]$  se e solo se  $o(X) \geq 0$ .

In particolare, per ogni  $X \neq 0$  si ha  $o(X^{-1}) = -o(X)$ . Dal lemma segue che ogni elemento  $X \in \mathbb{C}((T))$  si può scrivere in modo unico come una serie di potenze in  $T$  a esponenti in  $\mathbf{Z}$  avente solo un numero finito di termini con esponente negativo, cioè nella forma:

$$X = a_{-m}T^{-m} + \cdots + a_{-1}T^{-1} + P \quad a_{-m} \neq 0$$

dove

$$P = \sum_{k \geq 0} a_k T^k \in \mathbb{C}[[T]]$$

L'espressione  $a_{-m}T^{-m} + \cdots + a_{-1}T^{-1}$  si chiama *parte principale* di  $X$ .

Siano  $f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$ ,  $h(T) = \sum_{j \geq 1} b_j T^j$  due serie formali, con  $o(h) \geq 1$ . Allora è ben definita la serie formale  $f(h(T))$ , che si dice *composizione di  $f$  ed  $h$* , ottenuta per sostituzione di  $h$  in  $f$ , cioè ponendo:

$$f(h(T)) = \sum_{k \geq 0} a_k h(T)^k = \sum_{k \geq 0} a_k \left( \sum_{j \geq 1} b_j T^j \right)^k$$

Infatti per ogni  $k \geq 0$  si ha  $o(h(T)^k) \geq k$ , e quindi il coefficiente di  $T^k$  in  $f(h(T))$  è ben definito come somma di un numero finito di termini, per ogni  $k \geq 0$ . La serie  $f(h(T))$  si denota anche  $(f \circ h)(T)$ . È immediato che il suo ordine è

$$o(f \circ h) = o(f) o(h)$$

Si ha anche l'identità:

$$f(h(T))' = f'(h(T))h'(T) \quad (1.5)$$

la cui verifica è lasciata come esercizio.

### 1.3 Serie convergenti

*Convergenza di serie di numeri complessi.* Sia  $\{\alpha_k\}$  una successione di numeri complessi, e consideriamo la serie

$$\sum_{k \geq 0} \alpha_k$$

Definiamo la somma parziale

$$s_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$$

Diremo che la serie *converge* se esiste  $w \in \mathbb{C}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = w$$

In tal caso diremo che  $w$  è la *somma della serie* e scriveremo:

$$w = \sum_{k \geq 0} \alpha_k$$

Se  $A = \sum_{k \geq 0} \alpha_k$  e  $B = \sum_{k \geq 0} \beta_k$  sono due serie convergenti allora la loro somma ed il loro prodotto sono serie convergenti. Precisamente, detta

$$t_n = \sum_{k=0}^n \beta_k$$

la somma parziale della serie  $B$ ,  $A \pm B$  ha per somma il  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \pm t_n$ , mentre  $AB = \left( \sum_{k \geq 0} \alpha_k \right) \left( \sum_{k \geq 0} \beta_k \right)$  ha per somma il  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n t_n$  ([2], p. 63-64).

Sia  $\sum_{k \geq 0} \alpha_k$  una serie di numeri complessi. Diremo che la serie *converge assolutamente* se la serie a termini reali nonnegativi  $\sum_{k \geq 0} |\alpha_k|$  converge.

**Lemma 1.3.1.** *Se una serie converge assolutamente allora converge.*

*Dimostr.* Per ogni  $m \leq n$  si ha:

$$s_n - s_m = \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n$$

e quindi:

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |\alpha_k|$$

Dall'assoluta convergenza segue che dato  $\epsilon > 0$  esiste  $N$  tale che  $\sum_{k=m+1}^n |\alpha_k| < \epsilon$  se  $m, n \geq N$ : ciò dimostra che la successione  $\{s_n\}$  delle somme parziali è di Cauchy nello spazio metrico  $\mathbb{C}$ , e quindi converge ([2], p.112).  $\square$

Si noti che se  $\sum_{k \geq 0} \alpha_k$  converge allora  $\lim \alpha_k = 0$ : infatti  $\alpha_k = s_k - s_{k-1}$  e  $\{s_k\}$  è una successione di Cauchy.

Nel seguito utilizzeremo liberamente i seguenti fatti elementari riguardanti l'assoluta convergenza, per la cui dimostrazione si rinvia a [2]:

- (i) (Criterio del confronto) Sia  $\sum_{k \geq 0} r_k$  una serie convergente di numeri reali nonnegativi. Se  $\sum_{k \geq 0} \alpha_k$  è una serie di numeri complessi tale che  $|\alpha_k| \leq r_k$  per ogni  $k$  allora la serie  $\sum \alpha_k$  converge assolutamente ([2], p.71).
- (ii) Se una serie di numeri complessi  $\sum_{k \geq 0} \alpha_k$  è assolutamente convergente, allora ogni serie ottenuta riordinando i suoi termini converge assolutamente allo stesso limite ([2], p.107).
- (iii) Se una serie doppia

$$\sum_{k \geq 0} \left( \sum_{h \geq 0} \alpha_{hk} \right)$$

converge assolutamente, allora la serie ottenuta scambiando l'ordine di sommazione converge assolutamente allo stesso limite.

**Definizione 1.3.2.** *Una serie della forma  $\sum_{k \geq 0} ar^k$ ,  $a, r \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ , è detta una serie geometrica.*

**Proposizione 1.3.3.** *Una serie geometrica converge se e solo se  $|r| < 1$ . Nel caso convergente si ha:*

$$\sum_{k \geq 0} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

*Dimostr.* (si veda anche [2], p.113) Se  $|r| = 1$  la serie evidentemente non converge. Supponiamo quindi  $|r| \neq 1$ . Si ha

$$s_{n-1} = a + ar + \dots + ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Se  $|r| < 1$  allora  $\lim r^n = 0$  e quindi  $\lim s_{n-1} = \frac{a}{1-r}$  e la serie converge. D'altra parte se  $|r| > 1$  allora  $ar^n$  non tende a 0 e quindi la serie non converge.  $\square$

I seguenti criteri di convergenza sono utilizzati frequentemente.

**Teorema 1.3.4** (Criterio della radice). *Sia  $\{a_k\}$  una successione di numeri reali non negativi. Se esistono un numero  $c$ , con  $0 < c < 1$ , e un intero  $k_0$  tali che*

$$(a_k)^{\frac{1}{k}} \leq c$$

*per ogni  $k \geq k_0$ , allora la serie  $\sum a_k$  è convergente.*

*Dimostr.* [2], p. 97.  $\square$

**Teorema 1.3.5** (Criterio del rapporto). *Sia  $\{a_k\}$  una successione di numeri reali positivi. Se esistono un numero  $c$ , con  $0 < c < 1$  e un intero  $k_0$  tali che*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq c$$

*per ogni  $k \geq k_0$ , allora la serie  $\sum a_k$  è convergente.*

*Dimostr.* [2], p. 97.  $\square$

*Convergenza di successioni di funzioni.* Sia  $S$  un insieme ed  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione limitata. Definiamo la *norma del sup* di  $f$  come:

$$\|f\|_S = \|f\| = \sup_{s \in S} |f(s)|$$

Segue immediatamente dalla definizione che, date comunque due funzioni limitate  $f, g : S \rightarrow \mathbb{C}$  e  $c \in \mathbb{C}$ , si ha  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  e  $\|cf\| = |c| \|f\|$ .

Sia  $\{f_n : S \rightarrow \mathbb{C}\}$  una successione di funzioni limitate. Diremo che questa successione *converge uniformemente in  $S$*  se esiste una funzione limitata  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  con le seguenti proprietà: dato comunque  $\epsilon > 0$  esiste  $N > 0$  tale che

$$\|f_n - f\| < \epsilon$$

se  $n \geq N$ . Si osservi che, anche senza supporre  $f$  limitata, se  $\|f_n - f\|$  è ben definita segue che  $f$  è limitata.

Diremo che  $\{f_n\}$  è una successione di Cauchy se dato comunque  $\epsilon > 0$  esiste  $N > 0$  tale che

$$\|f_n - f_m\| < \epsilon$$

se  $m, n \geq N$ .

Si osservi che, se  $\{f_n\}$  è una successione di Cauchy, allora per ogni  $s \in S$  la successione di numeri complessi  $\{f_n(s)\}$  soddisfa:

$$|f_n(s) - f_m(s)| \leq \|f_n - f_m\| \quad \forall n, m$$

e quindi è una successione di Cauchy e pertanto converge.

**Teorema 1.3.6.** *Se una successione  $\{f_n\}$  di funzioni limitate su  $S$  è di Cauchy allora converge uniformemente in  $S$ .*

*Dimostr.* Per ogni  $s \in S$  poniamo

$$f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s)$$

Dato  $\epsilon > 0$  esiste  $N > 0$  tale che

$$|f_n(s) - f_m(s)| < \epsilon \quad \forall s \in S$$

se  $n, m \geq N$ . Sia  $n \geq N$ . Dato  $s \in S$  sia  $m \geq N$  (dipendente da  $s$ ) tale che

$$|f(s) - f_m(s)| < \epsilon$$

Allora:

$$\begin{aligned} |f(s) - f_n(s)| &\leq |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_n(s)| < \\ &< \epsilon + \|f_m - f_n\| < 2\epsilon \end{aligned}$$

Poiché ciò è vero per ogni  $s \in S$  segue che

$$\|f - f_n\| < 2\epsilon$$

e ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

*Convergenza di serie di funzioni.* Consideriamo una serie  $\sum f_k$  di funzioni limitate su  $S$ , e sia

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k$$

la somma parziale  $n$ -esima. Diremo che la serie *converge uniformemente in  $S$*  se la successione delle somme parziali  $\{s_n\}$  converge uniformemente in  $S$ . Diremo che la serie  $\sum f_k$  *converge assolutamente in  $s \in S$*  se la serie numerica

$$\sum |f_k(s)|$$

converge. Diremo che  $\sum f_k$  *converge assolutamente in  $S$*  se converge assolutamente in ogni  $s \in S$ .

**Teorema 1.3.7** (Criterio del confronto). *Sia  $\{c_k\}$  una successione di numeri reali nonnegativi tale che la serie  $\sum c_k$  converga. Sia  $\{f_k\}$  una successione di funzioni limitate su  $S$  tali che  $\|f_k\| \leq c_k$  per ogni  $k$ . Allora la serie  $\sum f_k$  converge uniformemente e assolutamente in  $S$ .*

*Dimostr.* Siano  $m \leq n$ . Allora le somme parziali soddisfano:

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|f_k\| \leq \sum_{k=m+1}^n c_k$$

L'ipotesi sulla convergenza di  $\sum c_k$  implica che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $N > 0$  tale che  $\sum_{n+1}^m c_k < \epsilon$  per ogni  $n, m > N$ . La disuguaglianza precedente implica quindi che la successione delle somme parziali  $\{s_n\}$  è di Cauchy, e quindi l'uniforme convergenza della successione delle somme parziali segue. Lo stesso ragionamento dimostra anche la convergenza assoluta.  $\square$

La dimostrazione del risultato seguente è lasciata come esercizio:

**Teorema 1.3.8.** *Sia  $S \subset \mathbb{C}$  e sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni continue e limitate su  $S$ . Se la successione converge uniformemente in  $S$  allora la funzione limite  $f$  è continua in  $S$ .*

*Convergenza di serie di potenze.* I risultati precedenti verranno applicati allo studio della convergenza di serie di potenze, prendendo  $f_k(z) = a_k z^k$ , con  $a_k \in \mathbb{C}$ . Denoteremo indifferente con  $D(a, r)$  oppure  $D_a(r)$  il disco aperto di centro  $a \in \mathbb{C}$  e raggio  $r > 0$ .

**Teorema 1.3.9.** *Sia  $\{a_k\}$  una successione di numeri complessi, e sia  $r > 0$  tale che la serie*

$$\sum_{k \geq 0} |a_k| r^k$$

*converga. Allora la serie  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  converge assolutamente e uniformemente nel disco chiuso  $\overline{D(0, r)}$ .*

*Dimostr.* È un caso particolare del criterio del confronto (Teorema 1.3.7).  $\square$

**Teorema 1.3.10.** *Sia  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  una serie di potenze. Se la serie non converge assolutamente per qualche  $w \in \mathbb{C}$  allora esiste un numero reale  $r \geq 0$  tale che la serie converge assolutamente per  $|z| < r$  e non converge assolutamente per  $|z| > r$ .*

*Dimostr.* Sia  $r$  l'estremo superiore dei numeri reali  $s \geq 0$  tali che  $\sum |a_k| s^k$  converge. Allora per ipotesi  $r < \infty$  e  $\sum |a_k| |z|^k$  diverge se  $|z| > r$ , e converge se  $|z| < r$ , per il criterio del confronto.  $\square$

Il numero  $r$  del teorema 1.3.10 è chiamato *raggio di convergenza* della serie di potenze  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ . Se la serie converge assolutamente per ogni  $z \in \mathbb{C}$  allora diremo che ha *raggio di convergenza infinito*. Quando il raggio di convergenza è 0 la serie converge assolutamente solo per  $z = 0$ .

Se la serie ha raggio di convergenza  $r > 0$  si dirà una *serie convergente*. Il disco aperto  $D(0, r)$  di centro l'origine e raggio  $r$  è detto *disco di convergenza* della serie. Più in generale se  $D$  è un disco aperto di centro l'origine e di raggio  $\rho \leq r$ , diremo che la serie *converge in  $D$* .

**Teorema 1.3.11.** Sia  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  una serie di potenze, e sia

$$t = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

Allora il suo raggio di convergenza è

$$r = \frac{1}{t}$$

*Dimostr.* Dimosteremo il teorema nel caso  $r \neq 0, \infty$ . Il caso in cui  $t = 0$  oppure  $t = \infty$  si dimostra in modo simile ed è lasciato come esercizio. Dall'ipotesi segue che  $|a_k| \leq t^k$  per  $k \gg 0$ . Quindi, se  $|z| < \frac{1}{t}$ , posto  $c = t|z|$ , si ha  $0 < c < 1$  e

$$|a_k z^k| < c^k$$

e quindi  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  converge assolutamente per confronto con la serie geometrica  $\sum c^k$ . Quindi  $r \geq \frac{1}{t}$ .

D'altra parte, dato  $\epsilon > 0$ , esistono infiniti  $k$  tali che  $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq t - \epsilon$ . Pertanto per ogni siffatto  $k$  si ha  $|a_k z^k| \geq 1$  se  $|z| = \frac{1}{t - \epsilon}$  e quindi  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  non converge assolutamente. Ne consegue che si ha anche  $r \leq \frac{1}{t - \epsilon}$  per ogni  $\epsilon > 0$  e quindi  $r \leq \frac{1}{t}$ .  $\square$

**Osservazione 1.3.12.** Con le notazioni introdotte nel corso della dimostrazione del Teorema 1.3.10, osserviamo che, per ogni  $0 < s < r$ , detto  $C = s/r$ , si ha:

$$|a_k| \leq \frac{C^k}{s^k} \leq \frac{C}{s^k}$$

Il seguente corollario è immediato.

**Corollario 1.3.13.** Se  $\lim |a_k|^{\frac{1}{k}} = t$  esiste, allora la serie  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  ha raggio di convergenza  $r = \frac{1}{t}$ .

**Corollario 1.3.14.** Si supponga che la serie  $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$  abbia raggio di convergenza  $r > 0$ . Allora esiste un numero reale  $A > 0$  tale che

$$|a_k| \leq A^k$$

per ogni  $k$ .

*Dimostr.* Prendiamo Sia  $t = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$ . Allora

$$|a_k| \leq t^k$$

per ogni  $k$  eccettuato al più un numero finito. Allora è possibile sostituire  $t$  con un  $A > 0$  in modo che la disuguaglianza sia verificata per tutti i  $k$ .  $\square$

**Esempio 1.3.15.** Il teorema 1.3.10 non dice cosa accade se  $|z| = r$ . Ad esempio la serie

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n^2}$$



ha raggio di convergenza 1. Per ogni  $c$  tale che  $|c| = 1$  la serie dei moduli di  $f(c)$  è la serie convergente  $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ , e quindi, per il criterio del confronto,  $f(c)$  converge per ogni  $c$  tale che  $|c| = 1$ .

D'altra parte anche la serie  $g(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$  ha raggio di convergenza 1; ma  $g(c)$  non converge per ogni  $c$  tale che  $|c| = 1$  perché  $|c^n| = 1$  e quindi  $c^n$  non tende a 0. Però per ogni  $z$  nel disco aperto  $D(0, 1)$  la funzione somma di  $g(z)$  coincide con  $\frac{1}{1-z}$  (ciò segue dalla Proposizione 1.4.1 che dimostreremo tra poco) e quindi, al tendere di  $z$  verso un qualsiasi  $c \neq 1$  tale che  $|c| = 1$  il valore di  $g(z)$  tende al valore finito  $(1-c)^{-1}$ . Ciò è compatibile con i risultati che abbiamo dimostrato i quali danno informazioni solo sulla convergenza all'interno del disco di convergenza.

Consideriamo ora la serie

$$h(z) = \sum_{k \geq 1} z^{2^k}$$

che ha raggio di convergenza 1. Detta

$$s_n = \sum_{k=1}^n z^{2^k}$$

la somma parziale  $n$ -esima, si ha

$$\lim_{x \text{ reale} \rightarrow 1} s_n(x) = n$$

e quindi

$$\lim_{x \text{ reale} \rightarrow 1} h(x) = \infty$$

perché per ogni  $n > 0$  esiste  $\delta_n > 0$  tale che per  $x > 1 - \delta$  si ha  $s_n(x) > n - 1$  e quindi  $h(x) > n - 1$ . D'altra parte  $h(z) = z^2 + fh(z^2)$  e quindi

$$\lim_{x \text{ reale} \rightarrow -1} h(x) = \infty$$

Analogamente, avendosi

$$h(z) = z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + h(z^{2^n})$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow \xi} h(x) = \infty$$

se  $\xi$  è una radice  $2n$ -esima di 1. Poiché le radici  $2n$ -esime dell'unità sono dense in  $S^1$  la funzione  $h$  somma della serie non si estende a nessun punto di  $\partial D_0(1) = S^1$ .

## 1.4 Operazioni sulle serie convergenti

In questo paragrafo verificheremo che se si eseguono le operazioni definite per le serie formali (somma, prodotto, moltiplicazione per uno scalare, inversa, derivata termine a termine) su serie di potenze convergenti, si ottengono ancora serie convergenti.

**Proposizione 1.4.1.** *Siano  $f = f(T)$  e  $g = g(T)$  serie di potenze convergenti in un disco aperto  $D_r(0)$ , allora anche  $f + g$  e  $fg$  sono convergenti nello stesso disco, e se  $\alpha \in \mathbb{C}$ , allora  $\alpha f$  converge in  $D(0, r)$ . Inoltre per ogni  $z \in D(0, r)$  si ha:*

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z), \quad (fg)(z) = f(z)g(z), \quad (\alpha f)(z) = \alpha f(z)$$

*Dimostr.* Diamo la dimostrazione nel caso del prodotto. Siano  $f = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$ ,  $g = \sum_{k \geq 0} b_k T^k$ , e quindi

$$fg = \sum_{k \geq 0} c_k T^k, \quad \text{dove } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

Sia  $0 < s < r$ . Poiché sia  $f$  che  $g$  hanno raggio di convergenza  $\geq r$ , per il criterio della radice esiste un numero positivo  $C$  tale che

$$|a_k| \leq \frac{C}{s^k}, \quad \text{e } |b_k| \leq \frac{C}{s^k}$$

per ogni  $k$ . Quindi:

$$|c_k| \leq \sum_{i=0}^k |a_i| |b_{k-i}| \leq \sum_{i=0}^k \frac{C}{s^i} \frac{C}{s^{k-i}} = (k+1) \frac{C^2}{s^k}$$

Segue che:

$$|c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{(k+1)^{\frac{1}{k}} C^{\frac{2}{k}}}{s}$$

Ma poiché  $\lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)^{\frac{1}{k}} C^{\frac{2}{k}} = 1$ , segue che

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{s}$$

Poiché ciò è vero per ogni  $0 < s < r$  segue che  $\limsup |c_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{r}$ , e quindi la serie  $fg$  converge nel disco  $D(0, r)$ .

Si osservi che abbiamo anche dimostrato che la serie a termini reali positivi

$$\sum_{k \geq 0} \left( \sum_{i=0}^k |a_i| |b_{k-i}| \right) |z^k|$$

converge per ogni  $z \in D(0, r)$ .

Siano

$$f_N(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_N T^N$$

e

$$g_N(T) = b_0 + b_1 T + \cdots + b_N T^N$$

i polinomi ottenuti per troncatura delle serie  $f$  e  $g$ . Allora, per ogni  $z \in D(0, r)$  si ha:

$$f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(z), \quad g(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(z)$$

Inoltre:

$$|(fg)(z) - f_N(z)g_N(z)| \leq \sum_{k \geq N+1} \left( \sum_{i=0}^k |a_i| |b_{k-i}| \right) |z|^k$$

ed il secondo membro tende a 0 al tendere di  $N \rightarrow \infty$ . Pertanto:

$$f(z)g(z) = \lim_N f_N(z)g_N(z) = (fg)(z)$$

e ciò conclude la dimostrazione nel caso del prodotto.

Gli altri casi sono più semplici e vengono lasciati come esercizio.  $\square$

Denotiamo con  $\mathbb{C}\{\{T\}\}$  il sottoinsieme di  $\mathbb{C}[[T]]$  costituito dalle serie aventi raggio di convergenza positivo. Dalla proposizione precedente segue che  $\mathbb{C}\{\{T\}\}$  è un sottoanello di  $\mathbb{C}[[T]]$ , che si chiama *anello delle serie convergenti*. Si hanno ovvie inclusioni che sono omomorfismi di anelli:

$$\mathbb{C}[T] \subset \mathbb{C}\{\{T\}\} \subset \mathbb{C}[[T]]$$

**Teorema 1.4.2.** *Supponiamo che  $f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$  e  $h(T) = \sum_{j \geq 1} b_j T^j$  siano serie di potenze con  $o(h) > 0$ , aventi raggio di convergenza positivo. Allora la serie*

$$g(T) := f(h(T))$$

*ha raggio di convergenza positivo. Sia  $r > 0$  tale che  $f$  converga nel disco  $D(0, r)$ , ed  $s > 0$  sia tale che*

$$\sum_{k \geq 1} |b_k| s^k < r$$

*Allora  $g$  converge nel disco  $D(0, s)$ , e per ogni  $z \in D(0, s)$  si ha:*

$$g(z) = f(h(z))$$

*Dimostr.* Ogni coefficiente della serie  $g(T)$  è dominato in modulo dal corrispondente coefficiente della serie

$$(1) \quad \sum_{k \geq 0} |a_k| \left( \sum_{j \geq 1} |b_j| |T^j| \right)^k$$

e per ipotesi questa serie converge assolutamente per  $|T| < s$ . Quindi  $g(z)$  converge assolutamente per  $|z| < s$ .

Poniamo

$$f_N(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_N T^N$$

Allora ogni coefficiente della serie  $g(T) - f_N(h(T))$  è dominato in modulo dal corrispondente coefficiente della serie:

$$\sum_{k>N} |a_k| \left( \sum_{j \geq 1} |b_j| T^j \right)^k$$

Dalla convergenza assoluta della serie (1) deduciamo che, dato  $\epsilon > 0$ , esiste  $N_0$  tale che per ogni  $N \geq N_0$  e  $|z| \leq s$  si abbia:

$$|g(z) - f_N(h(z))| < \epsilon$$

Poiché la successione di polinomi  $\{f_N(z)\}$  converge uniformemente alla funzione  $f(z)$  nel disco chiuso di raggio  $r$ , possiamo scegliere  $N_0$  sufficientemente grande in modo che per  $N \geq N_0$  si abbia

$$|f_N(h(z)) - f(h(z))| < \epsilon$$

e con ciò si dimostra che

$$|g(z) - f(h(z))| < 2\epsilon$$

per ogni  $\epsilon > 0$ , e quindi  $g(z) - f(h(z)) = 0$ . □

**Proposizione 1.4.3.** *Sia  $f$  una serie di potenze a raggio di convergenza positivo con  $o(f) = 0$ . Allora anche la serie  $g$  tale che  $fg = 1$  ha raggio di convergenza positivo.*

*Dimostr.* Non è restrittivo supporre che  $f$  abbia termine costante uguale a 1, salvo sostituire  $f$  con  $a_0^{-1}f$ . Quindi:

$$f(T) = 1 + a_1T + a_2T^2 + \dots = 1 - h(T)$$

dove

$$h(T) = -a_1T - a_2T^2 - \dots$$

e  $o(h) \geq 1$ . Si ha:

$$g(T) = \frac{1}{1 - h(T)} = 1 + h(T) + h(T)^2 + \dots = u(h(T))$$

dove  $u(T) = \sum_{k \geq 0} T^k$ . Poiché  $u(T)$  ha raggio di convergenza uguale a 1, segue che  $u(h(T))$  ha raggio di convergenza positivo. □

La serie  $g(T)$  dell'enunciato precedente si denota con  $f(T)^{-1}$ . Il seguente corollario è immediato.

**Corollario 1.4.4.** *Se  $f(T)$  e  $\varphi(T)$  sono serie aventi raggio di convergenza positivo e  $o(\varphi) = 0$ , allora  $f(T)\varphi(T)^{-1}$  è una serie a raggio di convergenza positivo.*

**Proposizione 1.4.5.** Sia  $f(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k$  una serie avente raggio di convergenza  $r > 0$ . Allora la serie

$$f'(T) = \sum_{k \geq 1} k a_k T^{k-1}$$

ottenuta derivando  $f$  termine a termine (la serie derivata di  $f$ ) ha raggio di convergenza  $r$ .

*Dimostr.* Si ha

$$\limsup |k a_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |k|^{\frac{1}{k}} \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{r}$$

e quindi la serie

$$\sum_{k \geq 1} k a_k T^k = T f'(T)$$

ha raggio di convergenza uguale a  $r$ . La conclusione segue.  $\square$

## 1.5 Funzioni analitiche

Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto. Una funzione

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

si dice *analitica in un punto*  $z_0 \in U$  se esiste una serie di potenze

$$\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$$

che converge assolutamente per  $|z - z_0| < r$  per qualche  $r > 0$ , e tale che si abbia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$$

per ogni  $z \in U$  siffatto.  $f$  si dice *analitica in  $U$*  se lo è in ogni punto di  $U$ .

Se  $f$  è analitica in  $z_0$  diremo anche che  $f$  ha un'espansione (o uno sviluppo) in serie di potenze in  $z_0$ . Un punto  $z_0$  tale che  $f(z_0) = 0$  si dice uno zero di  $f$ .

**Teorema 1.5.1.** Se  $f$  è analitica in un aperto  $U$  allora  $f$  è continua in  $U$ .

*Dimostr.* Segue facilmente dal teorema 1.3.8. Diamo comunque una dimostrazione diretta del teorema.

Sia  $a \in U$  ed  $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$  in un disco aperto  $D(a, r)$  di centro  $a$  e raggio  $r > 0$ ; sia  $f(a) = b$ . Non è restrittivo supporre  $a = 0 = b$ . Quindi:

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^k = z \sum_{k \geq 1} a_k z^{k-1}$$

Se  $|z| < r$  la serie  $\sum_{k \geq 1} a_k z^k$  converge assolutamente. Pertanto, se  $0 < \rho < r$  e  $|z| < \rho$  si ha:

$$|f(z)| \leq \sum_{k \geq 1} |a_k| |z|^k \leq |z| \sum_{k \geq 1} |a_k| |z|^{k-1} \leq |z| \sum_{k \geq 1} |a_k| \rho^{k-1}$$

e quindi  $|f(z)|$  tende a 0 al tendere di  $|z|$  a 0.  $\square$

Sono funzioni analitiche in tutto il piano i polinomi (in particolare le funzioni lineari, cioè della forma  $f(z) = az + b$ ), la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, che verranno introdotte tra poco.

**Proposizione 1.5.2. (i)** *Sia  $U$  un aperto del piano complesso. Se  $f, g$  sono analitiche in  $U$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , allora  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\alpha f$  sono analitiche in  $U$ . Inoltre  $\frac{f}{g}$  è definita ed analitica in ogni aperto contenuto nel sottoinsieme degli  $z \in U$  tali che  $g(z) \neq 0$ .*

**(ii)** *Se  $V \subset \mathbb{C}$  è un aperto e  $h : V \rightarrow U$  ed  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  sono analitiche, allora  $f \circ h$  è analitica in  $V$ .*

*Dimostr.* (i) segue immediatamente dalle proprietà di convergenza dimostrate per le serie di potenze nel §1.4.

(ii) Se  $z_0 \in V$  e  $h(z_0) = w_0$ , allora:

$$h(z) = w_0 + \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k$$

e quindi la funzione  $h(z) - w_0$  è rappresentata in un intorno di  $z_0$  da una serie priva di termine costante. Se

$$f(w) = \sum_{n \geq 0} a_n (w - w_0)^n$$

in un intorno di  $w_0$  allora applicando il teorema 1.4.2 possiamo sostituire la serie  $h(z) - w_0 = \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k$  al posto di  $w - w_0$  e ottenere:

$$f(h(z)) = \sum_{n \geq 0} a_n \left( \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k \right)^n$$

che è uno sviluppo in serie di  $f \circ h$  in un intorno di  $z_0$ .  $\square$

Dalla proposition 1.5.2 segue in particolare che una funzione razionale  $\frac{P(z)}{Q(z)}$ , dove  $P, Q \in \mathbb{C}[z]$  e  $Q \neq 0$ , è ben definita ed analitica in tutti i punti di  $z \in \mathbb{C}$  in cui  $Q(z) \neq 0$ .

La seguente proposition ci dice che sono analitiche le funzioni definite da serie di potenze.

**Proposizione 1.5.3.** *Sia  $a \in \mathbb{C}$  e  $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$  una serie di potenze convergente assolutamente nel disco aperto  $D(a, r)$  per qualche  $r > 0$ . Allora la funzione  $f : D(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$  definita dalla serie è analitica.*

*Dimostr.* Non è restrittivo supporre  $a = 0$ , e quindi che si abbia  $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$  in  $D(0, r)$ . Sia  $z_0 \in D(0, r)$ , e sia  $s > 0$  tale che  $|z_0| + s < r$ . Scriviamo

$$z = z_0 + (z - z_0)$$

e quindi:

$$z^k = [z_0 + (z - z_0)]^k$$

Possiamo pertanto riscrivere:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k \left[ \sum_{j \geq 0} \binom{k}{j} z_0^{k-j} (z - z_0)^j \right]$$

Se  $|z - z_0| < s$  allora  $|z_0| + |z - z_0| < r$  e quindi la serie

$$\sum_{k \geq 0} |a_k| [|z_0| + |z - z_0|]^k = \sum_{k \geq 0} |a_k| \left[ \sum_{j \geq 0} \binom{k}{j} |z_0|^{k-j} |z - z_0|^j \right]$$

converge. Scambiando l'ordine di sommatoria otteniamo che la serie:

$$\sum_{j \geq 0} \left[ \sum_{k \geq j} a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j} \right] (z - z_0)^j$$

converge assolutamente ad  $f(z)$  per  $|z - z_0| < s$ .  $\square$

**Teorema 1.5.4.** *Se  $f$  è analitica in  $U$  allora  $f$  è olomorfa in  $U$  e la sua derivata  $f'$  è una funzione analitica in  $U$ .*

*Dimostr.* La tesi da dimostrare è locale, cioè è sufficiente dimostrare che vale in qualsiasi punto  $a \in U$ . Non è restrittivo supporre  $a = 0$ . Sia  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  in un disco aperto  $D(0, r)$ ,  $r > 0$ . Sia  $z$  tale che  $|z| < r$  e sia  $\delta > 0$  tale che  $|z| + \delta < r$ . Per ogni numero complesso  $h$  tale che  $|h| < \delta$  abbiamo:

$$\begin{aligned} f(z+h) &= \sum_{n \geq 0} a_n (z+h)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n (z^n + n z^{n-1} h + h^2 P_n(z, h)) \end{aligned}$$

dove  $P_n(z, h)$  è un polinomio in  $z$  e  $h$ , a coefficienti interi positivi; precisamente:

$$P_n(z, h) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k}$$

In particolare la seguente stima è soddisfatta:

$$|P_n(z, h)| \leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \delta^{k-2} |z|^{n-k} = P_n(|z|, \delta)$$

Possiamo scrivere:

$$f(z+h) - f(z) - \sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1} h = h^2 \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z, h)$$

dove la serie a secondo membro è assolutamente convergente perché lo è quella a primo membro. Dividendo per  $h$  otteniamo:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1} = h \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z, h)$$

Per  $|h| < \delta$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z, h) \right| &\leq \sum_{n \geq 2} |a_n| |P_n(z, h)| \\ &\leq \sum_{n \geq 2} |a_n| P_n(|z|, \delta) \end{aligned}$$

dove l'ultima espressione non dipende da  $h$ . Quindi:

$$\left| h \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z, h) \right| \leq |h| \sum_{n \geq 2} |a_n| P_n(|z|, \delta)$$

Al tendere di  $h$  a 0 il secondo membro tende a 0, e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| h \sum_{n \geq 2} a_n P_n(z, h) \right| = 0$$

Ciò dimostra che la funzione  $f$  è olomorfa in 0, e che la sua derivata coincide con la somma della serie  $\sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1}$ , che ha lo stesso raggio di convergenza di  $f$ , per la Proposizione 1.4.5.  $\square$

**Osservazione 1.5.5.** Usando il teorema integrale di Cauchy dimostreremo nel Cap. 2 che, viceversa, ogni funzione olomorfa è analitica.

Il seguente corollario dicende immediatamente dal teorema:

**Corollario 1.5.6.** *Se  $f$  è analitica in un aperto  $U$  allora  $f$  possiede derivate di ogni ordine che sono funzioni analitiche in  $U$ .*

Supponiamo che la funzione  $f(z)$  sia analitica in un intorno di  $a \in \mathbb{C}$  e che in  $a$  si abbia:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$$

Allora dalla dimostrazione del teorema (4.5) segue che la derivata  $n$ -esima di  $f$  si esprime in un intorno di  $a$  come:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq n} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (z-a)^{k-n}$$



In particolare si ha:

$$f^{(n)}(a) = n!a_n$$

e quindi per ogni  $n$ :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (1.6)$$

In particolare la successione dei coefficienti  $\{a_k\}$  è univocamente determinata da  $f$  e da  $a$ .

**Definizione 1.5.7.** *Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione sull'aperto  $U$  a valori complessi. Una primitiva per  $f$  è una funzione  $g$  olomorfa in  $U$  e tale che  $g'(z) = f(z)$  per ogni  $z \in U$ .*

È ovvio che una primitiva, se esiste, è determinata a meno di una costante additiva.

**Proposizione 1.5.8.** *Sia  $f$  una funzione analitica che ha uno sviluppo in serie in un disco  $D(a, r)$ . Allora  $f$  possiede una primitiva in  $D(a, r)$  che è analitica.*

*Dimostr.* Supponiamo che si abbia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$$

in  $D(a, r)$ . Allora la serie

$$\sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} (z - a)^{k+1} \quad (1.7)$$

converge nel disco  $D(a, r)$  perché i suoi coefficienti sono maggiorati in modulo dai coefficienti della serie  $f(z)$ . Inoltre, detta  $g(z)$  la funzione somma della serie (1.7), si ha  $g'(z) = f(z)$ . Quindi  $g$  è una primitiva di  $f$  in  $D(a, r)$ . Per la Proposizione 1.5.8  $g$  è analitica in  $D(a, r)$ .  $\square$

**Osservazione 1.5.9.** Se  $f$  è analitica in un aperto  $U$  di  $\mathbb{C}$ , la Proposizione 1.5.8 implica che per ogni punto  $a \in U$  esiste un disco  $D(a, r) \subset U$  tale che la restrizione di  $f$  a  $D(a, r)$  possiede una primitiva. Ciò non significa però che  $f$  possiede una primitiva in tutto  $U$ . In altre parole, non è necessariamente vero che è possibile trovare primitive di  $f$  nelle vicinanze di ogni punto di  $U$  in modo che si incollino per definire un'unica funzione primitiva di  $f$  in tutto  $U$ . Un esempio è fornito dalla funzione  $f(z) = 1/z$  analitica in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Quest'esempio verrà discusso in dettaglio più avanti (cfr. Esempio 1.9.4).

## 1.6 Esempi

1. Dalla proposizione 1.5.2 segue che la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

è analitica nell'aperto  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Il suo sviluppo in serie nell'origine è

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} z^k$$

Questa serie ha raggio di convergenza  $r_0 = 1$  e quindi rappresenta la funzione  $f$  nel disco  $D(0, 1)$ . Consideriamo un qualsiasi punto  $b \in D(0, 1)$ ,  $b \neq 0$ . Dalla dimostrazione della proposizione 1.5.8 segue che lo sviluppo in serie di  $f(z)$  in  $b$  è:

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} b_j (z - b)^j$$

dove

$$b_j = \sum_{k \geq j} \binom{k}{j} b^{k-j}$$

Questa serie converge a  $(1 - b)^{-(j+1)}$  (Esempio 1.2.2) e pertanto lo sviluppo in serie di  $f(z)$  in  $b$  si può riscrivere come:

$$f(z) = \sum_{j \geq 0} (1 - b)^{-(j+1)} (z - b)^j$$

Il raggio di convergenza  $r_b$  di questa serie è dato da:

$$\frac{1}{r_b} = \lim_{j \rightarrow \infty} (|1 - b|^{-(j+1)})^{\frac{1}{j}} = |1 - b|^{-1}$$

cioè  $r_b = |1 - b|$ , che è la distanza di  $b$  dal punto 1 in cui la funzione  $f(z)$  non è definita. Si osservi che  $D(b, r_b) \not\subset D(0, 1)$  a meno che  $b$  non sia reale e  $0 < b < 1$ .

**2. Esponenziale e funzioni circolari** - Vogliamo determinare quali sono le serie di potenze

$$E(T) = \sum_{k \geq 0} a_k T^k \in \mathbb{C}[[T]]$$

tali che  $E'(T) = E(T)$ , e  $E(0) = a_0 = 1$ .

Poiché

$$E'(T) = a_1 + 2a_2T + 3a_3T^2 + \dots$$

otteniamo  $a_0 = 1$  e  $k!a_k = 1$ , e quindi deduciamo  $a_k = \frac{1}{k!}$ . In particolare la serie cercata  $E(T)$  esiste ed è unica. Si ha:

$$E(T) := \sum_{k \geq 0} \frac{T^k}{k!}$$

Poiché  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$ , vediamo che  $E(T)$  ha raggio di convergenza  $r = \infty$ . La *funzione esponenziale*  $e^z$  è definita come la funzione olomorfa in tutto  $\mathbb{C}$  somma della serie  $E(z)$ .

È facile dedurre le principali proprietà di  $e^z$  direttamente dalla definizione. Dimostriamo ad esempio l'identità

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad \forall a, b$$

Sia  $c \in \mathbb{C}$ . Si ha:

$$(e^z e^{c-z})' = e^z e^{c-z} - e^z e^{c-z} = 0$$

e quindi  $e^z e^{c-z} = \text{cost.}$ ; prendendo  $z = 0$  deduciamo che

$$e^z e^{c-z} = e^0 e^c = e^c$$

e ponendo  $z = a$  e  $c = b + a$  si conclude.

In particolare  $e^z e^{-z} = e^0 = 1$  e quindi  $e^z \neq 0$  per ogni  $z$  e  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ .

Inoltre  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$  perché tutti i coefficienti di  $E(z)$  sono reali. In particolare, se  $y \in \mathbf{R}$ :

$$|e^{iy}|^2 = e^{iy} e^{-iy} = 1$$

cioè  $|e^{iy}| = 1$ . Inoltre, essendo  $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ , si ha  $|e^{x+iy}| = e^x$ , e quindi  $|e^{x+iy}| = 1$  se e solo se  $x = 0$  cioè se e solo se  $z = iy$  è puramente immaginario.

Per mezzo della funzione esponenziale è possibile definire le *funzioni circolari*, o *trigonometriche*, ponendo:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (1.8)$$

Dalle definizioni si deducono facilmente tutte le principali proprietà di queste funzioni. In particolare:

$$(\cos z)' = -\sin z; \quad (\sin z)' = \cos z$$

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$$

Si ha inoltre

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (1.9)$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Calcolando si trovano gli sviluppi in serie:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \dots$$

Per  $z = x$  reale queste serie si riducono agli usuali sviluppi in serie di Taylor di  $\cos x$  e  $\sin x$ , e quindi le funzioni trigonometriche complesse prolungano a  $\mathbb{C}$  le funzioni trigonometriche già conosciute nel caso reale.

Studiamo la *periodicità* di  $e^z$ . Sia  $p \in \mathbb{C}$  un periodo, cioè un numero complesso tale che  $e^{z+p} = e^z$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Ciò avviene se e solo se  $e^p = 1$ . Quindi  $p = it$ ,  $t$  reale. D'altra parte

$$e^{it} = \cos t + i \sin t = 1$$

significa  $\cos t = 1$ ,  $\sin t = 0$ , il che avviene se e solo se  $t = 2k\pi$  per qualche  $k \in \mathbf{Z}$ .

Quindi i periodi di  $e^z$  sono tutti e soli i multipli interi di  $2\pi i$ . Se ne deduce che ogni numero complesso  $z \neq 0$  può essere espresso nella forma:

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

per qualche  $\theta \in \mathbb{R}$  che è univocamente determinato solo a meno di multipli interi di  $2\pi$ . In altre parole si ha anche:

$$z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$$

per ogni  $k \in \mathbf{Z}$ . L'insieme di numeri reali:

$$\{\theta + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$$

è detto *l'argomento* di  $z$ , e si denota  $\arg(z)$ . Ogni  $\theta \in \arg(z)$  è detto una *determinazione* dell'argomento di  $z$ . L'unica determinazione di  $\arg(z)$  che soddisfa la condizione  $0 \leq \theta < 2\pi$  si dice *determinazione principale dell'argomento* di  $z$  e si denota con  $\text{Arg}(z)$ . Pertanto possiamo scrivere:

$$\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$$

Si noti che si ha

$$e^{2\pi i} = 1 \tag{1.10}$$

Questa identità è detta *formula di Eulero*.

### 3. Il logaritmo

Sia  $w \in \mathbb{C}$ . Un *logaritmo* di  $w$  è un numero complesso  $z$  tale che  $e^z = w$ . Ovviamente, poiché  $e^z \neq 0$  il numero  $w = 0$  non ha logaritmo. Se  $w \neq 0$  allora l'equazione  $e^{x+iy} = w$  è equivalente a

$$e^x = |w|, \quad e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

La prima equazione possiede l'unica soluzione  $x = \log |w|$ . La seconda equazione ha le infinite soluzioni  $y \in \arg w$ .

In conclusione, ogni  $w = |w|(\cos \text{Arg}(w) + i \sin \text{Arg}(w)) \neq 0$  possiede infinite determinazioni del logaritmo, della forma:

$$\log w = \log |w| + i(\text{Arg}(w) + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}$$

La determinazione corrispondente a  $k = 0$  si dice *determinazione principale* del logaritmo di  $w$  e si denota con  $\text{Log}(w)$ .

4. Siano  $0 \neq a, z \in \mathbb{C}$ . Diremo che  $w \in \mathbb{C}$  soddisfa l'identità:

$$z^a = w$$

se esiste una determinazione  $\log(z)$  del logaritmo di  $z$  tale che

$$w = e^{a \log(z)}$$

Per definizione  $z^a$  non è univocamente determinato, ma dipende dalla scelta della determinazione  $\log(z)$ . La *determinazione principale* di  $z^a$  si definisce come

$$w = e^{a \operatorname{Log}(z)}$$

cioè come quella corrispondente alla determinazione principale  $\operatorname{Log}(z)$ .

Si osservi che, se  $n \geq 2$  è un intero, allora

$$z^n = e^{n \log(z)} = e^{n[\log(z) + 2k\pi i]}$$

è univocamente determinato, e quindi la definizione che abbiamo dato è compatibile con la definizione di potenza  $n$ -esima come prodotto di un elemento per se stesso nel campo dei numeri complessi.

D'altra parte, se si prende  $a = \frac{1}{n}$ , dove  $n \geq 2$  è intero, allora  $z^{1/n}$  possiede  $n$  le determinazioni distinte

$$e^{[\operatorname{Log}(z) + 2k\pi i]/n} = e^{\frac{\operatorname{Log}(z)}{n} + \frac{2k\pi i}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

che si dicono *le radici  $n$ -esime di  $z$* . Nel caso  $z = 1$  si ottengono *le radici  $n$ -esime dell'unità*:

$$e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

**5. Le funzioni iperboliche** - Le classiche funzioni iperboliche di variabile reale si estendono in modo naturale a funzioni intere ponendo:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (1.11)$$

L'identità già valida nel caso reale:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

si estende a questo caso in modo ovvio. Sussiste inoltre l'identità:

$$|\sin(x + iy)|^2 = |\sin x|^2 + |\sinh y|^2 \quad (1.12)$$

la cui verifica elementare è lasciata al lettore come esercizio.

Si osservi che

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i \sin(iz)$$

**6. I numeri di Bernoulli  $B_k$**  sono definiti dall'identità

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k$$

Si osservi che il primo membro è una funzione olomorfa nel disco  $D(0, 2\pi)$ . Per calcolare i  $B_k$  esplicitiamo l'identità:

$$\frac{ze^z}{e^z - 1} = \frac{z}{e^z - 1} + z$$

ottenendo:

$$\sum_{k \geq 0} \left[ \sum_{h=0, \dots, k} \frac{B_h}{h!(k-h)!} \right] z^k = z + \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k$$

Da qui si calcolano i  $B_k$  induttivamente. I primi valori sono:

$$B_0 = 1 \quad B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0$$

$$B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_5 = 0$$

$$B_6 = \frac{1}{42} \quad B_7 = 0$$

In generale  $B_{2k+1} = 0$  per ogni  $k \geq 1$ . Ciò si deduce dal fatto che la funzione

$$\frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1} = 1 + \sum_{k \geq 2} \frac{B_k}{k!} z^k$$

è pari.

**7.** La funzione trascendente  $\tan z = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$  ha il seguente sviluppo in serie nell'origine:

$$\tan z = \sum_{k \geq 1} \frac{2^{2k}(2^{2k} - 1)B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$$

e ha raggio di convergenza  $\frac{\pi}{2}$ .

## 1.7 Ordine e indice di ramificazione

Sia  $f$  una funzione analitica in un intorno di un punto  $a \in \mathbb{C}$  e sia

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$$

il suo sviluppo in serie in  $a$ . Supponiamo che  $f$  non sia identicamente nulla in un intorno di  $a$ . In tal caso i coefficienti  $a_k$  non sono tutti nulli.

L'ordine di  $f$  in  $a$  è definito come il più piccolo esponente  $k$  tale che  $a_k \neq 0$ , e si denota  $o_a(f)$ .

E' evidente che  $o_a(f)$  coincide con l'ordine della serie  $\sum_{k \geq 0} a_k T^k$  secondo la definizione data nel §1. Nel seguente lemma sono raccolte le principali proprietà della nozione di ordine.

**Lemma 1.7.1.** *Sia  $f$  una funzione analitica non costante in un intorno aperto  $A$  di  $a \in \mathbb{C}$ . Allora:*

- (i)  $o_a(f) > 0$  se e solo se  $f(a) = 0$ .
- (ii) Esiste un aperto  $U(a) \subset A$  contenente  $a$  tale che  $o_z(f) = 0$  per ogni  $z \in U(a)$ ,  $z \neq a$ .
- (iii) Posto  $f' = \frac{df}{dz}$  si ha:

$$o_a(f') = o_a(f - f(a)) - 1$$

- (iv) Se  $g$  è una funzione analitica e non costante su un aperto  $B$  di  $\mathbb{C}$  tale che  $g(B) \subset A$ , e se per qualche  $b \in B$  si ha  $g(b) = a$ ,  $g'(b) \neq 0$ , allora:

$$o_b(f \circ g) = o_a(f)$$

*Dimostr.* (i) è ovvia.

(ii) Se  $o_a(f) = 0$  la conclusione è ovvia per la continuità di  $f$ . Supponiamo che  $a$  sia uno zero di  $f$ , cioè che si abbia  $a_0 = f(a) = 0$ . Per ipotesi  $f$  non è identicamente nulla in un intorno di  $a$ ; sia  $h = o_a(f) > 0$ . Allora possiamo scrivere:

$$f(z) = \sum_{k \geq h} a_k (z-a)^k = (z-a)^h \sum_{k \geq h} a_k (z-a)^{k-h}$$

La serie  $\sum_{k \geq h} a_k (z-a)^{k-h}$  converge in un intorno di  $a$  ad una funzione analitica  $g(z)$ . Poiché  $g(a) = a_h \neq 0$ , esiste  $r > 0$  tale che  $g(z) \neq 0$  per ogni  $z \in D(a, r)$ . Ma allora  $f(z) = (z-a)g(z) \neq 0$  per ogni  $z \in D(a, r)$ ,  $z \neq a$ . Quindi il punto  $a$  è isolato nell'insieme degli zeri di  $f$ .

(iii) è immediata.

(iv) Se  $o_a(f) = 0$  la conclusione è ovvia. Supponiamo  $o_a(f) > 0$  e procediamo per induzione su  $o_a(f)$ . Per la (iii) si ha:

$$\begin{aligned} o_b(f \circ g) &= 1 + o_b((f \circ g)') = 1 + o_b[f'(g(w))g'(w)] = \\ &= 1 + o_b(f' \circ g) + o_b(g') = 1 + o_b(f' \circ g) \end{aligned}$$

Poiché dalla (iii) segue che  $o_a(f') = o_a(f) - 1$ , per l'ipotesi induttiva si ha  $o_b(f' \circ g) = o_a(f')$  e quindi:

$$o_b(f \circ g) = 1 + o_a(f') = o_a(f)$$

□

Insieme alla nozione di ordine è spesso utile considerare anche la seguente:

**Definizione 1.7.2.** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica definita su un aperto  $A$  di  $\mathbb{C}$  e sia  $a \in A$ . L'indice di ramificazione di  $f$  in  $a$  è*

$$e_f(a) = o_a(f(z) - f(a))$$

Il punto  $a$  si dice di ramificazione per  $f$  se  $e_f(a) \geq 2$ . In tal caso diremo che  $f$  ramifica in  $a$ .

Dal Lemma 1.7.1 segue che si ha

$$e_f(a) = o_a(f') + 1$$

e che l'insieme dei punti di ramificazione di  $f$  è un sottoinsieme discreto di  $A$ .

**Esempio 1.7.3.** Per un fissato intero  $n \geq 2$  ed una costante  $c \in \mathbb{C}$  la funzione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita da  $f(z) = z^n + c$ , ramifica solo nel punto  $z = 0$  con indice di ramificazione  $n$ . Se invece  $n = 1$  la  $f$  non ramifica in alcun punto.

Il Lemma seguente generalizza 1.7.1(iv):

**Lemma 1.7.4.** *Sia  $f$  una funzione analitica non costante in un intorno aperto  $A$  di  $a \in \mathbb{C}$ . Se  $g$  è una funzione olomorfa e non costante su un aperto  $B$  di  $\mathbb{C}$  tale che  $g(B) \subset A$ , e se per qualche  $b \in B$  si ha  $g(b) = a$  allora:*

$$e_{f \circ g}(b) = e_f(a)e_g(b)$$

*Dimostr.* Si ha

$$e_{f \circ g}(b) = 1 + o_b((f \circ g)') = 1 + o_b[(f' \circ g)g'] = 1 + o_b(f' \circ g) + o_b(g') = o_b(f' \circ g) + e_g(b)$$

Se  $e_f(a) = 1$  allora  $o_a(f') = 0$  e quindi si ha anche  $o_b(f' \circ g) = 0$ . Dall'uguaglianza precedente segue che  $e_{f \circ g}(b) = e_g(b)$  e la conclusione è vera in questo caso. Supponiamo  $e_f(a) \geq 2$  e procediamo per induzione su  $e_f(a)$ . Per l'ipotesi induttiva si ha:

$$o_b(f' \circ g) = e_{f' \circ g}(b) = e_{f'}(a)e_g(b) = [e_f(a) - 1]e_g(b)$$

e quindi:

$$e_{f \circ g}(b) = o_b(f' \circ g) + e_g(b) = [e_f(a) - 1]e_g(b) + e_g(b) = e_f(a)e_g(b)$$

□

Si osservi che nel caso in cui  $a = 0 = f(a)$  il Lemma afferma che

$$o_b(f \circ g) = o_0(f)o_b(g)$$

## 1.8 Zeri delle funzioni analitiche

In questo paragrafo dimostreremo che due funzioni analitiche che coincidono su un insieme abbastanza grande, in un senso che preciseremo, coincidono identicamente. Questa proprietà generalizza una proprietà ben nota dei polinomi: se due polinomi di grado  $\leq n$  assumono gli stessi valori in  $n + 1$  punti distinti di  $\mathbb{C}$ , allora coincidono.

**Teorema 1.8.1** (Principio del prolungamento analitico). *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto connesso,  $z_0 \in U$ , ed  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*



- (i)  $f^{(k)}(z_0) = 0$  per ogni  $k \geq 0$ .  
 (ii)  $f$  è identicamente nulla in un intorno di  $z_0$ .  
 (iii)  $f$  è identicamente nulla in  $U$ .

*Dimostr.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Sia  $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$  lo sviluppo in serie di  $f$  in  $z_0$ . Dalla (1.6) segue che  $a_k = 0$  per ogni  $k$ , e quindi  $f(z) = 0$  in un intorno di  $z_0$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) e (iii)  $\Rightarrow$  (i) sono ovvie.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Dobbiamo dimostrare che l'insieme

$$\Delta = \{a \in U : f \text{ è identicamente nulla in un intorno di } a\}$$

coincide con  $U$ . Osserviamo che  $z_0 \in \Delta$  e quindi  $\Delta \neq \emptyset$ . Pertanto, poiché  $U$  è connesso, sarà sufficiente dimostrare che  $\Delta$  è aperto e chiuso in  $U$ .

$\Delta$  è aperto per definizione.

Sia  $c \in \overline{\Delta}$ . Allora esiste una successione  $\{c_n\} \rightarrow c$  tale che  $c_n \in \Delta$ . In ogni punto  $c_n$  è verificata la condizione (ii), e quindi anche la (i), cioè  $f^{(k)}(c_n) = 0$  per ogni  $k \geq 0$  e per ogni  $n$ . Ma allora, essendo le derivate  $f^{(k)}(z)$  funzioni continue, si ha anche  $f^{(k)}(c) = 0$  per ogni  $k$ , cioè in  $c$  è soddisfatta la condizione (i). Ma allora anche la (ii) è soddisfatta, cioè  $c \in \Delta$ , e quindi  $\Delta$  è chiuso.  $\square$

**Corollario 1.8.2.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto connesso. Se  $f, g$  sono analitiche in  $U$  e coincidono in un intorno di un punto  $z_0 \in U$  allora coincidono identicamente in tutto  $U$ .*

*Dimostr.* Basta applicare il teorema alla funzione  $f - g$ .  $\square$

Applicando il Teorema 1.8.1 deduciamo il seguente risultato:

**Teorema 1.8.3** (Principio d'identità delle funzioni analitiche). *Se  $U \subset \mathbb{C}$  è un aperto connesso ed  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è analitica e non è identicamente nulla, l'insieme degli zeri di  $f$  è un insieme discreto, cioè tutti i suoi punti sono isolati.*

*Dimostr.* Supponiamo che  $f(a) = 0$  per qualche  $a \in U$ . Per il teorema 1.8.1  $f$  non è identicamente nulla in un intorno di  $a$ , e quindi, per il Lemma 1.7.1(ii),  $a$  possiede un intorno  $V \subset U$  tale che  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in V$ ,  $z \neq a$ . Quindi  $a$  è isolato nell'insieme degli zeri di  $f$ .  $\square$

Abbiamo il seguente immediato

**Corollario 1.8.4.** *Se  $U \subset \mathbb{C}$  è un aperto connesso ed  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  analitiche, allora l'insieme*

$$S = \{z \in U : f(z) = g(z)\}$$

*è discreto oppure  $S = U$ . In particolare, se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è analitica e  $c \in \mathbb{C}$ , allora*

$$f^{-1}(c) = \{z \in U : f(z) = c\}$$

*se non è vuoto, è un insieme discreto oppure  $f^{-1}(c) = U$ , cioè  $f$  è costante.*

**Esempio 1.8.5** (La serie binomiale). Sia  $\alpha \neq 0$  un numero complesso. Definiamo i *coefficienti binomiali* come:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

per  $k \geq 1$ , e  $\binom{\alpha}{0} = 1$ . Definiamo la *serie binomiale* nel modo seguente:

$$B_\alpha(t) = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} t^k$$

**Lemma 1.8.6.** *Se  $\alpha$  non è uguale ad un intero  $\geq 0$ , il raggio di convergenza di  $B_\alpha(t)$  è uguale ad 1.*

*Dimostr.* L'ipotesi su  $\alpha$  implica che nessuno dei coefficienti  $\binom{\alpha}{k}$  è zero. Si ha:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| 1 - \frac{\alpha+1}{k+1} \right|$$

che converge ad 1 per  $k \rightarrow \infty$ . La conclusione segue dal criterio del rapporto.  $\square$

Se  $m$  è un intero positivo segue dal lemma che la serie  $B_{\frac{1}{m}}(x)$  converge assolutamente per  $x$  reale tale che  $|x| < 1$ . D'altra parte è ben noto dai corsi di analisi matematica che la somma di tale serie soddisfa  $B_{\frac{1}{m}}(x)^m = 1+x$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$  tale che  $|x| < 1$ . Dal principio di identità delle funzioni olomorfe discende quindi che nel disco aperto  $D(0,1) \subset \mathbf{C}$  la funzione somma della serie  $B_{\frac{1}{m}}(z)$  soddisfa

$$B_{\frac{1}{m}}(z)^m = 1+z$$

$\square$

## 1.9 Proprietà geometriche delle funzioni analitiche

Sia  $U \subset \mathbf{C}$  un aperto, e  $f$  analitica su  $U$ . Diremo  $f$  un *isomorfismo analitico* se la sua immagine  $V = f(U)$  è un aperto di  $\mathbf{C}$  ed esiste una funzione analitica  $g : V \rightarrow U$  tale che  $f \circ g = 1_V$  e  $g \circ f = 1_U$ , cioè tale che  $f$  e  $g$  siano funzioni inverse una dell'altra.

Diremo che la funzione analitica  $f : U \rightarrow \mathbf{C}$  è un *isomorfismo analitico locale in un punto*  $z_0 \in U$  se esiste un intorno aperto  $U_0 \subset U$  di  $z_0$  tale che la restrizione di  $f$  ad  $U_0$  sia un isomorfismo analitico. Diremo  $f$  un *isomorfismo analitico locale* se è un isomorfismo analitico locale in ogni punto  $z \in U$ .

Ovviamente ogni isomorfismo analitico è anche un isomorfismo analitico locale. Dalle definizioni segue inoltre che un isomorfismo analitico locale è un'applicazione aperta.

Dimostriamo un importante risultato preliminare su cui baseremo le nostre considerazioni successive.

**Proposizione 1.9.1.** *Sia  $f(z)$  una serie di potenze tale che  $o(f) = 1$ . Allora esiste un'unica serie di potenze  $g(z)$  tale che  $o(g) = 1$  e  $f(g(z)) = z$ , e la serie  $g(z)$  soddisfa anche l'identità  $g(f(z)) = z$ . Se  $f$  è convergente allora anche  $g$  è convergente. La serie  $g(z)$  si dice inversa formale di  $f$ .*

*Dimostr.* Per ipotesi possiamo supporre che la serie  $f$  sia della forma:

$$f(z) = a_1 z - \sum_{k \geq 2} a_k z^k$$

con  $a_1 \neq 0$ . Dobbiamo trovare una serie di potenze  $g(z) = \sum_{k \geq 1} b_k z^k$  tale che  $b_1 \neq 0$  e

$$a_1 g(z) - a_2 g(z)^2 - a_3 g(z)^3 - \dots = z$$

Quest'uguaglianza corrisponde ad infinite equazioni nei coefficienti incogniti  $b_1, b_2, \dots$  ottenute eguagliando tra loro i coefficienti delle serie a primo e secondo membro. Queste equazioni sono della forma:

$$a_1 b_1 = 1$$

$$a_1 b_k - P_k(a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{k-1}) = 0 \quad k \geq 2$$

dove  $P_k$  è un polinomio a coefficienti interi positivi. Poiché  $a_1 \neq 0$  se ne deduce immediatamente che queste equazioni possono essere risolte induttivamente, individuando univocamente i coefficienti  $b_k$ . Quindi l'inversa formale  $g(z)$  esiste ed è unica.

Dimostriamo che  $g(f(z)) = z$ . Applicando la stessa dimostrazione a  $g$  deduciamo che esiste una serie di potenze  $h(z)$  tale che  $o(h) = 1$  e  $g(h(z)) = z$ . Ma allora si ha:

$$g(f(z)) = g(f(g(h(z)))) = g(h(z)) = z$$

come si voleva, e  $f(z) = h(z)$  è l'inversa formale di  $g(z)$ .

Supponiamo ora che  $f$  sia convergente. Possiamo supporre  $a_1 = 1$ . Infatti, se  $a_1 \neq 0, 1$  poniamo:

$$\tilde{f}(w) := f(a_1^{-1} w) = w - \sum_{k \geq 2} \tilde{a}_k w^k$$

che è convergente per  $|w| < |a_1| r$ , dove  $r$  è il raggio di convergenza di  $f$ . Sia  $\tilde{g}(w)$  l'inversa formale di  $\tilde{f}(w)$ . Se questa è convergente allora anche la serie  $g(z) = a_1^{-1} \tilde{g}(z)$  lo è, e questa è proprio l'inversa formale di  $f(z)$  perché abbiamo:

$$f(g(z)) = f(a_1^{-1} \tilde{g}(z)) = \tilde{f}(\tilde{g}(z)) = z$$

Supponiamo dunque che  $a_1 = 1$ . Sia

$$f^*(z) = z - \sum_{k \geq 2} a_k^* z^k$$

una serie di potenze con  $a_k^*$  reale  $\geq 0$  e tale che  $|a_k| \leq a_k^*$  per ogni  $k$ . Sia  $\varphi(z) = \sum_{k \geq 1} c_k z^k$  l'inversa formale di  $f^*(z)$ .

Si ha  $c_1 = 1$  e

$$c_k - P_k(a_2^*, \dots, a_k^*, c_1, \dots, c_{k-1}) = 0$$

con gli stessi polinomi  $P_k$  di prima. Per induzione segue allora che ogni  $c_k$  è reale  $\geq 0$ , e che

$$|b_k| \leq c_k$$

Per concludere sarà quindi sufficiente scegliere la serie  $f^*$  in modo che  $\varphi(z)$  abbia raggio di convergenza positivo. Poiché esiste  $A > 0$  tale che

$$|a_k| \leq A^k$$

per ogni  $k \geq 2$ , poniamo:

$$f^*(z) = z - \sum_{k \geq 2} A^k z^k = z - \frac{A^2 z^2}{1 - Az}$$

La serie  $\varphi(z)$  soddisfa  $f^*(\varphi(z)) = z$ , cioè:

$$\varphi(z) - \frac{A^2 \varphi(z)^2}{1 - A\varphi(z)} = z$$

che è equivalente all'identità quadratica:

$$(A^2 + A)\varphi(z)^2 - (1 + Az)\varphi(z) + z = 0$$

In altre parole  $\varphi(z)$  è una soluzione in  $\mathbb{C}[[z]]$  dell'equazione:

$$(A^2 + A)X^2 - (1 + Az)X + z = 0$$

Le soluzioni di quest'equazione sono:

$$\varphi(z) = \frac{(1 + Az) \pm \sqrt{(1 + Az)^2 - 4z(A^2 + A)}}{2(A^2 + A)} \quad (1.13)$$

purché il secondo membro abbia significato in  $\mathbb{C}[[z]]$ . L'espressione sotto radice è della forma:

$$(1 + Az)^2 \left( 1 - \frac{4z(A^2 + A)}{(1 + Az)^2} \right)$$

La funzione

$$1 - \frac{4z(A^2 + A)}{(1 + Az)^2}$$

è somma di una serie di potenze della forma  $1 + h(z)$  con  $o(h) \geq 1$ . Sostituendo  $h(z)$  nella serie binomiale  $B_{\frac{1}{2}}(z)$  otteniamo una serie  $B_{\frac{1}{2}}(h(z))$  convergente ad  $(1 + h(z))^{\frac{1}{2}}$ . Sostituendo otteniamo così le espressioni (1.13) di  $\varphi(z)$  sotto forma di composizione di serie convergenti, e pertanto convergenti. Una delle due è necessariamente l'inversa formale di  $f^*$ . Ciò dimostra che anche la serie  $g(z)$  è convergente.  $\square$

**Corollario 1.9.2.** *Sia  $f$  una funzione analitica in un aperto  $U \subset \mathbb{C}$  e sia  $z_0 \in U$ . Allora  $f$  è un isomorfismo analitico locale in  $z_0$  se e solo se  $f'(z_0) \neq 0$ .*

*Dimostr.* La condizione  $f'(z_0) \neq 0$  è necessaria affinché  $f$  sia un isomorfismo analitico locale in  $z_0$ . Se infatti esiste una funzione  $g(z)$  analitica in un aperto  $V_0$  e tale che  $g(f(z)) = z$  per ogni  $z$  in un intorno  $U_0$  di  $z_0$ , allora, essendo  $z' = 1$ , per ogni  $z \in U_0$  si ha

$$1 = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

e in particolare  $f'(z_0) \neq 0$ .

Dimostriamo che la condizione è anche sufficiente. Supponiamo dapprima che  $z_0 = 0$  e  $f(0) = 0$ . Quindi  $f$  è analitica in un intorno di 0 e  $o_0(f) = 1$ , e ciò significa che  $f$  può essere rappresentata come somma di una serie di potenze convergente in 0 e di ordine 1. Possiamo pensare  $f$  come definita nel suo disco aperto di convergenza  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Sia  $g$  l'inversa formale di  $f$  e sia  $V_0$  un disco aperto centrato in 0 e contenuto nel disco di convergenza di  $g$  e tale che  $g(V_0) \subset D$ ;  $V_0$  esiste perché  $g$  è continua. Sia  $U_0 = f^{-1}(V_0)$ , e sia

$$f_0 : U_0 \rightarrow V_0$$

la restrizione di  $f$  a  $U_0$ . Si osservi che  $g(V_0) \subset U_0$  perché per ogni  $w \in V_0$  si ha  $f(g(w)) = w$ . Pertanto la restrizione  $g_0$  di  $g$  a  $V_0$  definisce un'applicazione analitica  $g_0 : V_0 \rightarrow U_0$  tale che  $f_0(g_0(w)) = w$  per ogni  $w \in V_0$ . D'altra parte per come è stata definita  $f_0$  si ha anche  $g_0(f_0(z)) = z$  per ogni  $z \in U_0$ , e quindi  $f_0$  e  $g_0$  sono isomorfismi analitici inversi uno dell'altro; ciò conclude la dimostrazione nel caso  $z_0 = 0$  e  $f(z_0) = 0$ .

Il caso generale si riduce a quello precedente per traslazione. Precisamente, per una  $f$  arbitraria tale che  $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z - z_0)^k$ , si ponga  $w = z - z_0$ , e

$$F(w) = f(w + z_0) - f(z_0) = \sum_{k \geq 1} a_k w^k$$

Pertanto:

$$f(z) = F(z - z_0) + f(z_0)$$

Allora per quanto dimostrato nella prima parte  $F$  possiede un'inversa locale  $G$ . Poniamo  $w_0 = f(z_0)$ , e sia

$$g(w) = G(w - w_0) + z_0$$

Allora  $g$  è un'inversa locale per  $f$ . Infatti:

$$\begin{aligned} f(g(w)) &= F(g(w) - z_0) + f(z_0) = F(G(w - w_0) + z_0 - z_0) + f(z_0) = \\ &= w - w_0 + f(z_0) = w \end{aligned}$$

e viceversa:

$$g(f(z)) = G(f(z) - w_0) + z_0 = G(F(z - z_0) + f(z_0) - w_0) + z_0 = z - z_0 + z_0 = z$$

e ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**Esempio 1.9.3.** Dal Corollario 1.9.2 segue che la funzione esponenziale è un isomorfismo analitico locale, essendo  $(e^z)' = e^z \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Pertanto ogni  $w_0 \neq 0$  possiede un intorno aperto su cui è definita una determinazione analitica di  $\log(w)$  avente come valore in  $w_0$  una qualsiasi preassegnata determinazione di  $\log(w_0)$ . Ciò implica facilmente che  $e^{(\cdot)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  è un rivestimento, ed è il rivestimento universale di  $\mathbb{C}^*$ .

A titolo di esempio calcoliamo nell'intorno del punto  $w_0 = 1$  la determinazione di  $\log(w)$  tale che  $\log(1) = 0$ . Con le notazioni del Corollario 1.9.2 abbiamo  $z_0 = 0$  e:

$$F(w) = f(w+0) - f(0) = e^w - 1 = \sum_{k \geq 1} \frac{w^k}{k!}$$

e  $e^w = F(w) + 1$ , mentre

$$\log(w) = g(w) = G(w - w_0) + z_0 = G(w - 1)$$

Non ci resta che calcolare  $G(w)$ , l'inversa formale di  $F(w)$ . Questo calcolo è facilitato dall'osservare che  $G(w) = g(w+1)$  e che  $w = f(g(w))$ . Derivando si ottiene

$$1 = f'(g(w))g'(w) = e^{\log(w)}g'(w) = wg'(w)$$

Quindi

$$G'(w) = g'(w+1) = \frac{1}{w+1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k w^k$$

Ma allora  $G(w)$  si ottiene integrando termine a termine e scegliendo 0 come termine costante, cioè:

$$G(w) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{w^k}{k}$$

e quindi:

$$\log(w) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{(w-1)^k}{k}$$

**Esempio 1.9.4.** La funzione  $f(z) = 1/z$  è analitica in  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ma non possiede una primitiva in  $\mathbb{C}^*$ . Sia infatti  $g(z)$  una sua primitiva locale definita in un intorno  $D \subset \mathbb{C}^*$  di un punto  $z_0 \in \mathbb{C}^*$ ; si abbia cioè  $g'(z) = 1/z$  per  $z \in D$ . Se  $D$  è sufficientemente piccolo è anche ben definita in  $D$  una determinazione analitica  $\ell(z)$  del logaritmo di  $z$ , cioè si ha:

$$z = e^{\ell(z)}, \quad z \in D$$

Segue che

$$1 = e^{\ell(z)} \ell'(z) = z \ell'(z) \quad z \in D$$

e quindi anche  $\ell(z)$  è una primitiva di  $1/z$  in  $D$ . Pertanto esiste una costante  $c \in \mathbb{C}$  tale che  $g(z) = \ell(z) + c$ . Dunque, se esistesse una primitiva  $g(z)$  di  $f(z)$  in tutto  $\mathbb{C}^*$  allora esisterebbe una costante  $C$  tale che  $g(z) + C$  sia una determinazione del logaritmo di  $z$  analitica in tutto  $\mathbb{C}^*$ : ciò è palesemente impossibile,

perché non può nemmeno esistere una continua. Per convincersene è sufficiente considerare la variazione continua di una qualsiasi determinazione di  $\log(z)$  quando  $z$  percorre la circonferenza unitaria.

Il risultato che segue descrive una proprietà geometrica fondamentale delle funzioni analitiche.

**Teorema 1.9.5** (dell'applicazione aperta). *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto connesso e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica. Se  $f$  non è costante allora  $f$  è un'applicazione aperta.*

*Dimostr.* Poiché  $f$  non è costante la sua derivata  $f'(z)$  si annulla al più su un sottoinsieme discreto  $S \subset U$ . Per il Corollario 1.9.2, la restrizione di  $f$  ad  $U \setminus S$  è un isomorfismo analitico locale e quindi è aperta. Ci resta da verificare che  $f$  è aperta anche nei punti di  $S$ .

Sia  $a \in S$ ; non è restrittivo supporre che  $f(a) = 0$ . Allora  $r := o_a(f) \geq 2$ . Si ha pertanto:

$$f(z) = \sum_{k \geq r} a_k (z - a)^k, \quad a_r \neq 0$$

in un disco aperto  $D$  centrato in  $a$ . Si ha:

$$a_r^{-1} \sum_{k \geq 0} a_{r+k} (z - a)^k = 1 + h(z)$$

dove  $h(z)$  è analitica in  $D$  e soddisfa  $h(a) = 0$ , cioè  $o_a(h) \geq 1$ . Sia  $b \in \mathbb{C}$  tale che  $b^r = a_r$ . Allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - a)^r \sum_{k \geq 0} a_{r+k} (z - a)^k \\ &= a_r (z - a)^r (1 + h(z)) \\ &= [b(z - a)]^r (1 + h(z)) \end{aligned}$$

Poiché  $o_a(h) \geq 1$  la serie composta  $B_{1/r}(h(z))$  è ben definita e ha raggio di convergenza positivo; la funzione somma della serie soddisfa  $B_{1/r}(h(z))^r = 1 + h(z)$ . Pertanto possiamo riscrivere la funzione  $f(z)$  nella forma seguente:

$$f(z) = [b(z - a)B_{1/r}(h(z))]^r$$

Quest'uguaglianza esprime la funzione  $f(z)$  come la composizione della funzione

$$z \mapsto b(z - a)B_{1/r}(h(z))$$

con la funzione  $w \mapsto w^r$ . Si osservi che  $B_{1/r}(h(a))^r = 1$  e quindi  $B_{1/r}(h(a)) \neq 0$ . Pertanto

$$o_a[b(z - a)B_{1/r}(h(z))] = o_a(b(z - a)) + o_a[B_{1/r}(h(z))] = 1 + 0 = 1$$

e quindi  $b(z - a)B_{1/r}(h(z))$  è un isomorfismo analitico locale in  $a$ , in particolare è aperta in  $a$ . Inoltre è elementare verificare che la funzione  $w \mapsto w^r$  è aperta. In conclusione  $f(z)$  è aperta in  $a$ .  $\square$

**Osservazione 1.9.6.** Dalla dimostrazione del teorema 1.9.5 segue che nell'intorno di un punto  $a \in U$  in cui  $f'(a) = 0$  l'applicazione  $f$  è la composizione di un isomorfismo analitico locale con l'applicazione  $w \mapsto w^r$ , dove  $r = o_a(f - f(a))$ .

Concludiamo questo paragrafo con un teorema che fornisce un criterio affinché una funzione analitica sia un isomorfismo analitico.

**Teorema 1.9.7.** *Sia  $f$  analitica su un insieme aperto  $U \subset \mathbb{C}$ , e supponiamo che  $f$  sia iniettiva. Allora  $f$  è un isomorfismo analitico. In particolare  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in U$ .*

*Dimostrazione.* Poiché è iniettiva,  $f$  è non costante su ogni componente connessa di  $U$ . Quindi la sua immagine  $V = f(U)$  è aperta. Denotiamo con  $g : V \rightarrow U$  la sua inversa. Sia  $a \in U$ . In un intorno di  $a$  la funzione  $f$  ha uno sviluppo in serie della forma:

$$f(z) = f(a) + \sum_{k \geq r} a_k (z - a)^k, \quad a_r \neq 0$$

Poiché  $f$  è iniettiva, dev'essere necessariamente  $r = 1$  per l'osservazione 1.9.6, perché l'applicazione  $w \mapsto w^r$  è iniettiva se e solo se  $r = 1$ . Quindi  $f'(a) \neq 0$  e dal Corollario 1.9.2 segue che  $g$  è analitica in  $f(a)$ .  $\square$

## 1.10 Il principio del massimo modulo

Come applicazione del teorema dell'applicazione aperta abbiamo il seguente importante risultato.

**Teorema 1.10.1** (Principio del massimo modulo). *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto connesso e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica. Se esiste un punto  $z_0 \in U$  tale che la funzione  $|f| : U \rightarrow \mathbb{R}$  abbia un massimo locale in  $z_0$  allora  $f$  è costante.*

*Dimostr.* Sia

$$f(z) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k (z - z_0)^k$$

lo sviluppo in serie di  $f(z)$  in  $z_0$ . Se  $f$  non è costante allora è aperta in  $z_0$  e quindi la sua immagine contiene un disco di centro  $a_0 = f(z_0)$ . Quindi, al variare di  $z$  in un intorno di  $z_0$ , l'insieme di numeri reali  $|f(z)|$  contiene un intervallo aperto contenente  $|a_0| = |f(z_0)|$ , e quindi  $|f(z_0)|$  non può essere un massimo locale per  $|f|$ .  $\square$

Il principio del massimo modulo si applica soprattutto nel caso in cui  $f$  sia una funzione definita in un disco chiuso, olomorfa al suo interno e continua sulla frontiera. In tal caso il teorema 1.10.1 implica che il massimo di  $|f|$  sulla frontiera del disco è un limite superiore per  $|f|$  anche nell'interno del disco.

**Corollario 1.10.2.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto connesso e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica. Se esiste un punto  $z_0 \in U$  tale che la funzione  $\Re(f)$  abbia un massimo locale in  $z_0$ , allora  $f$  è costante.*



*Dimostr.* La funzione  $e^{f(z)}$  è analitica in  $U$  e soddisfa

$$|e^{f(z)}| = e^{\Re(f(z))}$$

Pertanto se  $z_0$  è un massimo locale per  $\Re(f)$ , è anche un massimo locale per  $|e^{f(z)}|$  e quindi  $e^{f(z)}$  è costante, per il Teorema 1.10.1. Da ciò segue che  $f(z)$  è costante.  $\square$

Diamo una importante applicazione del Teorema 1.10.1:

**Teorema 1.10.3** (Teorema fondamentale dell'algebra). *Sia*

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_dz^d$$

*un polinomio non costante a coefficienti complessi. Allora  $f$  possiede almeno una radice, cioè esiste  $z_0$  tale che  $f(z_0) = 0$ .*

*Dimostr.* Possiamo supporre  $a_d \neq 0$ . Per assurdo supponiamo che  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Scriviamo:

$$f(z) = a_dz^d \left( \frac{a_0}{a_dz^d} + \frac{a_1z}{a_dz^d} + \cdots + 1 \right)$$

Da questa espressione deduciamo che

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Pertanto, fissato  $c \in \mathbb{C}$ , esiste un numero reale  $R > 0$  tale che

$$\frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{|f(c)|} \quad (1.14)$$

per ogni  $z$  tale  $|z| \geq R$ . Non è restrittivo supporre che si abbia anche  $|c| < R$ . Sia  $K$  il disco chiuso di centro 0 e raggio  $R$ . Poiché la funzione  $\frac{1}{|f(z)|}$  è continua in  $K$ , che è chiuso e limitato, essa possiede un massimo in un punto  $w \in K$ . Per la (1.14) il punto  $w$  non può essere sulla frontiera di  $K$ . Quindi  $w$  è interno a  $K$ . Dal principio del massimo modulo si deduce che  $\frac{1}{|f(z)|}$  è costante, e quindi che  $f(z)$  è costante, una contraddizione.  $\square$

Un'altra applicazione del Teorema 1.10.1 è la seguente.

**Teorema 1.10.4** (Lemma di Schwarz). *Sia  $D = D(0, 1)$  il disco aperto unitario,  $f : D \rightarrow D$  una funzione analitica tale che  $f(0) = 0$ . Allora*

$$|f(z)| \leq |z|$$

*per ogni  $z \in D$ .*

*Dimostr.* Poiché  $f(0) = 0$  la funzione  $g(z) = f(z)/z$  è analitica in  $D$ . Fissato  $0 \neq z \in D$ , e posto  $r = |z|$ , si ha

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

e quindi, per il principio del massimo modulo, si ha anche  $|g(\zeta)| \leq 1/r$  se  $|\zeta| \leq r$  perché altrimenti  $|g(\zeta)|$  avrebbe un massimo nell'interno del disco chiuso  $|z| \leq r$ . Facendo tendere  $r = |z| \rightarrow 1$  si ottiene la tesi.  $\square$

**ESERCIZI**

## Capitolo 2

# Integrazione complessa

### 2.1 Curve e archi

Sia  $[a, b]$  un intervallo chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$ . Una *curva differenziabile a valori complessi*, o semplicemente una *curva*, è un'applicazione

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

di classe  $C^1$ , cioè tale che, posto  $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ , le funzioni

$$\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

siano di classe  $C^1$ . I punti  $\gamma(a), \gamma(b) \in \mathbb{C}$  si dicono gli *estremi*, e rispettivamente *punto iniziale* e *punto finale*, di  $\gamma$ ; diremo che  $\gamma$  è un arco *congiungente*  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ . Diremo che  $\gamma$  è una *curva chiusa* se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , cioè se il punto iniziale e il punto finale coincidono. Se  $U \subset \mathbb{C}$  è un aperto, diremo che  $\gamma$  è *contenuta in*  $U$  se la sua immagine è contenuta in  $U$ . Scriveremo anche  $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ . Con abuso di linguaggio, chiameremo *punti di*  $\gamma$  i punti di  $\gamma([a, b])$ .

Se  $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$  è un'applicazione differenziabile tale che  $\varphi(c) = a$ ,  $\varphi(d) = b$  e  $\varphi'(t) > 0$  per ogni  $t \in [c, d]$ , la composizione

$$\gamma \circ \varphi : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$$

si dice una *riparametrizzazione* di  $\gamma$ .

Nel seguito considereremo anche applicazioni continue

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

non necessariamente differenziabili. Una funzione  $F$  siffatta verrà talvolta chiamata una *curva continua*. La definizione di riparametrizzazione si estende senza cambiamenti alle curve continue.

**Lemma 2.1.1.** *Se  $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  è una curva (o una curva continua), per ogni intervallo chiuso e limitato  $[c, d]$  esiste una riparametrizzazione di  $F$  definita in  $[c, d]$ .*

*Dimostr.* È sufficiente osservare che  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  definita da:

$$\varphi(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{ad-bc}{d-c}$$

definisce la riparametrizzazione.  $\square$

La *derivata* di una curva  $\gamma$  in  $t \in [a, b]$  è  $\gamma'(t) = \gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)$ . La *velocità* di  $\gamma$  in  $t$  è  $|\gamma'(t)|$ .

L'*opposta* di una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è la curva

$$\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$$

Gli estremi di  $\gamma^-$  coincidono con gli estremi di  $\gamma$ , ma il punto iniziale a finale sono scambiati tra loro.

Un *arco*, o *cammino*, è una successione finita

$$\gamma = \{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}\}$$

di curve tale che il punto finale di  $\gamma^{(i)}$  coincida con il punto iniziale di  $\gamma^{(i+1)}$  per ogni  $i = 1, \dots, n-1$ . Il punto iniziale di  $\gamma^{(1)}$  è detto *punto iniziale* di  $\gamma$ , mentre il punto finale di  $\gamma^{(n)}$  è detto *punto finale* di  $\gamma$ . L'arco  $\gamma$  si dice *chiuso* se il punto iniziale e il punto finale coincidono.

L'arco *opposto* di  $\gamma = \{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}\}$  è

$$\gamma^- = \{\gamma^{(n)-}, \dots, \gamma^{(1)-}\}$$

Se le curve  $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$  che compongono un dato arco  $\gamma$  sono definite negli intervalli  $[b_1, c_1], \dots, [b_n, c_n]$  rispettivamente, allora possiamo assegnare a piacere un intervallo  $[a, b]$  ed una sua partizione

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

e, utilizzando il Lemma 2.1.1, riparametrizzare  $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$  in modo che i nuovi intervalli di definizione siano  $[a_0, a_1], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ . In tal modo  $\gamma$  sarà identificato ad una curva continua

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

di classe  $C^1$  al di fuori eventualmente dei punti  $a_i$ . Viceversa, è ovvio che se si assegna una curva continua che sia di classe  $C^1$  al di fuori di un numero finito di punti dell'intervallo di definizione, essa definisce un arco. Pertanto un arco può anche essere definito in questo modo. Nel seguito utilizzeremo indifferentemente una o l'altra delle due definizioni di arco.

**Esempio 2.1.2.** Se  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  sono due numeri complessi distinti, il *segmento* di estremi  $z_0, z_1$  è la curva

$$[z_0, z_1] : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

definita da  $[z_0, z_1](t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$ . Si noti che  $[z_0, z_1]$  è ben definito anche se  $z_0 = z_1$ . Se  $z_0, z_1, \dots, z_n$  sono numeri complessi allora la *poligonale* di vertici  $z_0, z_1, \dots, z_n$  è l'arco

$$\{[z_0, z_1], \dots, [z_{n-1}, z_n]\}$$

che si denoterà semplicemente con il simbolo  $[z_0, z_1, \dots, z_n]$ .

Se  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $R > 0$ , la *circonferenza* di centro  $z_0$  e raggio  $R$  è la curva

$$C_{R, z_0} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$C_{R, z_0}(\theta) = z_0 + R e^{i\theta} = z_0 + R \cos(\theta) + iR \sin(\theta)$$

Se  $z_0 = 0$  scriveremo anche  $C_R$  invece di  $C_{R, 0}$ .

Per comodità del lettore richiamiamo il seguente risultato elementare:

**Proposizione 2.1.3.** *Sia  $S \subset \mathbb{C}$  un sottoinsieme. L'applicazione*

$$\rho : \mathbb{C} \setminus S \longrightarrow \mathbb{R}$$

*definita da*

$$\rho(z) = \inf\{|z - p| : p \in S\}$$

*è continua.  $\rho$  è chiamata funzione distanza da  $S$ .*

*Dimostr.* Sarà sufficiente dimostrare che, per ogni  $z, w \in \mathbb{C} \setminus S$ , si ha:

$$|\rho(z) - \rho(w)| \leq |z - w|$$

Dato  $z \in \mathbb{C} \setminus S$  e  $\epsilon > 0$ , per definizione di  $\rho$  esiste  $p \in S$  tale che  $|z - p| \leq \rho(z) + \epsilon$ . Quindi:

$$|w - p| \leq |w - z| + |z - p| \leq |w - z| + \rho(z) + \epsilon$$

e quindi

$$\rho(w) \leq |w - p| \leq |w - z| + \rho(z) + \epsilon$$

cioè  $\rho(w) - \rho(z) \leq |w - z| + \epsilon$ . Poiché  $\epsilon$  è arbitrariamente piccolo, ciò implica la disuguaglianza da dimostrare.  $\square$

Nel seguito utilizzeremo il seguente lemma.

**Lemma 2.1.4.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto,  $F : [a, b] \longrightarrow U$  una curva continua. Allora esiste una suddivisione*

$$a = a_0 < \dots < a_n = b$$

*dell'intervallo  $[a, b]$  ed una successione finita di dischi aperti  $\{D_0, \dots, D_{n-1}\}$  contenuti in  $U$  e tali che*

$$F([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i, \quad i = 0, \dots, n-1$$

*Dimostr.* Poniamo  $\phi(t) = \rho(F(t))$ , dove  $\rho$  è la funzione distanza da  $\mathbb{C} \setminus U$ . Per la Proposizione 2.1.3 la funzione

$$\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita da  $\phi(t) = \rho(F(t))$ , è continua, e quindi ammette minimo perché  $[a, b]$  è compatto. Sia

$$r := \min_{[a, b]} \{\phi(t)\}$$

Essendo  $U$  aperto,  $r > 0$ . Poiché  $F$  è uniformemente continua, esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $t, s \in [a, b]$  tali che  $|s - t| < \delta$ , si abbia

$$|F(s) - F(t)| < \frac{r}{2}$$

Consideriamo una partizione  $a = a_0 < \dots < a_n = b$  di  $[a, b]$  tale  $a_{i+1} - a_i < \delta$  per ogni  $i = 0, \dots, n-1$ , e sia  $D_i$  il disco aperto di centro  $F(a_i)$  e raggio  $r$ . Allora dalla costruzione segue che la partizione scelta e  $\{D_0, \dots, D_{n-1}\}$  hanno le proprietà richieste.  $\square$

Introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 2.1.5.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto. Due archi  $\gamma, \eta : [a, b] \longrightarrow U$  si diranno vicini se esiste una partizione*

$$a = a_0 < \dots < a_n = b$$

*dell'intervallo  $[a, b]$  ed una successione finita di dischi aperti  $\{D_0, \dots, D_{n-1}\}$  contenuti in  $U$  tali che*

$$\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i \text{ e } \eta([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i$$

*per  $i = 0, \dots, n-1$ .*

Nel calcolare un integrale complesso risulta spesso utile sostituire un arco di integrazione con un altro ad esso vicino. Tale sostituzione può talvolta venire iterata, mediante un procedimento di deformazione continua dell'arco, che viene chiamato "omotopia".

**Definizione 2.1.6.** *Siano  $F, G$  due curve continue definite sullo stesso intervallo  $[a, b]$  e contenute in un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ . Una omotopia tra  $F$  e  $G$  è un'applicazione continua:*

$$\psi : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow U$$

*per qualche intervallo  $[c, d]$ , tale che*

$$\psi(t, c) = F(t), \quad \psi(t, d) = G(t)$$

*per ogni  $t \in [a, b]$ . Se  $F$  e  $G$  hanno stesso punto iniziale  $z_0$  e stesso punto finale  $z_1$ , diremo che  $\psi$  lascia fissi gli estremi se inoltre si ha:*

$$\psi(a, s) = z_0, \quad \psi(b, s) = z_1$$

*per ogni  $s \in [c, d]$ .*

Dalla definizione segue che se  $\psi$  è un'omotopia tra  $F$  e  $G$  allora per ogni  $s \in [c, d]$

$$\psi_s : [a, b] \longrightarrow U$$

definita da  $\psi_s(t) = \psi(t, s)$ , è una curva continua e  $\psi_c = F$ ,  $\psi_d = G$ . Quindi un'omotopia definisce una famiglia di curve continue che realizzano una deformazione continua di  $F$  in  $G$ . Se  $F$  e  $G$  hanno gli stessi estremi, le diremo *omotope* se esiste un'omotopia tra  $F$  e  $G$  che lascia fissi gli estremi. Se  $F$  e  $G$  sono curve continue chiuse, le diremo *omotope* se esiste un'omotopia  $\psi$  tra  $F$  e  $G$  tale che  $\psi_s$  sia una curva continua chiusa per ogni  $s \in [c, d]$ .

**Esempio 2.1.7.** Un sottoinsieme  $S \subset \mathbb{C}$  si dice *convesso* se, per ogni  $z_0, z_1 \in S$ , il segmento  $[z_0, z_1]$  è contenuto in  $S$ . È facile verificare che un insieme convesso è connesso. Ovviamente  $\mathbb{C}$  è convesso.

Due qualsiasi curve continue  $\gamma, \eta : [a, b] \longrightarrow U$  contenute in un aperto convesso  $U$  sono omotope. Infatti ponendo:

$$\psi(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s\eta(t)$$

si definisce un'omotopia  $\psi : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow U$  tra  $\gamma$  e  $\eta$ . Se  $\gamma$  e  $\eta$  hanno gli stessi estremi allora  $\psi$  fissa gli estremi; Se  $\gamma$  e  $\eta$  sono chiuse anche  $\psi_s$  è chiusa per ogni  $s \in [0, 1]$ .

**Esempio 2.1.8.** Un sottoinsieme  $S \subset \mathbb{C}$  si dice *convesso rispetto ad un suo punto*  $w \in S$  se per ogni  $z \in S$  il segmento  $[z, w]$  è contenuto in  $S$ .

Se  $U \subset \mathbb{C}$  è un aperto convesso rispetto ad un suo punto  $w$  allora due qualsiasi curve continue  $\gamma, \eta : [a, b] \longrightarrow U$  sono omotope. Un'omotopia è data da:

$$\psi(t, s) = \begin{cases} (1 - 2s)\gamma(t) + 2sw & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - s)w + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)\eta(t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Se  $\gamma$  e  $\eta$  hanno gli stessi estremi allora  $\psi$  fissa gli estremi; Se  $\gamma$  e  $\eta$  sono chiuse anche  $\psi_s$  è chiusa per ogni  $s \in [0, 1]$ .

**Esempio 2.1.9.** Sia  $w \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = w + Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , la circonferenza di centro  $w$  e raggio  $R > 0$ . Sia  $z_0$  un punto interno alla circonferenza, ed  $r > 0$  tale che  $|z_0 - w| + r < R$ . Sia  $\eta(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $r$ . Allora  $\gamma$  ed  $\eta$  sono omotope.

Un'omotopia è data da:

$$\psi(t, s) = s \left[ z_0 + r \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|} \right] + (1 - s)\gamma(t)$$

Attraverso un'omotopia è possibile costruire successioni di archi vicini, utilizzando il seguente lemma:

**Lemma 2.1.10.** Sia  $\psi : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow U$  un'omotopia tra due curve continue  $F, G$ . Allora esistono partizioni

$$a = a_0 < \dots < a_n = b, \quad c = c_0 < \dots < c_m = d$$

tali che per ogni  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ , posto

$$R_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$$

l'immagine  $\psi(R_{ij})$  sia contenuta in un disco aperto  $D_{ij}$  contenuto in  $U$ . In particolare, se  $s, s' \in [c_j, c_{j+1}]$  per qualche  $j$ , allora gli archi  $\psi_s$  e  $\psi_{s'}$  sono vicini.

*Dimostr.* L'ultima affermazione è un'immediata conseguenza della prima. Dimostriamo la prima asserzione. Sia  $\rho$  la funzione distanza da  $\mathbb{C} \setminus U$ . Ponendo  $\phi(t, s) = \rho(\psi(t, s))$  otteniamo un'applicazione

$$\phi : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

che è continua per la Proposizione 2.1.3. Per la compattezza essa ammette un minimo  $r$ , che è positivo perché  $U$  è aperto. D'altra parte, la compattezza implica che  $\psi$  è uniformemente continua. Pertanto esiste  $\delta > 0$  tale che  $|\psi(t, s) - \psi(t', s')| < r/2$  se  $|t - t'| < \delta$  e  $|s - s'| < \delta$ . suddividiamo gli intervalli  $[a, b]$  e  $[c, d]$  in sottointervalli di diametro minore di  $\delta$ :

$$a = a_0 < \dots < a_n = b, \quad c = c_0 < \dots < c_m = d$$

Per costruzione, per ogni  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ , il disco  $D_{ij}$  di centro  $\psi(a_i, c_j)$  e raggio  $r$  è contenuto in  $U$  e contiene  $\psi(R_{ij})$ .  $\square$

Introduciamo una importante classe di insiemi aperti.

**Definizione 2.1.11.** Un aperto  $U \subset \mathbb{C}$  si dice semplicemente connesso se è connesso e se ogni curva continua chiusa contenuta in  $U$  è omotopa ad una curva costante.

**Esempio 2.1.12.** Segue dagli esempi 2.1.7 e 2.1.8 che sono semplicemente connessi gli aperti convessi e, più in generale, gli aperti convessi rispetto ad un loro punto. In particolare sono semplicemente connessi:

- (i) un disco aperto;
- (ii) un semipiano aperto;
- (iii) il complementare di una semiretta chiusa.

## 2.2 Integrazione lungo archi

Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , e sia  $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$  una curva continua data da:

$$F(t) = u(t) + iv(t)$$

Definiamo l'integrale indefinito di  $F$  come

$$\int F(t)dt = \int u(t)dt + i \int v(t)dt$$



e definiamo l'integrale (definito) di  $F$  su  $[a, b]$  come:

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

In altre parole la definizione di integrale (definito o indefinito) è data applicando alle funzioni  $u(t)$  e  $v(t)$  le corrispondenti definizioni dell'analisi di variabile reale. Pertanto dal teorema fondamentale del calcolo discende che la funzione

$$t \mapsto \int_a^t F(s)ds$$

è differenziabile, e che la sua derivata è la funzione  $F(t)$ .

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è una curva, definiamo la *lunghezza* di  $\gamma$  come

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

cioè come l'integrale della sua velocità.

Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione continua su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$  e se  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  è una curva, definiamo l'integrale di  $f$  esteso a  $\gamma$  come

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Se  $\gamma = \{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}\}$  è un arco in  $U$  allora l'integrale di  $f$  esteso a  $\gamma$  è definito come:

$$\int_{\gamma} f := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma^{(i)}} f$$

**Lemma 2.2.1.**

(i) Se  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione continua allora

$$\left| \int_a^b F(t)dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt$$

(ii) Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione continua su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  è una curva, e  $\eta : [c, d] \rightarrow U$  una sua riparametrizzazione, allora:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\eta} f(z)dz$$

(iii) Se  $f$  e  $\gamma$  sono come in (ii), allora:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \|f\|_{\gamma} L(\gamma)$$

dove

$$\|f\|_{\gamma} := \max_{t \in [a, b]} \{|f(\gamma(t))|\}$$

(iv) Se  $f$  e  $\gamma$  sono come in (ii), allora

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$$

*Dimostr.* (i) Per ogni partizione  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  di  $[a, b]$  abbiamo la disuguaglianza

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} F(a_k)(a_{k+1} - a_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |F(a_k)|(a_{k+1} - a_k)$$

Passando al limite la disuguaglianza si conserva e si ottiene la conclusione.

(ii) Supponiamo che la riparametrizzazione sia della forma  $\eta(t) = \gamma(\varphi(t))$  dove

$$\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\eta} f(z)dz &= \int_c^d f(\eta(t))\eta'(t)dt \\ &= \int_c^d f(\eta(t))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \\ &= \int_{\gamma} f(z)dz \end{aligned}$$

(iii) Segue dalla (i) e dalla disuguaglianza

$$\int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \leq \|f\|_{\gamma} \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

(iv) è lasciata come esercizio. □

Avremo anche bisogno del seguente lemma:

**Lemma 2.2.2.** Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni continue su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ , che converge uniformemente ad una funzione  $f$ . Sia  $\gamma$  un arco in  $U$ . Allora

$$\lim_n \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f$$

Se  $\sum_n f_n$  è una serie di funzioni continue in  $U$  che converge uniformemente in  $U$ , allora

$$\int_{\gamma} \sum_n f_n = \sum_n \int_{\gamma} f_n$$

*Dimostr.* La prima affermazione segue immediatamente dalla disuguaglianza:

$$\left| \int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f \right| \leq \int_{\gamma} |f_n - f| \leq \sup_{\gamma} \{|f_n - f|\} L(\gamma)$$

La seconda asserzione segue dalla prima applicata alla successione delle somme parziali della serie. □

**Esempio 2.2.3.** Sia  $f(z) = 1/z$ . Allora, per ogni  $R > 0$  si ha:

$$\int_{C_R} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Sia ora  $f(z) = \bar{z}$ . Allora:

$$\int_{C_R} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} Re^{-i\theta} Rie^{i\theta} d\theta = R^2 i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i R^2$$

Ricordiamo che, se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione continua definita su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ , una *primitiva* per  $f$  è una funzione olomorfa  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $g'(z) = f(z)$  in  $U$ .

**Teorema 2.2.4.** Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua definita su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ .

(i) Se  $f$  ha una primitiva  $g$  in  $U$  allora, per ogni  $z_0, z_1 \in U$  e per ogni arco  $\gamma$  in  $U$  congiungente  $z_0$  a  $z_1$  si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(z_1) - g(z_0)$$

In particolare quest'integrale non dipende dal particolare arco congiungente  $z_0$  a  $z_1$  utilizzato per calcolarlo.

(ii) Se  $U$  è connesso vale anche il viceversa. Cioè, se per ogni  $z_0, z_1 \in U$  l'integrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

ha lo stesso valore qualsiasi sia l'arco  $\gamma$  contenuto in  $U$  congiungente  $z_0$  a  $z_1$ , allora  $f$  possiede una primitiva in  $U$ .

*Dimostr.* (i) Supponiamo dapprima che  $\gamma$  sia una curva. Allora si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b g'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) dt \\ &= g(\gamma(t)) \Big|_a^b \\ &= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Se  $\gamma = \{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}\}$  è un arco in  $U$  tale che gli estremi di  $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$  siano rispettivamente  $\{z_0, w_1\}, \dots, \{w_{i-1}, w_i\}, \dots, \{w_{n-1}, z_1\}$  allora si ha, per

la prima parte della dimostrazione:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{i=1}^n \int_{\gamma^{(i)}} f(z) dz \\ &= (g(w_1) - g(z_0)) + (g(w_2) - g(w_1)) + \cdots + (g(z_1) - g(w_{n-1})) \\ &= g(z_1) - g(z_0) \end{aligned}$$

(ii) Fissiamo un punto  $z_0 \in U$  e definiamo:

$$g(z) := \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$$

dove  $\gamma$  è un qualsiasi arco in  $U$  congiungente  $z_0$  a  $z$ . Per ipotesi quest'integrale è indipendente da  $\gamma$  e pertanto può essere denotato

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

Poiché  $U$  è connesso  $g(z)$  è ben definita per ogni  $z \in U$ . Per ogni  $z \in U$  e per ogni  $h \in \mathbb{C}$  tale che  $z+h \in U$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta + \int_z^{z_0} f(\zeta) d\zeta \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Poiché  $U$  è aperto, quando  $|h|$  è sufficientemente piccolo il segmento congiungente  $z$  a  $z+h$  è contenuto in  $U$  e quindi l'ultimo integrale in (3.13) può essere calcolato su tale segmento. Scriviamo:

$$f(\zeta) = f(z) + \varphi(\zeta)$$

dove  $\varphi$  è una funzione continua su  $U$  tale che  $\lim_{\zeta \rightarrow z} \varphi(\zeta) = 0$ . Allora si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(z) d\zeta + \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} \varphi(\zeta) d\zeta \\ &= f(z) + \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} \varphi(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Sostituendo in (3.13) otteniamo:

$$\left| \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} \varphi(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|} |h| \max\{|\varphi(\zeta)|\}$$

dove il max è calcolato sul segmento  $[z, z+h]$ . Poiché

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max\{|\varphi(\zeta)|\} = 0$$

la conclusione segue. □

È immediato verificare che il Teorema 2.2.4 è equivalente al seguente:

**Teorema 2.2.5.** Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua definita su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ .

(i) Se  $f$  ha una primitiva in  $U$  allora per ogni arco chiuso  $\gamma$  contenuto in  $U$  si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

(ii) Se  $U$  è connesso e se per ogni arco chiuso  $\gamma$  contenuto in  $U$  si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

allora  $f$  possiede una primitiva in  $U$ .

**Esempio 2.2.6.** Per ogni  $n \geq 0$  la funzione  $z^n$  possiede la primitiva  $\frac{z^{n+1}}{n+1}$  in  $\mathbb{C}$ . Se  $n \leq -2$  la funzione  $z^n$  possiede la primitiva  $\frac{z^{n+1}}{n+1}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Pertanto si ha

$$\int_{\gamma} z^n dz = 0 \begin{cases} \text{per ogni } \gamma \text{ chiuso se } n \geq 0 \\ \text{per ogni } \gamma \text{ chiuso non contenente } 0 \text{ se } n \leq -2 \end{cases}$$

In particolare deduciamo che, se  $P(z)$  è un polinomio, allora

$$\int_{\gamma} P(z) dz = 0$$

per ogni arco chiuso  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$ .

D'altra parte, dall'esempio (2.2.3) e dal Teorema 2.2.5 segue che la funzione  $z^{-1}$  non possiede una primitiva in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Esempio 2.2.7.** Se  $\sum_{k \geq 0} a_k (z - a)^k$  è una serie di potenze convergente in un disco  $D$  di centro  $a$ , allora la sua somma è una funzione analitica  $f(z)$  che possiede primitiva in  $D$ , data dalla somma della serie  $\sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}$  (cfr. Proposizione 1.5.8). Segue dal Teorema 2.2.5 che  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  per ogni arco chiuso  $\gamma$  contenuto in  $D$ .

## 2.3 Il teorema di Goursat

Il teorema di Goursat, che dimostreremo in questo paragrafo, dà informazioni sull'integrazione di funzioni olomorfe in un caso molto particolare. Ciò nonostante esso è indispensabile per la dimostrazione del teorema di Cauchy, che daremo successivamente.

**Teorema 2.3.1.** Sia  $R$  un rettangolo in  $\mathbb{C}$  e sia  $f(z)$  una funzione olomorfa in un aperto contenente  $R$ . Allora

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

dove  $\partial R$  denota l'arco costituito dai quattro lati del perimetro di  $R$  percorso in verso antiorario.

*Dimostr.* Suddividiamo il rettangolo  $R$  in quattro rettangoli uguali,  $R_1, \dots, R_4$ , bisecandone i lati. Otteniamo:

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial R_i} f(z) dz$$

e pertanto

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\partial R_i} f(z) dz \right|$$

Da questa disuguaglianza segue che per almeno uno dei quattro rettangoli  $R_1, \dots, R_4$ , chiamiamolo  $R^{(1)}$ , si ha

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial R^{(1)}} f(z) dz \right|$$

Ora ragioniamo nello stesso modo sul rettangolo  $R^{(1)}$ , suddividendolo a sua volta in quattro rettangoli uguali. Deduciamo che per uno di essi, chiamiamolo  $R^{(2)}$ , si ha:

$$\left| \int_{\partial R^{(1)}} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial R^{(2)}} f(z) dz \right|$$

e quindi:

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4^2 \left| \int_{\partial R^{(2)}} f(z) dz \right|$$

Procedendo in questo modo otteniamo una successione di rettangoli

$$R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset R^{(3)} \supset \dots$$

tali che:

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial R^{(n)}} f(z) dz \right| \quad (2.2)$$

per ogni  $n$ .

Denotiamo con  $c_n$  il centro di  $R^{(n)}$ . La successione  $\{c_n\}$  è di Cauchy. Infatti, dato  $\epsilon > 0$ , sia  $N$  tale che il diametro di  $R^{(N)}$  sia minore di  $\epsilon$ . Se  $n, m \geq N$  allora  $c_n$  e  $c_m$  stanno in  $R^{(N)}$  e quindi

$$|c_n - c_m| < \epsilon$$

Sia  $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Allora  $z_0 \in R^{(n)}$  per ogni  $n$  perché  $R^{(n)}$  è chiuso: ne segue che

$$z_0 \in \bigcap_n R^{(n)}$$

Ma poiché il diametro degli  $R^{(n)}$  tende a 0 la loro intersezione non può contenere più di un punto. Quindi

$$\{z_0\} = \bigcap_n R^{(n)}$$

Consideriamo un disco  $V$  di centro  $z_0$  tale che per ogni  $z \in V$  si abbia:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)h(z)$$

dove  $h(z)$  è una funzione continua in  $V$  e tale che  $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$ . Abbiamo, per tutti gli  $n \gg 0$ ,  $R^{(n)} \subset V$  e quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R^{(n)}} f(z) dz &= f(z_0) \int_{\partial R^{(n)}} dz + f'(z_0) \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0) dz \\ &+ \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0) h(z) dz \end{aligned}$$

Dall'esempio 2.2.6 segue che i primi due integrali a secondo membro sono nulli e quindi:

$$\int_{\partial R^{(n)}} f(z) dz = \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0) h(z) dz$$

Denotiamo con  $L_0$  la lunghezza di  $\partial R$ , e con  $L_n$  quella di  $\partial R^{(n)}$ . Allora si ha  $L_n = 2L_{n+1}$  cosicché per ogni  $n$ :

$$L_0 = 2^n L_n$$

Pertanto, tenuto conto di (2.2), abbiamo:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial R^{(n)}} f(z) dz \right| \\ &\leq 4^n \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0) h(z) dz \leq 4^n \frac{1}{2^n} L_0 \max_{R^{(n)}} \{|z - z_0| |h(z)|\} \\ &\leq 2^n L_0 \text{diam}(R^{(n)}) \max_{R^{(n)}} \{|h(z)|\} \end{aligned}$$

Ma poiché  $\text{diam}(R^{(n)}) = \frac{1}{2^n} \text{diam}(R)$  otteniamo

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq L_0 \text{diam}(R) \max_{R^{(n)}} \{|h(z)|\}$$

Il secondo membro tende a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ , e quindi il teorema è dimostrato.  $\square$

**Osservazione 2.3.2.** Il teorema di Goursat sussiste anche se al posto di un rettangolo si considera un triangolo. La dimostrazione è molto simile.

Il teorema di Goursat ha la seguente notevole conseguenza:

**Teorema 2.3.3.** *Sia  $D$  un disco aperto e sia  $f(z)$  olomorfa in  $D$ . Allora  $f(z)$  ha una primitiva in  $D$ , e l'integrale di  $f$  su un qualsiasi arco chiuso contenuto in  $D$  è 0.*

*Dimostr.* Sia  $z_0$  il centro di  $D$ . Definiamo

$$g(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

dove l'integrale è esteso ad una delle due poligonali congiungenti  $z_0$  e  $z$  e costituita da due lati consecutivi del rettangolo di vertici opposti  $z_0$  e  $z$ . Sia  $h$  tale che  $z + h \in D$ . Abbiamo:

$$g(z+h) - g(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta$$

dove l'ultimo integrale è esteso alla poligonale costituita da due lati consecutivi del rettangolo di vertici opposti  $z$  e  $z+h$ , e l'ultima uguaglianza è vera per il teorema di Goursat. Poiché  $f$  è continua in  $z$ , possiamo scrivere

$$f(\zeta) = f(z) + \psi(\zeta)$$

in un intorno di  $z$ , dove  $\psi(\zeta)$  è una funzione continua tale che  $\lim_{\zeta \rightarrow z} \psi(\zeta) = 0$ . Allora:

$$g(z+h) - g(z) = \int_z^{z+h} f(z) d\zeta + \int_z^{z+h} \psi(\zeta) d\zeta = hf(z) + \int_z^{z+h} \psi(\zeta) d\zeta$$

Se  $h = h_1 + ih_2$  allora la lunghezza della poligonale congiungente  $z$  con  $z+h$  a cui è esteso l'integrale precedente è uguale a  $|h_1| + |h_2|$ . Pertanto:

$$\left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \psi(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|} (|h_1| + |h_2|) \max\{|\psi(\zeta)|\}$$

dove il max è calcolato sulla suddetta poligonale. Ma allora:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - f(z) \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} (|h_1| + |h_2|) \max\{|\psi(\zeta)|\} = 0$$

Ciò dimostra che  $g$  è una primitiva per  $f$ . L'ultima affermazione segue dal Teorema 2.2.5.  $\square$

## 2.4 Il teorema di Cauchy

In questo paragrafo cercheremo di capire fino a che punto l'integrale di una funzione olomorfa è indipendente dall'arco di integrazione. Iniziamo con qualche osservazione preparatoria.

Sia  $f$  una funzione olomorfa su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ , e sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  un arco in  $U$ . Per il Lemma 2.1.4 esistono una suddivisione

$$a = a_0 < \dots < a_n = b$$

dell'intervallo  $[a, b]$  e dischi aperti  $\{D_0, \dots, D_{n-1}\}$  contenuti in  $U$  tali che  $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i$  per ogni  $i = 0, \dots, n-1$ . Per il teorema 2.3.3, per ogni  $i = 0, \dots, n-1$



possiamo trovare una funzione olomorfa  $g_i : D_i \rightarrow \mathbb{C}$  che è una primitiva della restrizione di  $f$  a  $D_i$ . Denotiamo con

$$\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow D_i$$

Allora si ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} [g_i(\gamma(a_{i+1})) - g_i(\gamma(a_i))] \quad (2.3)$$

dove l'ultima uguaglianza è una conseguenza del Teorema 2.2.4.

**Teorema 2.4.1.** *Sia  $f$  una funzione olomorfa su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ . Siano  $\gamma, \eta$  due archi contenuti in  $U$  e vicini (secondo la Definizione 2.1.5) aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\eta} f(z) dz$$

*Dimostr.* Sia  $[a, b]$  l'intervallo di definizione dei due archi. Poiché  $\gamma$  e  $\eta$  sono vicini, esistono una partizione  $a = a_0 < \dots < a_n = b$  e dischi aperti  $D_0, \dots, D_{n-1}$  contenuti in  $U$  e tali che

$$\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i \supset \eta([a_i, a_{i+1}])$$

Denotiamo con:

$$z_i := \gamma(a_i), \quad w_i := \eta(a_i)$$

Sia  $g_i : D_i \rightarrow \mathbb{C}$  una primitiva di  $f$  su  $D_i$ . Allora la (2.3) implica la seguente identità:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\eta} f(z) dz &= \sum_{i=0}^{n-1} [(g_i(z_{i+1}) - g_i(z_i)) - (g_i(w_{i+1}) - g_i(w_i))] \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} [(g_i(z_{i+1}) - g_{i+1}(z_{i+1})) - (g_i(w_{i+1}) - g_{i+1}(w_{i+1}))] \\ &\quad - g_0(z_0) + g_0(w_0) + g_{n-1}(z_n) - g_{n-1}(w_n) \end{aligned}$$

Ora osserviamo che su  $D_i \cap D_{i+1}$  sia  $g_{i+1}$  che  $g_i$  sono primitive di  $f$ , e quindi  $g_i - g_{i+1}$  è costante su  $D_i \cap D_{i+1}$  perché quest'aperto è connesso. Ne segue che

$$g_i(z_{i+1}) - g_{i+1}(z_{i+1}) = g_i(w_{i+1}) - g_{i+1}(w_{i+1})$$

e quindi otteniamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\eta} f(z) dz = -g_0(z_0) + g_0(w_0) + g_{n-1}(z_n) - g_{n-1}(w_n) \quad (2.4)$$

Ma  $\gamma$  ed  $\eta$  hanno gli stessi estremi, cioè  $z_0 = w_0$  e  $z_n = w_n$ . Quindi

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\eta} f(z) dz = 0$$

□

Il risultato analogo per gli archi chiusi è il seguente:

**Teorema 2.4.2.** *Sia  $f$  una funzione olomorfa su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ . Siano  $\gamma, \eta$  due archi chiusi contenuti in  $U$  e vicini (secondo la Definizione 2.1.5). Allora*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\eta} f(z)dz$$

*Dimostr.* La dimostrazione procede in modo del tutto simile a quella del Teorema 2.4.1, ma la conclusione è diversa. Infatti ora  $g_0$  e  $g_{n-1}$  sono due primitive di  $f$  nell'aperto connesso  $D_0 \cap D_{n-1}$  e quindi  $g_0 - g_{n-1}$  è costante su  $D_0 \cap D_{n-1}$ . Ma allora, poiché  $z_0 = z_n$  e  $w_0 = w_n$  il secondo membro della (2.4) si annulla.  $\square$

Una ovvia generalizzazione è la seguente.

**Corollario 2.4.3.** *Sia  $f$  una funzione olomorfa su un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ . Siano  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  archi contenuti in  $U$  aventi lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Supponiamo che per ogni  $j = 1, \dots, m-1$  gli archi  $\gamma_j$  e  $\gamma_{j+1}$  siano vicini. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_m} f(z)dz$$

*La stessa conclusione vale se si suppone che gli  $m$  archi  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ , anziché avere gli stessi estremi, siano chiusi.*

Ora possiamo dimostrare il risultato più importante di questo capitolo.

**Teorema 2.4.4 (Cauchy).** *Sia  $f$  una funzione olomorfa in un aperto  $U \subset \mathbb{C}$ , e siano*

$$\gamma, \eta : [a, b] \longrightarrow U$$

*due archi aventi stessi estremi. Se  $\gamma$  e  $\eta$  sono omotopi, si ha:*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\eta} f(z)dz$$

*La stessa conclusione vale se  $\gamma$  e  $\eta$  sono due archi chiusi omotopi.*

*Dimostr.* Dimostriamo il teorema nel caso di archi aventi stessi estremi. Il caso degli archi chiusi è simile e viene lasciato al lettore.

Possiamo supporre che  $\gamma$  e  $\eta$  siano definite sullo stesso intervallo  $[a, b]$ ; siano  $z_0$  e  $z_1$  i loro punti iniziale e finale. Sia

$$\psi : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow U$$

un'omotopia tra  $\gamma$  e  $\eta$  che fissa  $z_0$  e  $z_1$ . Siano

$$a = a_0 < \dots < a_n = b, \quad c = c_0 < \dots < c_m = d$$

partizioni tali che esistano dischi aperti  $D_{ij} \subset U$  per cui si abbia  $\psi(R_{ij}) \subset D_{ij}$ , dove

$$R_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}], \quad i = 0, \dots, n-1; \quad j = 0, \dots, m-1$$

(cfr. Lemma 2.1.10). Dal Lemma 2.1.10 segue che per ogni  $j = 0, \dots, m-1$ , le curve continue  $\psi_{c_j}$  e  $\psi_{c_{j+1}}$  sono vicine. Se si suppone che tali curve siano degli archi (cioè siano quasi ovunque di classe  $C^1$ ), allora il teorema segue dal Corollario 2.4.3.

Nel caso in cui tale ulteriore condizione non sia soddisfatta procediamo nel seguente modo. Poniamo

$$z_{ij} := \psi(a_i, c_j)$$

Sia  $g_{ij}$  una primitiva di  $f$  nel disco  $D_{ij}$ , e poniamo:

$$S_j = \sum_{i=0}^{n-1} [g_{ij}(z_{i+1j}) - g_{ij}(z_{ij})]$$

Poiché  $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_{i0}$  e  $\eta([a_i, a_{i+1}]) \subset D_{im-1}$  per ogni  $i = 0, \dots, n-1$ , per la (2.3) abbiamo:

$$S_0 = \int_{\gamma} f(z) dz, \quad S_{m-1} = \int_{\eta} f(z) dz$$

Pertanto sarà sufficiente dimostrare che  $S_j = S_{j+1}$  per ogni  $j = 0, \dots, m-2$ . Osserviamo che  $D_{ij} \cap D_{i+1j}$  è connesso per ogni  $i = 0, \dots, n-1$ ; pertanto esistono costanti  $\kappa_{ij}$  tali che:

$$g_{i+1j} = g_{ij} + \kappa_{ij}$$

e quindi possiamo riscrivere:

$$g_{i+1j+1}(z_{i+1j+1}) - g_{i+1j+1}(z_{ij+1}) = g_{ij}(z_{i+1j+1}) - g_{ij}(z_{ij+1})$$

Pertanto abbiamo:

$$\begin{aligned} S_j - S_{j+1} &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [(g_{ij}(z_{i+1j}) - g_{ij}(z_{ij})) - (g_{ij}(z_{i+1j+1}) - g_{ij}(z_{ij+1}))] \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} [(g_{ij}(z_{i+1j}) - g_{i+1j}(z_{i+1j})) - (g_{ij}(z_{i+1j+1}) - g_{i+1j}(z_{i+1j+1}))] \\ &\quad + (-g_{0j}(z_{0j}) + g_{0j}(z_{0j+1})) + (g_{n-1j}(z_{nj}) - g_{n-1j}(z_{nj+1})) \end{aligned}$$

L'ultima riga è nulla perché  $z_{0j} = z_0 = z_{0j+1}$  e  $z_{nj} = z_1 = z_{nj+1}$ . D'altra parte la funzione  $g_{ij} - g_{i+1j}$  è costante sull'aperto connesso  $D_{ij} \cap D_{i+1j}$ , e quindi si ha:

$$g_{ij}(z_{i+1j}) - g_{i+1j}(z_{i+1j}) = g_{ij}(z_{i+1j+1}) - g_{i+1j}(z_{i+1j+1})$$

per ogni  $i = 1, \dots, n-2$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ . Sostituendo si trova  $S_j - S_{j+1} = 0$ .  $\square$

Nel caso degli aperti semplicemente connessi abbiamo il seguente:

**Corollario 2.4.5.** *Sia  $U$  un aperto semplicemente connesso, e sia  $f \in H(U)$ . Allora per ogni arco chiuso  $\gamma$  in  $U$  si ha*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

*Equivalentemente, dati  $z_0, z_1 \in U$ , e due archi  $\gamma, \eta$  di estremi  $z_0$  e  $z_1$ ,*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\eta} f(z)dz$$

*Inoltre  $f$  possiede una primitiva in  $U$ .*

*Dimostr.* L'equivalenza delle due prime affermazioni è evidente. Dimostriamo la prima. Poiché  $\gamma$  è omotopo ad un arco costante  $c_{z_0}$ , si ha, per il teorema di Cauchy:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{c_{z_0}} f(z)dz = 0$$

L'ultima affermazione segue dal Teorema 2.2.5(ii).  $\square$

L'esistenza di primitive garantita dal Corollario 2.4.5 è di grande importanza. Come semplice applicazione abbiamo:

**Proposizione 2.4.6.** *L'aperto  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  non è semplicemente connesso.*

*Dimostr.* La funzione  $f(z) = 1/z$  è olomorfa in  $U$ , ma non possiede una primitiva in  $U$  (Esempio 2.2.6). Quindi  $U$  non è semplicemente connesso, per il Corollario 2.4.5.  $\square$

Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto connesso e sia  $\alpha \in U$ . Se  $f \in H(U)$  possiede una primitiva  $g(z)$  in  $U$  allora esiste una costante  $c$  tale che

$$g(z) = \int_{\alpha}^z f(\zeta)d\zeta + c$$

dove l'integrale è esteso ad un qualsiasi arco congiungente  $\alpha$  a  $z$  (Teorema (2.2.4)). Ad esempio, se  $z_0 \in \mathbb{C}$  è un punto qualsiasi e se

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

è somma di una serie convergente in un disco  $D = D(z_0, R)$ ,  $R > 0$ , allora  $f$  ha la primitiva in  $D$

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

e quindi in  $D$

$$h(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta + c$$

per qualche  $c$ , perché  $D$  è connesso.

**Esempio 2.4.7.** Consideriamo l'aperto  $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ , che è semplicemente connesso (Esempio 2.1.12). La funzione  $1/z$  è olomorfa in  $U$  e quindi, per il Corollario 2.4.5, possiede una primitiva che può essere espressa nella forma:

$$g(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

D'altra parte, la serie

$$l(z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

converge in  $D = D(1, 1)$  e soddisfa  $l'(z) = 1/z$ , cioè  $l(z)$  è una primitiva di  $1/z$  nel disco  $D$ . Pertanto, essendo  $l(1) = 0 = g(1)$  ed essendo  $D$  connesso, si ha  $g(z) = l(z)$  in  $D$ . Nel disco  $D$  la funzione  $l(z)$  è anche una inversa formale di  $e^w$ , cioè  $e^{l(z)} = z$  (cfr. esercizio pag. ??). Ma allora, per il principio di identità delle funzioni analitiche, si ha anche

$$e^{g(z)} = z$$

in  $U$ . In altre parole  $g(z)$  definisce una determinazione di  $\ln z$  in  $U$ . Se  $g(z) + c$  è un'altra primitiva di  $1/z$ , si ha

$$e^{g(z)+c} = ze^c$$

e quindi  $g(z) + c$  definisce un'altra determinazione di  $\ln z$  se e solo se  $e^c = 1$ , cioè se e solo se  $c = 2k\pi i$  per qualche intero  $k$ . Vediamo pertanto che tra tutte le primitive di  $1/z$  le determinazioni di  $\ln z$  sono precisamente quelle della forma:

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} + 2k\pi i$$

## 2.5 La formula integrale di Cauchy

Il seguente risultato fornisce una semplice espressione per il valore di una funzione olomorfa in un punto.

**Teorema 2.5.1** (Formula integrale di Cauchy). *Sia  $f$  olomorfa in un aperto  $U$  contenente un disco chiuso  $\overline{D}$ . Sia  $\gamma$  la frontiera di  $\overline{D}$  percorsa in senso antiorario. Allora, per ogni  $z_0 \in D$  si ha:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

*Dimostr.* Sia  $r > 0$  e sia  $\eta$  la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $r$ . Se  $r$  è sufficientemente piccolo allora  $\gamma$  e  $\eta$  sono omotope (Esempio 2.1.9, pag. 47). Sia  $U_0 = U \setminus \{z_0\}$ . Allora  $\gamma$  e  $\eta$  sono contenute in  $U_0$  e sono omotope in  $U_0$ , come risulta dalla definizione dell'omotopia  $\psi$  dell'Esempio 2.1.9. La funzione

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

è olomorfa in  $U_0$ . Per il Teorema 2.4.4 abbiamo:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\eta} g(z) dz$$

Poiché  $f$  è olomorfa in  $z_0$  segue che  $g$  è limitata in un intorno di  $z_0$ . Sia  $|g| \leq B > 0$  per ogni  $|z - z_0| < \epsilon$ . Allora, se  $r < \epsilon$  si ha:

$$\left| \int_{\eta} g(z) dz \right| \leq B 2\pi r$$

Poiché il secondo membro tende a 0 al tendere di  $r$  a 0 otteniamo

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} - \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0}$$

Ma:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} = f(z_0) 2\pi i$$

e la formula di Cauchy segue.  $\square$

Le più importanti conseguenze della formula di Cauchy sono il seguente teorema e il suo corollario.

**Teorema 2.5.2.** *Sia  $f$  olomorfa in un aperto  $U$  contenente un disco chiuso  $\bar{D} = \bar{D}(z_0, R)$  di centro un punto  $z_0$  e raggio  $R > 0$ . Sia  $\gamma$  la frontiera di  $\bar{D}$  percorsa in senso antiorario. Allora  $f$  ha un'espansione in serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k \quad (2.5)$$

in cui i coefficienti sono dati dalla formula:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

e si ha:

$$|a_k| \leq \frac{\|f\|_{\gamma}}{R^k} \quad (2.6)$$

Le (2.6) sono dette disuguaglianze di Cauchy. In particolare il raggio di convergenza della serie (2.5) è  $\geq R$ .

*Dimostr.* Per il teorema 2.5.1 abbiamo, per tutti gli  $z \in D(z_0, R)$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Sia  $0 < s < R$ , e scriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left( \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right) \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \left( 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

Se  $\zeta \in \partial D_R(z_0)$  e  $|z - z_0| \leq s$  si ha

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq s/R < 1$$

e quindi la serie nella precedente espressione converge assolutamente e uniformemente; inoltre la funzione  $f$  è limitata su  $\gamma$ . Allora, per il Lemma 2.2.2, pag. 50, possiamo integrare termine a termine e otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k \geq 0} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

dove

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

La stima sui moduli dei coefficienti segue dalla stima dell'integrale a secondo membro data dal Lemma 2.2.1(iii), pag. 49, tenendo conto che  $L(\gamma) = 2\pi R$ , e che  $|\zeta - z_0| = R$ . Dal criterio della radice segue subito che il raggio di convergenza della serie è  $\geq R$ .  $\square$

**Corollario 2.5.3.** *Se  $f \in H(U)$  allora  $f$  è analitica in  $U$ .*

*Dimostr.* Segue immediatamente dal Teorema 2.5.1.  $\square$

Poiché sappiamo che ogni funzione analitica è olomorfa, vediamo che queste due classi di funzioni coincidono. Pertanto **d'ora in poi non faremo distinzione tra funzioni analitiche e funzioni olomorfe.**

Dal Corollario 2.5.3 deduciamo il seguente risultato:

**Teorema 2.5.4** (Morera). *Sia  $f$  una funzione continua su un aperto connesso  $U \subset \mathbb{C}$ . Supponiamo che per ogni disco aperto  $D \subset U$  si abbia*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

*per ogni arco chiuso contenuto in  $D$ . Allora  $f$  è olomorfa.*

*Dimostr.* Per il Teorema 2.2.5(ii), per ogni  $D \subset U$ ,  $f|_D$  possiede una primitiva  $g$ . Poiché  $g$  è olomorfa, essa è anche analitica in  $U$ , per il Corollario 2.5.3. Ma allora  $f|_D = g'$  è anch'essa analitica, e quindi olomorfa. Poiché  $U$  può essere ricoperto da dischi aperti, segue che  $f$  è olomorfa in  $U$ .  $\square$

Dimostriamo un altro importante risultato che discende dal Teorema 2.5.2:

**Teorema 2.5.5** (Liouville). *Una funzione intera e limitata è costante.*

*Dimostr.* Ricordiamo che una funzione si dice intera se è olomorfa in tutto il piano. Poiché  $f$  è intera possiede uno sviluppo in serie della forma:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

che ha raggio di convergenza  $\infty$ , per il teorema 2.5.2. Sia  $B > 0$  tale che  $|f(z)| \leq B$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Allora  $\|f\|_{C_R} \leq B$  per ogni  $R > 0$  e dal Teorema 2.5.2 deduciamo:

$$|a_k| \leq \frac{B}{R^k}$$

per ogni  $k \geq 0$  e per ogni  $R > 0$ . Ne discende  $a_k = 0$  per ogni  $k \geq 1$ , cioè  $f = a_0$ , una costante.  $\square$

**Esempio 2.5.6.** Le funzioni  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  sono intere e non costanti, quindi non limitate. Questo fatto è evidente per la funzione esponenziale, che non è limitata anche come funzione di variabile reale. Le due funzioni trigonometriche invece sono limitate come funzioni di variabile reale. Ma se  $z = iy$  è puramente immaginario allora:

$$|\cos iy| = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \geq \frac{e^y}{2}$$

e quindi

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} |\cos iy| = \infty$$

Similmente si dimostra che  $\sin z$  non è limitata.

**Corollario 2.5.7.** *Una funzione intera e non costante ha immagine densa in  $\mathbb{C}$ .*

*Dimostr.* Supponiamo che  $f(z)$  sia una funzione intera. Se la sua immagine non è densa allora esistono  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $s > 0$  tali che

$$|f(z) - \alpha| > s$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . La funzione

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

è intera e soddisfa  $|g(z)| < 1/s$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , cioè è limitata. Ma allora  $g$  è costante per il teorema di Liouville, e quindi anche  $f$  è costante.  $\square$

Il Corollario 2.5.7 è un caso particolare di un teorema più preciso, dovuto a Picard, il quale afferma che l'immagine di una funzione intera non costante consiste di tutto  $\mathbb{C}$  privato di al più un punto. La dimostrazione del teorema di Picard è molto più difficile.

Il teorema di Liouville permette di dare un'altra dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, già dimostrato a pag. 41 utilizzando il principio del massimo modulo.



**Corollario 2.5.8** (Teorema fondamentale dell'algebra). *Sia*

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_dz^d$$

*un polinomio non costante a coefficienti complessi. Allora  $f$  possiede almeno una radice, cioè esiste  $z_0$  tale che  $f(z_0) = 0$ .*

*Dimostr.* Possiamo supporre  $a_d \neq 0$ ,  $d > 0$ . Se  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z$  allora la funzione

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

è ancora una funzione intera. Scrivendo:

$$f(z) = a_dz^d \left( \frac{a_d^{-1}a_0}{z^d} + \frac{a_d^{-1}a_1}{z^{d-1}} + \cdots + 1 \right)$$

vediamo che

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty \tag{2.7}$$

e quindi

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |g(z)| = 0$$

Ne discende che, se  $R \gg 0$ ,  $|g(z)|$  è limitato dal suo massimo nel disco chiuso di raggio  $R$ , in particolare  $g$  è limitata. Ma allora  $g$  è costante, per il teorema di Liouville, e quindi  $f$  è costante, una contraddizione.  $\square$

**Osservazione:** lo stesso ragionamento non può applicarsi alla funzione  $f(z) = e^z$  per dimostrare che possiede qualche zero, perché l'analogia della (2.7) non è vera.



## Capitolo 3

# Singularità isolate e residui

### 3.1 Serie di Laurent

Una *serie di Laurent formale* è una serie formale

$$\sum_n a_n T^n$$

in cui la somma è estesa a tutti gli interi  $n \in \mathbb{Z}$ . Ad una serie di Laurent sono associate due serie formali (nel senso della definizione del paragrafo 1.2)  $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$  e  $\sum_{n > 0} a_{-n} T^n$ . Supponiamo che le due serie abbiano raggi di convergenza positivi, siano essi rispettivamente  $r_1$  ed  $1/r_2$ , intendendo  $r_2 = 0$  nel caso in cui la seconda serie abbia raggio di convergenza  $\infty$ . Allora la funzione

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

è olomorfa nel disco aperto  $D(0, r_1)$ . La funzione

$$g(u) = \sum_{n > 0} a_{-n} u^n$$

è olomorfa per  $|u| < \frac{1}{r_2}$  e la sua derivata è la funzione somma della serie:

$$g'(u) = \sum_{n > 0} n a_{-n} u^{n-1}$$

Pertanto la funzione

$$f_2(z) = g(1/z) = \sum_{n < 0} a_n z^n \tag{3.1}$$

è ben definita ed olomorfa per  $|z| > r_2$ . Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} f_2'(z) &= -\frac{1}{z^2}g'(1/z) \\ &= -\sum_{n>0} na_{-n}z^{-(n-1)-2} \\ &= \sum_{n>0} -na_{-n}z^{-n-1} \\ &= \sum_{n<0} na_nz^{n-1} \end{aligned}$$

e pertanto  $f_2(z)$  è olomorfa per  $|z| > r_2$  e la sua derivata è la somma della serie ottenuta derivando termine a termine la serie (3.1).

Supponiamo che sia  $r_2 < r_1$ . Allora la somma delle serie

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \quad (3.2)$$

è olomorfa nella corona circolare aperta

$$K = \{z : r_2 < |z| < r_1\}$$

e la sua derivata è la somma della serie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} na_n z^{n-1}$  ottenuta derivando la (3.2) termine a termine. La (3.2) è detta una *serie di Laurent convergente nella corona circolare K*. Nella definizione non si escludono i casi  $r_2 = 0$  e  $r_1 = \infty$ . È immediato verificare che la serie (3.2) converge uniformemente e assolutamente nella corona circolare chiusa  $\{z : \rho_2 \leq |z| \leq \rho_1\}$ , per ogni  $r_2 < \rho_2 < \rho_1 < r_1$ .

Il coefficiente  $a_{-1}$  di  $1/z$  è detto il *residuo* della serie di Laurent (3.2).

## 3.2 La serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare

Sia  $a \in \mathbb{C}$  e sia  $f(z)$  una funzione definita in una corona circolare aperta

$$K = \{z : r_2 < |z - a| < r_1\} \quad (3.3)$$

Diremo che  $f$  ha uno sviluppo in serie di Laurent se esiste una serie di Laurent  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$  convergente nella corona circolare  $K$  la cui somma coincide con  $f$ . Per quanto dimostrato nel paragrafo precedente,  $f(z)$  è olomorfa in  $K$ .

**Teorema 3.2.1.** *Sia  $f(z)$  una funzione olomorfa nella corona circolare aperta (3.3). Allora  $f$  possiede uno sviluppo in serie di Laurent, che è unico.*

*Dimostr.* Sia (3.3) la corona circolare in cui è definita  $f(z)$ . Possiamo supporre  $a = 0$ , salvo a sostituire  $t = z - a$  e considerare la funzione  $f(t + a)$ . Fissiamo numeri reali positivi  $\rho'_1, \rho_1, \rho'_2, \rho_2$  tali che

$$r_2 < \rho'_2 < \rho_2 < \rho_1 < \rho'_1 < r_1$$

Siano

$$\gamma_1(t) = \rho'_1 e^{it}, \quad \gamma_2(t) = \rho'_2 e^{it}$$

$t \in [0, 2\pi]$ , le circonferenze di raggi  $\rho'_1$  e  $\rho'_2$  rispettivamente. Sia  $z$  tale che  $\rho_2 \leq |z| \leq \rho_1$ . Allora si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3.4)$$

Per verificarlo sia  $\theta_0 = \arg(z)$ , e si consideri un settore circolare

$$\Sigma_\epsilon = \{u : \rho'_2 \leq |u| \leq \rho'_1, \theta_0 - \epsilon \leq \arg(u) \leq \theta_0 + \epsilon\}$$

per  $0 < \epsilon < \pi$ . Sia  $F_\epsilon$  la frontiera di  $\Sigma_\epsilon$ . Allora

$$F_\epsilon = \{\eta_1, S_\epsilon, \eta_2, R_\epsilon\}$$

è un arco costituito da quattro curve, di cui  $\eta_1$  e  $\eta_2$  sono archi delle circonferenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2^-$ , mentre

$$S_\epsilon(s) = [\rho'_1 + s(\rho'_2 - \rho'_1)]e^{i(\theta_0 + \epsilon)}$$

$$R_\epsilon(s) = [\rho'_2 + s(\rho'_1 - \rho'_2)]e^{i(\theta_0 - \epsilon)}$$

sono segmenti contenuti in semirette per l'origine. Allora:

- (i) per ogni  $0 < \epsilon, \epsilon' < \pi$ , gli archi  $F_\epsilon$  e  $F_{\epsilon'}$  sono omotopi.
- (ii) se  $\epsilon > 0$  è sufficientemente piccolo,  $F_\epsilon$  è omotopo ad una circonferenza  $C_r$  di raggio  $r > 0$  contenuta nella corona circolare  $\rho'_2 \leq |u| \leq \rho'_1$ .

Pertanto, per la formula di Cauchy e per il Teorema 2.4.4, si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{F_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Quando  $\epsilon \rightarrow \pi$  l'integrale a secondo membro tende a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

cioè al secondo membro della (3.4). Pertanto la (3.4) è dimostrata.

Consideriamo il primo integrale nella (3.4). Possiamo scrivere

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta(1 - \frac{z}{\zeta})} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

e, poiché questa serie converge uniformemente nella circonferenza  $\gamma_1$ , possiamo integrare termine a termine, ottenendo:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$$

Consideriamo ora il secondo integrale nella (3.4). Scriviamo:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z(1 - \frac{\zeta}{z})} = -\sum_{n < 0} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

Sostituendo nell'integrale e integrando termine a termine grazie all'uniforme convergenza della serie in  $\gamma_2$ , otteniamo:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n < 0} a_n z^n$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$$

Pertanto, dalla (3.4) otteniamo:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \tag{3.5}$$

per ogni  $\rho_2 \leq |z| \leq \rho_1$ . Facendo tendere  $\rho_2 \rightarrow r_2$  e  $\rho_1 \rightarrow r_1$  vediamo che la (3.5) fornisce lo sviluppo in serie di Laurent di  $f(z)$  nella corona circolare  $r_2 < |z| < r_1$ .

Unicità. Scriviamo  $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ , dove

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

e

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n < 0} a_n z^n$$

sono funzioni univocamente determinate da  $f(z)$ . Poiché  $f_1(z)$  è olomorfa nel disco  $D(0, r_1)$ , i coefficienti  $a_n$ ,  $n \geq 0$ , sono univocamente determinati. D'altra parte, la funzione  $f_2(1/u)$  è olomorfa nel disco  $D(0, 1/r_2)$  e quindi anche il suo sviluppo in serie di potenze è univocamente determinato, cioè i coefficienti  $a_n$ ,  $n < 0$ , sono univocamente determinati.  $\square$

**Esempio 3.2.2.** La funzione  $f(z) = 1/z^n$ ,  $n > 0$ , è olomorfa nella corona circolare  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , e coincide con la sua serie di Laurent.

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Il suo sviluppo in serie di Laurent in 0 è:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n \geq 0} z^n$$

e questa serie converge in  $0 < |z| < 1$ . Invece lo sviluppo in serie di Laurent di  $f$  in 1 è:

$$\frac{1}{z-1} + \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z-1)^n$$

e converge nella corona circolare  $0 < |z-1| < 1$ .

La funzione  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  è olomorfa nella corona circolare  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La sua serie di Laurent è:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! z^n}$$

**Esempio 3.2.3.** La serie di Laurent

$$g(z) = \sum_{n \leq 0} z^n$$

converge nella corona circolare  $1 < |z|$  e ha per somma la funzione  $\frac{z}{z-1}$ . Infatti

$$g(1/z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

converge in  $D(0, 1)$  e ha per somma  $\frac{1}{1-z}$ . Si osservi che la funzione  $\frac{z}{z-1}$  è somma della serie

$$\sum_{n \geq 1} -z^n$$

nel disco  $D(0, 1)$ .

### 3.3 Singolarità isolate

Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $a \in U$ . Se  $f \in H(U \setminus \{a\})$  diremo che  $f$  ha una *singolarità isolata nel punto  $a$* . In tal caso, per il Teorema 3.2.1,  $f$  possiede uno sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n \quad (3.6)$$

nella corona circolare

$$D(a, R) \setminus \{a\} = \{z : 0 < |z-a| < R\}$$

per qualche  $R > 0$ .

**Definizione 3.3.1.** Nella situazione precedente diremo che

- $f$  ha una singolarità eliminabile in  $a$ , ovvero  $a$  è una singolarità eliminabile per  $f$ , se la serie (3.6) è una serie di potenze, cioè  $a_n = 0$  per ogni  $n < 0$ .

- $f$  ha una singolarità polare in  $a$ , ovvero  $a$  è un polo per  $f$ , se  $a_n \neq 0$  per qualche  $n < 0$ , e solo un numero finito di coefficienti  $a_n$ , con  $n < 0$ , è diverso da 0. Se  $m > 0$  è il più grande intero tale che  $a_{-m} \neq 0$  diremo che  $f$  ha un polo di ordine  $m$  in  $a$ , ovvero che  $a$  è un polo di ordine  $m$  per  $f$ . Diremo anche che  $f$  ha ordine  $-m$  in  $a$ , e scriveremo  $-m = o_a(f)$ .
- $f$  ha una singolarità essenziale in  $a$ , ovvero  $a$  è una singolarità essenziale per  $f$ , se  $a_n \neq 0$  per infiniti  $n < 0$ .

**Teorema 3.3.2.** Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto,  $a \in U$  e  $f \in H(U \setminus \{a\})$ . Le condizioni seguenti sono equivalenti:

- (i) La funzione  $f$  ha una singolarità eliminabile in  $a$ .
- (ii)  $f$  può essere estesa ad una funzione olomorfa in tutto  $U$ .
- (iii)  $f$  è limitata in  $D(a, R) \setminus \{a\}$  per qualche  $R > 0$ .

*Dimostr.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Se  $f$  ha una singolarità eliminabile la serie di Laurent (3.6) si riduce ad una serie di potenze a raggio di convergenza positivo, la cui somma è una funzione olomorfa in un intorno di  $a$  che estende  $f$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Se  $f$  si estende a tutto  $U$  allora il suo sviluppo di Taylor in  $a$  coincide con il suo sviluppo in serie di Laurent in  $a$  e quindi la singolarità è eliminabile.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) è ovvio.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Se  $n < 0$  allora:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} f(z) z^{-n-1} dz$$

dove  $0 < r < R$  e  $C_r(a)$  è la circonferenza di centro  $a$  e raggio  $r$  (vedere la dimostrazione del Teorema 3.2.1). Poiché  $f$  è limitata in un intorno di  $a$  l'integrale a secondo membro tende a 0 al tendere di  $r \rightarrow 0$ , e quindi  $a_n = 0$ .  $\square$

Se  $f \in H(U \setminus \{a\})$  e (3.6) è il suo sviluppo di Laurent in  $a$ , la funzione somma della serie:

$$Q(z) = \sum_{n < 0} a_n (z - a)^n$$

è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ , e si dice la *parte principale* di  $f(z)$  in  $a$ . Allora:

$$f(z) - Q(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$$

in un disco di centro  $a$ , e quindi ha una singolarità eliminabile in  $a$ . Pertanto  $f(z) - Q(z)$  si estende ad una funzione olomorfa in  $U$ .

È immediato verificare che se  $f \in H(U \setminus \{a\})$  ha un polo di ordine  $m$  in  $a$  allora  $(z - a)^m f(z)$  è olomorfa in tutto  $U$ . Viceversa, se  $g \in H(U)$  allora

$$f(z) = (z - a)^{-m} g(z) \in H(U \setminus \{a\})$$



e  $f$  ha un polo di ordine  $m$  in  $a$ . Lo sviluppo in serie di Laurent di  $f$  in  $a$  ha la forma:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$$

In questo caso la parte principale di  $f$  in  $a$  è la funzione razionale:

$$Q(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)}$$

Un polo di ordine 1 si dice un *polo semplice*. Da quanto appena visto si deduce immediatamente la seguente proposizione:

**Proposizione 3.3.3.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $f \in H(U \setminus \{a\})$ . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i)  $f$  ha un polo di ordine  $\leq m$  in  $a$ .
- (ii)  $(z-a)^m f(z)$  ha una singolarità eliminabile in  $a$ .
- (iii) esistono  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$  tali che

$$f(z) - \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{(z-a)^j}$$

abbia una singolarità eliminabile.

Se  $f$  è una funzione olomorfa in  $U \setminus S$  dove  $S \subset U$  è un sottoinsieme discreto, e se in ogni punto di  $S$  la  $f$  ha un polo o una singolarità eliminabile, diremo che  $f$  è *meromorfa* in  $U$ , o *su*  $U$ . Dalla definizione e dal Teorema 3.3.2 segue che le funzioni olomorfe in  $U$  sono particolari funzioni meromorfe.

Sia  $f \in H(U)$  e sia  $S \subset U$  l'insieme dei suoi zeri. Supponiamo  $U$  connesso e che  $f$  non sia identicamente nulla. Allora  $S \neq U$  e per ogni  $a \in S$  possiamo scrivere

$$f(z) = (z-a)^r h(z)$$

dove  $r = o_a(f) > 0$  e  $h \in H(U)$  soddisfa  $h(a) \neq 0$ . Pertanto  $g(z) = 1/h(z)$  è olomorfa in un intorno di  $a$  e quindi la funzione

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^{-r} g(z)$$

è meromorfa in un intorno di  $a$ , e ha ordine  $-r$  in  $a$ . Vediamo quindi che se una funzione  $f$  è meromorfa nell'intorno di un punto  $a$  allora anche  $1/f$  lo è e inoltre una almeno delle due funzioni è olomorfa in  $a$ .

Da quanto appena osservato, possiamo concludere che se  $U$  è connesso e  $f, g \in H(U)$  con  $g$  non identicamente nulla, allora  $f/g$  è meromorfa in  $U$ . In particolare, se  $P(z), Q(z)$  sono polinomi, e  $Q \neq 0$ , allora  $P/Q$  è una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$ .

Denotiamo con  $M(U)$  l'insieme delle funzioni meromorfe su un aperto connesso  $U$ . Dalla discussione che precede segue immediatamente che per ogni  $f, g \in M(U)$  si ha che  $f \pm g, fg \in M(U)$  e, se  $g$  non è identicamente nulla, anche  $f/g \in M(U)$ . Ciò implica che  $M(U)$  è un campo, che viene chiamato il *campo delle funzioni meromorfe su  $U$* .

**Teorema 3.3.4** (Casorati-Weierstrass). *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto,  $a \in U$ , e  $f \in H(U \setminus \{a\})$ . Se  $a$  è una singolarità essenziale per  $f$  allora per ogni disco aperto  $D$  di centro  $a$  e contenuto in  $U$ , l'immagine  $f(D \setminus \{a\})$  è un sottoinsieme denso di  $\mathbb{C}$ .*

*Dimostr.* Supponiamo per assurdo che il teorema sia falso per un disco  $D = D(a, R)$ . Allora esistono  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $s > 0$  tali che

$$|f(z) - \alpha| > s$$

per ogni  $z \in D \setminus \{a\}$ . La funzione:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

è olomorfa in  $D \setminus \{a\}$  e limitata in  $D$ . Quindi, per il Teorema 3.3.2,  $a$  è una singolarità eliminabile per  $g$ , e  $g$  può essere estesa ad una funzione olomorfa in  $D$ . Pertanto

$$\frac{1}{g(z)} = f(z) - \alpha$$

ha al più un polo in  $a$ , e ciò è vero anche per  $f(z)$ . Ma così è contraddetta l'ipotesi che  $f$  abbia una singolarità essenziale in  $a$ .  $\square$

**Corollario 3.3.5.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto,  $a \in U$ , e  $f \in H(U \setminus \{a\})$ .  $a$  è una singolarità essenziale per  $f$  se e solo se non esiste il limite:*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

*Dimostr.* Dal Teorema 3.3.4 segue che se  $a$  è una singolarità essenziale allora il limite non esiste. D'altra parte se  $a$  è una singolarità eliminabile allora il limite esiste finito per il Teorema 3.3.2. Se invece  $a$  è un polo di ordine  $m \geq 1$  per  $f$  allora  $f(z) = (z - a)^{-m}g(z)$  con  $g(z)$  una funzione che ha una singolarità eliminabile in  $a$ . Pertanto:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(z - a)^m} \lim_{z \rightarrow a} g(z) = \infty$$

e quindi anche in questo caso il limite esiste.  $\square$

**Esempio 3.3.6.** La funzione  $e^{\frac{1}{z}}$  ha una singolarità essenziale in 0 perché il suo sviluppo in serie di Laurent è:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! z^n}$$

In questo caso è facile verificare direttamente la validità del Teorema 3.3.4. Sia infatti  $R > 0$  arbitrario,  $D = D(0, R)$ , e sia  $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ . Allora esiste un numero intero  $k \gg 0$  tale che

$$w := \log |\alpha| + i(\arg(\alpha) + 2k\pi)$$

abbia  $|w| > 1/R$ . Ma allora  $z := 1/w \in D$  e

$$e^{\frac{1}{z}} = e^w = \alpha$$

Quindi l'immagine di  $D$  tramite la funzione  $e^{\frac{1}{z}}$  è  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; in particolare tale immagine è densa.

**Esempio 3.3.7.** In modo simile a quanto fatto nell'esempio 3.3.6 si verifica che la funzione  $\sin \frac{1}{z}$  ha una singolarità essenziale nell'origine. La funzione:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus S$ , dove  $S = \{0, 1/k\pi : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$ . In ogni punto  $0 \neq a \in S$  la  $g(z)$  ha un polo semplice. In  $a = 0$  la  $g$  non ha una singolarità isolata, perché 0 è un punto di accumulazione di poli di  $g$ . Quindi  $g(z)$  non possiede uno sviluppo in serie di Laurent in 0. Quest'esempio mostra che l'insieme delle funzioni che possiedono singolarità isolate in un fissato aperto connesso  $U$  in generale non costituiscono un campo, come invece avviene per l'insieme  $M(U)$  delle funzioni meromorfe su  $U$ .

**Esempio 3.3.8.** La funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2-1}}$$

possiede singolarità isolate in  $z = \pm 1$  che sono singolarità essenziali. Ciò si verifica facilmente utilizzando il Corollario 3.3.5. La restrizione di  $f$  a all'intervallo reale  $[-1, 1]$  si prolunga ad una funzione  $\varphi$  su tutto  $\mathbf{R}$  definendola identicamente zero al di fuori di  $[-1, 1]$ . La funzione  $\varphi$  è un ben noto esempio di funzione di variabile reale di classe  $C^\infty$  che non è analitica.

### 3.4 Il teorema dei residui

Sia  $f(z)$  una funzione avente una singolarità isolata in un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  e sia

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad (3.7)$$

il suo sviluppo in serie di Laurent in  $z_0$ . Il coefficiente  $a_{-1}$  è detto *residuo di  $f$  in  $z_0$* . Verrà talvolta denotato con

$$a_{-1} = \text{Res}_{z_0}(f)$$

Il residuo ha la seguente interpretazione.

**Proposizione 3.4.1.** *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto,  $z_0 \in U$ , e sia  $f \in H(U \setminus \{z_0\})$ . Se  $C_r$  è una circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $r$  percorsa in senso antiorario, contenuta in  $U$  insieme al disco  $D(z_0, r)$ , allora*

$$\int_{C_r} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f)$$

*Dimostr.* Per l'ipotesi  $f$  possiede uno sviluppo in serie di Laurent (3.7) in  $D(z_0, R) \setminus \{0\}$  per qualche  $R > r$ . Quindi la serie converge uniformemente in  $C_r$ , e pertanto  $f$  può essere integrata termine a termine su  $C_r$ , cioè

$$\int_{C_r} f(z) dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \int_{C_r} (z - z_0)^n dz$$

Ma tutti gli integrali a secondo membro sono nulli eccetto quello relativo al valore  $n = -1$ , che è uguale a  $2\pi i$ .  $\square$

Avremo bisogno della seguente nozione.

**Definizione 3.4.2.** *Sia  $\gamma$  un arco chiuso in  $\mathbb{C}$  e  $z_0 \in \mathbb{C}$  un punto non appartenente all'immagine di  $\gamma$ . L'indice di  $\gamma$  rispetto a  $z_0$ , è*

$$I(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

**Lemma 3.4.3.** *Sia  $\gamma$  un arco chiuso in  $\mathbb{C}$  e  $z_0 \in \mathbb{C}$  un punto non appartenente all'immagine di  $\gamma$ . Allora  $I(\gamma, z_0)$  è un numero intero.*

*Dimostr.* Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , e consideriamo la funzione  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definita da:

$$F(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - z_0} d\tau$$

Si ha

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 2\pi i I(\gamma, z_0)$$

Si osservi che, essendo  $\gamma$  differenziabile a tratti su  $[a, b]$ , la  $F$  è ben definita come somma di integrali estesi ai sottointervalli chiusi di  $[a, t]$  su cui  $\gamma'(\tau)$  è definita. Per lo stesso motivo la  $F(t)$  è continua e differenziabile a tratti in  $[a, b]$ , e la sua derivata è:

$$F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

Si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[ e^{-F(t)} (\gamma(t) - z_0) \right] = e^{-F(t)} \gamma'(t) - F'(t) e^{-F(t)} (\gamma(t) - z_0) = 0$$

e quindi esiste una costante  $C$  tale che  $e^{-F(t)} (\gamma(t) - z_0) = C$ , cioè

$$\gamma(t) - z_0 = C e^{F(t)}$$

Inoltre  $C \neq 0$  perché  $\gamma(t) \neq z_0$  per ogni  $t$ . Ma allora, essendo  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , si ha  $Ce^{F(a)} = Ce^{F(b)}$ , cioè  $e^{F(a)} = e^{F(b)}$ , e quindi esiste un intero  $k$  tale che:

$$F(b) = F(a) + 2k\pi i$$

Poiché  $F(a) = 0$  e  $F(b) = 2\pi i I(\gamma, z_0)$ , deduciamo che  $I(\gamma, z_0) = k$ .  $\square$

Intuitivamente,  $I(\gamma, z_0)$  conta il numero di giri percorsi da  $\gamma$  intorno a  $z_0$ , con segno positivo o negativo a seconda che il senso di rotazione sia antiorario o orario. Ad esempio, se  $r > 0$  e  $C_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  è la circonferenza  $C_r(t) = re^{it}$  allora  $I(C_r, 0) = 1$  (Esempio 2.2.3, pag. 51).

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è un arco chiuso, e  $U = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$  il complementare dell'immagine di  $\gamma$ , allora  $U$  si suddivide in componenti connesse per archi. Poiché  $\gamma([a, b])$  è un sottoinsieme chiuso e limitato, esiste  $R > 0$  tale

$$\gamma([a, b]) \subset \overline{D(0, R)}$$

Pertanto, dato che  $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$  è connesso per archi,  $U$  possiede un'unica componente connessa per archi *illimitata*  $E$ . I punti di  $E$  si diranno *punti esterni* a  $\gamma$ . Gli altri punti di  $U$  si diranno *punti interni* a  $\gamma$ .

Un'altra proprietà significativa dell'indice è descritta dal seguente lemma:

**Lemma 3.4.4.** *Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  un arco chiuso e sia  $U = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$  il complementare dell'immagine di  $\gamma$ . La funzione*

$$z \mapsto I(\gamma, z)$$

*è costante su ogni componente connessa di  $U$  e vale 0 sui punti esterni a  $\gamma$ .*

*Dimostr.* Poiché la funzione dell'enunciato è a valori interi, sarà sufficiente dimostrare che è continua su  $U$ . Ciò è equivalente a far vedere che, per ogni  $z_0 \in U$ ,

$$\int_{\gamma} \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta$$

tende a 0 quando  $z \rightarrow z_0$ . Poiché  $[a, b]$  è compatto è ben definito il numero reale

$$s := \min_{t \in [a, b]} \{|\gamma(t) - z_0|\}$$

e  $s > 0$  perché  $z_0 \notin \gamma([a, b])$ . Tenendo conto che

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}$$

e osservando che  $|\gamma(t) - z| > s/2$  quando  $z$  è sufficientemente vicino a  $z_0$ , otteniamo

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right| < \frac{1}{s^2/4} |z - z_0|$$

Quindi

$$\left| \int_{\gamma} \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta \right| < \frac{1}{s^2/4} |z - z_0| L(\gamma)$$

La conclusione segue dal fatto che il secondo membro tende a 0 quando  $z \rightarrow z_0$ .  
Per dimostrare l'ultima affermazione osserviamo che si ha

$$I(\gamma, z) \leq \max_{t \in [a, b]} \frac{1}{|z - \gamma(t)|} L(\gamma)$$

Poiché

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} \frac{1}{|z - \gamma(t)|} = 0$$

si ha che  $I(\gamma, z) \rightarrow 0$  quando  $|z| \rightarrow \infty$ , e quindi  $I(\gamma, z) = 0$  se  $z \in E$ . □

Diamo ora una formulazione del teorema dei residui, che è sufficientemente generale per il calcolo pratico di molti integrali complessi.

**Teorema 3.4.5** (dei residui). *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto semplicemente connesso,  $z_1, \dots, z_n$  punti distinti di  $U$ ,  $f \in H(U \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$ . Se  $\gamma$  è un arco chiuso contenuto in  $U$  la cui immagine non contiene alcun punto  $z_j$ , allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j}(f) I(\gamma, z_j)$$

Quest'identità è detta formula dei residui.

*Dimostr.* Siano  $Q_1, \dots, Q_n$  le parti principali di  $f$  in  $z_1, \dots, z_n$  rispettivamente. Allora

$$g(z) = f(z) - Q_1 - \dots - Q_n$$

si estende ad una funzione olomorfa in  $U$ , e quindi  $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$ , per il Corollario 2.4.5. Pertanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma} Q_j(z) dz \quad (3.8)$$

Ma poiché

$$\int_{\gamma} (z - z_j)^n dz = 0, \quad n \neq -1 \quad (3.9)$$

(Esempio 2.2.6) abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q_j(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\text{Res}_{z_j}(f)}{(z - z_j)} dz = \text{Res}_{z_j} I(\gamma, z_j)$$

e la conclusione segue. □

Si osservi che, a causa del Lemma 3.4.4, le singolarità di  $f$  che sono esterne a  $\gamma$  non danno alcun contributo al secondo membro della formula dei residui. Pertanto, quando si vuole applicare la formula, ci si può limitare a calcolare i residui nei soli punti interni a  $\gamma$ .

### 3.5 Calcolo esplicito di residui

Se una funzione  $f(z)$  ha una singolarità eliminabile in un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  allora ovviamente il suo residuo in  $z_0$  è nullo.

*Il caso di un polo semplice* - Supponiamo che la funzione  $f(z)$  abbia un polo semplice in  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Allora la funzione

$$g(z) := (z - z_0)f(z)$$

ha una singolarità eliminabile in  $z_0$  e

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

Se ad esempio

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

con  $P, Q$  olomorfe in un intorno di  $z_0$ ,  $P(z_0) \neq 0$ , e  $Q$  ha uno zero semplice in  $z_0$ , allora  $f(z)$  ha un polo semplice in  $z_0$ . Poiché

$$Q(z) = Q'(z_0)(z - z_0) + \sum_{n \geq 2} a_n (z - z_0)^n$$

vediamo che

$$(z - z_0)f(z) = \frac{P(z)}{Q'(z_0) + \sum_{n \geq 2} a_n (z - z_0)^{n-1}}$$

e quindi

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \quad (3.10)$$

Questa formula risulta utile in particolare nel calcolo dei residui delle funzioni razionali.

*Il caso di un polo multiplo* - Supponiamo che  $f(z)$  abbia un polo di ordine  $m \geq 2$  in  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Allora la funzione  $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$  ha una singolarità eliminabile in  $z_0$ , e il  $\operatorname{Res}_{z_0}(f)$  coincide con il coefficiente di  $(z - z_0)^{m-1}$  nello sviluppo in serie di Taylor di  $g(z)$  in  $z_0$ . Pertanto abbiamo:

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

*Il caso di una singolarità essenziale* - In questo caso non ci sono metodi per facilitare il calcolo del residuo. Bisogna calcolare lo sviluppo di Laurent caso per caso.

**Esempio 3.5.1.** La funzione

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}$$

è meromorfa in 0, e ha una singolarità eliminabile in 0, perché

$$o_0(f) = o_0(1 - \cos z) - o_0(z) = 2 - 1 = 1$$

**Esempio 3.5.2.** La funzione  $f(z) = 1/\sin z$  ha un polo semplice in  $\pi$ . Per la formula (3.10) si ha

$$\operatorname{Res}_\pi(f) = \frac{1}{\cos \pi} = -1$$

Quindi

$$\int_{C_R} f(z) dz = \begin{cases} -2\pi i & \text{se } R > \pi \\ 0 & \text{se } 0 < R < \pi \end{cases}$$

**Esempio 3.5.3.** La funzione

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 1}{z^2(1-z)}$$

ha un polo di ordine  $m = 2$  in 0 e un polo semplice in 1. Si ha:

$$\frac{d}{dz}[z^2 f(z)] = \left[ \frac{z^2 - 3z + 1}{1-z} \right]' = \frac{-z^2 + 2z - 2}{(1-z)^2}$$

che calcolata in  $z = 0$  dà:

$$\operatorname{Res}_0(f) = -2$$

Invece:

$$\frac{z^2 - 3z + 1}{(z^2(1-z))'} = \frac{z^2 - 3z + 1}{2z - 3z^2}$$

che calcolata in 1 dà  $\operatorname{Res}_1(f) = 1$ . Quindi

$$\int_{C_R} f(z) dz = \begin{cases} -4\pi i & \text{se } 0 < R < 1 \\ -3\pi i & \text{se } R > 1 \end{cases}$$

**Esempio 3.5.4.** Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$$

I suoi punti singolari sono  $z_0 = 0$  e  $z_1 = 1$ . Il punto 1 è un polo semplice e si ha quindi, per la (3.10):

$$\operatorname{Res}_1(f) = \frac{e}{-1} = -e$$

0 è una singolarità essenziale per  $f(z)$  perché altrimenti anche la funzione  $e^{\frac{1}{z}} = f(z)(1-z)$  avrebbe un polo in 0, il che è falso. Sviluppiamo  $f$  in serie di Laurent nell'intorno di 0. Si ha:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$



e quindi, moltiplicando:

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{1-z} &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \frac{1}{z} + \sum_{n \neq -1} a_n z^n\end{aligned}$$

Quindi il residuo di  $f(z)$  in 0 è:

$$\text{Res}_0(f) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e - 1$$

**Esempio 3.5.5** (derivata logaritmica). Sia

$$f(z) = \sum_{k \geq m} a_k z^k = a_m z^m (1 + h(z))$$

dove  $m \in \mathbb{Z}$ , la serie di Laurent di una funzione avente una singolarità al più polare in 0. Allora si ha

$$f'(z) = \sum_{k \geq m} k a_k z^{k-1} = m a_m z^{m-1} (1 + h(z)) + a_m z^m h'(z)$$

e

$$\frac{f'}{f} = \frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1+h(z)}$$

e  $h'(z)/(1+h(z))$  è olomorfa in 0. Quindi

$$\text{Res}_0(f'/f) = m$$

La funzione  $f'/f$  si dice *derivata logaritmica* di  $f$ . Quindi il suo residuo in 0 coincide con l'ordine di  $f$  in 0.

Quest'ultimo esempio ci conduce al seguente risultato:

**Teorema 3.5.6** (dell'indicatore logaritmico). *Sia  $f(z)$  una funzione meromorfa in un aperto semplicemente connesso  $U \subset \mathbb{C}$ , e sia  $\gamma$  un arco chiuso contenuto in  $U$ , la cui immagine non contenga né zeri né poli di  $f$ . Allora la funzione  $f'/f$  è meromorfa in  $U$ , non ha singolarità sull'immagine di  $\gamma$ , e si ha:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum o_{z_j}(f) I(\gamma, z_j) \quad (3.11)$$

dove la somma è estesa agli zeri e ai poli di  $f(z)$  interni a  $\gamma$ .

*Dimostr.* La derivata logaritmica, essendo quoziente di due funzioni meromorfe, è meromorfa in  $U$ . Più precisamente, dai calcoli locali effettuati nell'Esempio 3.5.5 risulta che  $f'/f$  ha un polo semplice, con residuo  $m$ , in ogni punto in cui  $f$  ha ordine  $m \neq 0$ , e nessun'altra singolarità. La conclusione ora segue dalla formula dei residui.  $\square$

L'integrale a primo membro della (3.11) è detto *indicatore logaritmico* di  $f$  lungo  $\gamma$  (o *relativo a*  $\gamma$ ). Il teorema precedente si applica utilmente in diverse situazioni. Prima di darne delle applicazioni introduciamo un nuovo concetto.

Sia  $f(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$  una funzione olomorfa nel complementare in  $\mathbb{C}$  di un numero finito di punti  $z_1, \dots, z_n$  che sono quindi singolarità isolate per  $f$ . Definiamo il *residuo di  $f(z)$  all'infinito* come

$$\operatorname{Res}_\infty(f) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(z) dz$$

dove  $C_R$  è una circonferenza di centro l'origine e raggio  $R \gg 0$  tale che tutte le singolarità di  $f$  siano contenute in  $D(0, R)$ . Per la formula dei residui e per la scelta di  $R$  abbiamo:

$$\operatorname{Res}_\infty(f) = -\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z_j}(f)$$

In particolare  $\operatorname{Res}_\infty(f)$  non dipende da  $R$ . L'identità precedente può anche mettersi nella forma più suggestiva:

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z_j}(f) + \operatorname{Res}_\infty(f) = 0 \quad (3.12)$$

**Lemma 3.5.7.** *Nella situazione precedente,  $\operatorname{Res}_\infty(f)$  coincide con il residuo in 0 della funzione*

$$g(u) = -\frac{1}{u^2} f(1/u)$$

*Dimostr.* La funzione  $g(u)$  non ha singolarità nella corona circolare  $0 < |u| \leq R^{-1}$  e quindi:

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{Res}_0(g) &= \int_{C_{R^{-1}}} g(u) du \\ &= iR^{-1} \int_0^{2\pi} g(R^{-1}e^{it}) e^{it} dt \\ &= -iR^{-1} \int_0^{2\pi} R^2 e^{-2it} f(Re^{-it}) e^{it} dt \\ &= -iR \int_0^{2\pi} f(Re^{-it}) e^{-it} dt \\ &= \int_{C_R^-} f(z) dz = -\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_\infty(f) \end{aligned}$$

□

Alla luce del Lemma 3.5.7 l'identità (3.12) diventa più significativa, in quanto riduce il calcolo della somma dei residui di  $f$  a quello del residuo di  $g$  in 0.

**Osservazione 3.5.8.** Il motivo per cui nella definizione di residuo all'infinito si richiede che  $f(z)$  abbia solo un numero finito di singolarità è che altrimenti  $g(u)$  non ha una singolarità isolata in 0. Ad esempio

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

ha infiniti poli semplici e

$$f(1/u) = \frac{1}{\sin \frac{1}{u}}$$

non ha una singolarità isolata in 0 (si veda l'esempio 3.3.7).

**Esempio 3.5.9.** Si consideri l'integrale

$$\mathbf{I} = \int_{C_3} \frac{z^9}{z^{10} - 1} dz$$

dove  $C_3$  è la circonferenza di centro 0 e raggio 3. Poiché i poli della funzione integranda  $f(z)$  sono le radici decime dell'unità, essi sono interni a  $C_3$ , e si ha

$$\mathbf{I} = 2\pi i \sum_{j=1}^{10} \text{Res}_{z_j}(f(z))$$

Il laborioso calcolo dei dieci residui può essere evitato utilizzando la (3.12), la quale implica

$$\mathbf{I} = -2\pi i \text{Res}_\infty(f(z))$$

Si ha:

$$\text{Res}_\infty(f(z)) = \text{Res}_0(-u^{-2}f(u^{-1})) = \text{Res}_0(-u^{-1}(1 + u^{10} + u^{20} + \dots)) = -1$$

Pertanto  $\mathbf{I} = 2\pi i$ .

Combinando il Lemma 3.5.7 con il Teorema 3.5.6 otteniamo la seguente versione del teorema fondamentale dell'algebra:

**Teorema 3.5.10** (Teorema fondamentale dell'algebra). *Un polinomio  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  di grado  $n$  possiede  $n$  radici se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità.*

*Dimostr.* La molteplicità di una radice  $\alpha$  di  $P(z)$  è uguale all'ordine della funzione  $P(z)$  in  $\alpha$ . Sia  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ , con  $a_n \neq 0$ . La sua derivata logaritmica:

$$f(z) := \frac{P'(z)}{P(z)}$$

è meromorfa in  $\mathbb{C}$  e possiede poli semplici nelle radici di  $P(z)$  con residuo uguale alla rispettiva molteplicità (Esempio 3.5.5). Pertanto, poiché  $P$  possiede un numero finito di radici, è definito il  $\text{Res}_\infty(f)$ . Si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{u^2} f(1/u) &= -\frac{1}{u^2} P'(u^{-1})P(u^{-1})^{-1} \\ &= -\frac{1}{u^2} (na_n u^{-n+1} + (n-1)a_{n-1}u^{-n+2} + \dots + a_1)(a_n u^{-n} + \dots + a_1 u^{-1} + a_0)^{-1} \\ &= -\frac{1}{u} (na_n + (n-1)a_{n-1}u + \dots + a_1 u^{n-1})(a_n + \dots + a_1 u^{n-1} + a_0 u^n)^{-1} \\ &= -\frac{n}{u} + ((n-1)a_{n-1} + \dots)(1 + \dots + a_n^{-1}a_1 u^{n-1} + a_n^{-1}a_0 u^n)^{-1} \end{aligned}$$

dal che si vede che, per il Lemma 3.5.7:

$$\operatorname{Res}_\infty(f) = \operatorname{Res}_0\left(-\frac{1}{u^2}f(1/u)\right) = -n$$

Ora dalla formula (3.12) otteniamo:

$$\sum(\text{residui di } f) = -\operatorname{Res}_\infty(f) = n$$

e la conclusione segue dalla citata interpretazione dei residui di  $f$  come gli ordini degli zeri di  $P$ .  $\square$

Diamo un'altra utile applicazione del Teorema 3.5.6.

**Teorema 3.5.11** (Rouché). *Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto semplicemente connesso,  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  un arco chiuso,  $f, g \in H(U)$ . Supponiamo che si abbia:*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

per ogni  $z \in \mathfrak{S}(\gamma)$ . Allora:

$$\sum_{z \in U \setminus \mathfrak{S}(\gamma)} I(\gamma, z) o_z(f) = \sum_{z \in U \setminus \mathfrak{S}(\gamma)} I(\gamma, z) o_z(g)$$

*Dimostr.* L'insieme dei punti  $z \in U$  tali che  $I(\gamma, z)$  è definito e non nullo ha chiusura compatta e contenuta in  $U$  e quindi contiene un numero finito di zeri di  $f$  e di  $g$ . Pertanto le sommatorie dell'enunciato contengono solo un numero finito di addendi non nulli e sono ben definite.

L'ipotesi implica che  $f$  e  $g$  non hanno zeri su  $\mathfrak{S}(\gamma)$ . Possiamo dunque riscrivere l'ipotesi nella forma:

$$|F(z) - 1| < 1, \quad z \in \mathfrak{S}(\gamma)$$

dove  $F = g/f$ . Ciò significa che la curva chiusa  $F \circ \gamma$  è contenuta nel disco  $D(1, 1)$  di centro 1 e raggio 1 e quindi  $I(F \circ \gamma, 0) = 0$  perché  $0 \notin D(1, 1)$ . Abbiamo pertanto:

$$\begin{aligned} 0 = I(F \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{F \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{F'(\gamma(t))}{F(\gamma(t))} \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F'}{F} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (g'/g - f'/f) \end{aligned}$$

$\square$

Il caso particolare più utile del teorema di Rouché è il seguente:

**Corollario 3.5.12.** *Nelle ipotesi del Teorema 3.5.11, supponiamo che  $\gamma$  sia una circonferenza, percorsa in senso antiorario, frontiera di un disco aperto  $D \subset U$ . Allora  $f$  e  $g$  hanno lo stesso numero di zeri in  $D$  (se contati con le rispettive molteplicità).*

*Dimostr.* Segue subito dal Teorema 3.5.11 tenendo conto che  $I(\gamma, z) = 1$  se  $z \in D$  e  $I(\gamma, z) = 0$  se  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ .  $\square$

**Esempio 3.5.13.** Sia  $g(z) = z^3 + z^2 + 4z + 1$ . e sia  $C_R$  la circonferenza di centro 0 e raggio  $R$ . Ponendo  $f(z) = 4z$  otteniamo:

$$|f(z) - g(z)| = |z^3 + z^2 + 1| \leq 3 < |4z| = 4, \quad z \in \mathfrak{S}(C_1)$$

Quindi  $g(z)$  possiede lo stesso numero di radici di  $4z$ , cioè 1, nel disco  $D(0, 1)$ . D'altra parte, prendendo  $f(z) = z^3$  e  $R = 3$  otteniamo

$$|f(z) - g(z)| = |z^2 + 4z + 1| \leq 22 < |z^3| = 27, \quad z \in \mathfrak{S}(C_3)$$

e quindi  $g(z)$  ha tutte e tre le radici in  $D(0, 3)$ , due delle quali stanno nella corona circolare  $1 < |z| < 3$ .

**Esempio 3.5.14.** Si consideri l'equazione:

$$z^2 - ae^z = 0$$

dove  $0 < a < e^{-1}$ . Vogliamo determinarne le soluzioni nel disco unitario  $|z| < 1$ . Ponendo  $g(z) = z^2 - ae^z$  e  $f(z) = z^2$  si ha, quando  $|z = x + iy| = 1$ :

$$|g(z) - f(z)| = |-ae^z| = |ae^x| \leq ae < 1 = |f(z)|$$

Quindi, applicando il teorema di Rouché, vediamo che l'equazione assegnata ha due radici nel disco unitario perché  $f(z)$ .

## 3.6 Calcolo di integrali definiti con il metodo dei residui

Il metodo dei residui permette di calcolare diverse classi di integrali definiti reali senza dover calcolare la primitiva della funzione integranda. In questo paragrafo illustreremo questo procedimento in alcuni casi significativi.

*Integrali trigonometrici* - Consideriamo un integrale della forma:

$$\mathbf{I} = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$$

dove  $R(x, y)$  è una funzione razionale il cui denominatore non si annulla nei punti  $(x, y)$  tali che  $x^2 + y^2 = 1$ . Poniamo  $z = e^{it}$ . Si ha quindi:

$$\sin t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

e  $z$  varia nella circonferenza unitaria  $C_1$  al variare di  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Quindi:

$$\mathbf{I} = \int_{C_1} \frac{1}{iz} R \left( \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right) dz$$

Applicando il teorema dei residui otteniamo la seguente identità:

$$\mathbf{I} = 2\pi \sum \operatorname{Res}_{z_j} \left[ \frac{1}{z} R \left( \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right) \right]$$

dove la somma è estesa ai poli  $z_j$  contenuti nel disco unitario  $D(0, 1)$ .

**Esempio 3.6.1.**

$$\mathbf{I} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}$$

dove  $a > 1$  reale. Allora

$$\mathbf{I} = 2\pi \sum \operatorname{Res}_{z_j} \frac{2i}{z^2 + 2iaz - 1}$$

L'unico polo nel disco unitario della funzione a secondo membro è  $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$ . Il suo residuo è

$$\frac{i}{z_0 + ia} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Quindi:

$$\mathbf{I} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

**Esempio 3.6.2.**

$$\mathbf{I} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}, \quad |a| < 1$$

Applicando il metodo precedente si ottiene:

$$\mathbf{I} = i \int_{C_1} \frac{dz}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}$$

Il denominatore  $f(z)$  si annulla per  $z = a, 1/a$ . Poiché  $|a| < 1$  solo il residuo in  $z = a$  contribuisce all'integrale. Applicando (3.10) si trova

$$\operatorname{Res}_a(1/f(z)) = \frac{i}{a^2 - 1}$$

e quindi

$$\mathbf{I} = \frac{2\pi}{1 - a^2}$$

Per calcolare altre classi di integrali definiti avremo bisogno del seguente lemma.

**Lemma 3.6.3.** *Sia  $f(z)$  una funzione meromorfa nell'aperto*

$$U_\epsilon := \{z = x + iy : y > -\epsilon\}$$

per qualche  $\epsilon > 0$  reale. Supponiamo che  $f(z)$  possieda un numero finito di poli e che

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ y \geq 0}} z f(z) = 0$$

Sia  $\gamma_r(t) = r e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , la semicirconferenza di raggio  $r$  di centro l'origine contenuta nel semipiano superiore. Allora

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) = 0$$

*Dimostr.* Per l'ipotesi sui poli di  $f$ , l'integrale è ben definito per tutti gli  $r \gg 0$ . Sia  $M(r) = \max\{|f(z)| : z \in \mathfrak{S}(\gamma_r)\}$ . Allora:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_r} f(z) \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} M(r) r \pi = 0$$

e il lemma segue.  $\square$

*Integrali impropri di funzioni razionali* - Consideriamo un integrale della forma:

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

dove  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  è una funzione razionale reale senza poli sull'asse reale. L'integrale  $\mathbf{I}$  è detto un *integrale improprio*, e per definizione è dato da

$$\mathbf{I} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r R(x) dx$$

Supponiamo che

$$\text{gr}(Q) \geq \text{gr}(P) + 2 \quad (3.13)$$

Per ogni  $r > 0$  tale che  $R(z)$  non abbia poli su  $\gamma_r$  abbiamo la seguente relazione

$$\int_{-r}^r R(x) dx + \int_{\gamma_r} R(z) = 2\pi i \sum \text{Res}_{z_j}(R(z))$$

dove la somma è estesa ai poli  $z_j$  di  $R(z)$  contenuti nel semidisco aperto delimitato dal segmento  $[-r, r]$  e da  $\gamma_r$ . Poiché  $R(z)$  ha un numero finito di poli, per  $r \gg 0$  la somma è estesa a tutti i poli contenuti nel semipiano superiore e quindi non dipende da  $r$ . Passando al limite per  $r \rightarrow +\infty$  otteniamo:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r R(x) dx = 2\pi i \sum_{\Im(z) > 0} \text{Res}_z(R(z)) - \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} R(z)$$

Dal Lemma 3.6.3 segue che il limite a secondo membro esiste ed è uguale a zero. Quindi anche il limite a primo membro esiste e si ha

$$\mathbf{I} = 2\pi i \sum_{\Im(z) > 0} \text{Res}_z(R(z))$$

**Esempio 3.6.4.** Calcoliamo l'integrale

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

La funzione integranda ha nel semipiano superiore l'unico polo  $z = i$ , con residuo uguale a

$$\text{Res}_i \left( \frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{i}{2}$$

Quindi  $\mathbf{I} = -2\pi i \frac{i}{2} = \pi$ .

Si osservi che l'integrale precedente si sarebbe potuto calcolare anche come conseguenza dell'identità  $\frac{1}{1+x^2} = \text{arctg}(x)'$ .

**Esempio 3.6.5.** Consideriamo l'integrale

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$$

Il denominatore dell'integrando  $f(x)$  ha le radici  $-2 \pm 3i$ , di cui solo  $a = -2 + 3i$  è situata nel semipiano superiore. Si ha:

$$\begin{aligned} \text{Res}_a(f(z)) &= \left[ \frac{d}{dz} (z-a)^2 f(z) \right]_a \\ &= \left[ \frac{d}{dz} z(z+2+3i)^{-2} \right]_a \\ &= \frac{i}{2 \cdot 27} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\mathbf{I} = 2\pi i \text{Res}_a(f(z)) = -\frac{\pi}{27}$$

*Terzo tipo* - Consideriamo ora un integrale improprio della forma

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx$$

dove  $f(z)$  è meromorfa nell'aperto  $U_\epsilon := \{z = x + iy : y > -\epsilon\}$  per qualche  $\epsilon > 0$ , ha un numero finito di poli nel semipiano superiore, e non ha poli sull'asse reale. L'integrale  $\mathbf{I}$  è definito come

$$\mathbf{I} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x)e^{ix} dx$$

se il limite esiste. Ragionando come nel caso degli integrali impropri di funzioni razionali deduciamo che si ha, se  $r \gg 0$ :

$$\int_{-r}^r f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\Im(z) > 0} \text{Res}_z(f(z)e^{iz}) - \int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}$$



e quindi **I** esiste se e solo se esiste il limite dell'integrale a secondo membro per  $r \rightarrow +\infty$ .

Il seguente lemma garantisce l'esistenza del limite e quindi dell'integrale **I** sotto certe condizioni.

**Lemma 3.6.6.** *Sia  $f(z)$  una funzione meromorfa nell'aperto*

$$U_\epsilon := \{z = x + iy : y > -\epsilon\}$$

*per qualche  $\epsilon > 0$  reale, con un numero finito di poli nel semipiano superiore, e supponiamo che*

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ y \geq 0}} f(z) = 0 \quad (3.14)$$

*Sia  $\gamma_r(t) = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , la semicirconferenza di raggio  $r$  di centro l'origine contenuta nel semipiano superiore. Allora*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} = 0$$

*Dimostr.* Se  $r \gg 0$  abbiamo:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} \right| &= \left| \int_0^\pi f(re^{it}) e^{ir(\cos t + i \sin t)} i r e^{it} dt \right| \\ &\leq M(r) r \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt \end{aligned} \quad (3.15)$$

dove  $M(r) = \max\{|f(re^{it})| : 0 \leq t \leq \pi\}$ . Utilizzeremo le disuguaglianze elementari:

$$\begin{aligned} \sin t &\geq \frac{2}{\pi} t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin t &\geq -\frac{2}{\pi} t + 2, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{aligned}$$

che sostituite danno:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t} r dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-r \sin t} dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2rt}{\pi}} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{r(\frac{2t}{\pi} - 2)} dt \\ &= -\frac{\pi}{2r} e^{-\frac{2rt}{\pi}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2r} e^{r(\frac{2t}{\pi} - 2)} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{\pi}{r} (1 - e^{-r}) \end{aligned}$$

Sostituendo in (3.15) otteniamo:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} \right| \leq M(r) r \frac{\pi}{r} (1 - e^{-r}) \leq M(r) \pi$$

Poiché  $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = 0$ , la conclusione segue.  $\square$

Come conseguenza otteniamo che, sotto le ipotesi precedenti, se la (3.14) è soddisfatta allora l'integrale **I** esiste e vale l'identità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\Im(z) > 0} \text{Res}_z(f(z) e^{iz})$$



## Capitolo 4

# Successioni e serie di funzioni olomorfe o meromorfe

### 4.1 Convergenza uniforme e normale sui compatti

Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto. Denotiamo con  $\mathcal{C}(U)$  l'insieme di tutte le funzioni continue definite su  $U$  a valori complessi, e sia  $H(U) \subset \mathcal{C}(U)$  il sottoinsieme delle funzioni olomorfe.

Una successione  $\{f_n\}$  di funzioni  $f_n \in \mathcal{C}(U)$  si dirà *uniformemente convergente sui compatti di  $U$*  se per ogni sottoinsieme compatto  $K \subset U$  la successione delle restrizioni  $\{f_n|_K\}$  converge uniformemente. Poiché il limite uniforme di funzioni continue è continua, la funzione limite  $f = \lim_n f_n$  di una successione uniformemente convergente sui compatti è tale che la sua restrizione  $f|_K$  a qualsiasi compatto  $K \subset U$  è continua. Ma allora, poiché ogni punto di  $U$  possiede un intorno aperto la cui chiusura è compatta e contenuta in  $U$ , segue che  $f \in \mathcal{C}(U)$ .

Una serie  $\sum_n f_n$  di funzioni  $f_n \in \mathcal{C}(U)$  si dirà *uniformemente convergente sui compatti di  $U$*  se la successione delle sue somme parziali è uniformemente convergente sui compatti. In tal caso la funzione somma  $f = \sum_n f_n$  è continua, per quanto appena osservato.

Una serie  $\sum_n f_n$  di funzioni  $f_n \in \mathcal{C}(U)$  si dirà *normalmente convergente sui compatti di  $U$*  se per ogni sottoinsieme compatto  $K \subset U$  la serie  $\sum f_n|_K$  converge normalmente. Ciò significa che per ogni sottoinsieme compatto  $K \subset U$  la serie  $\sum f_n|_K$  è maggiorata in modulo da una serie convergente di termini costanti positivi.

È evidente che se una serie è normalmente convergente sui compatti di  $U$  allora è anche uniformemente convergente sui compatti di  $U$ .

**Lemma 4.1.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione di funzioni  $f_n \in \mathcal{C}(U)$  converga uniformemente sui compatti di  $U$  è che per ogni disco compatto  $\Sigma \subset U$  la successione delle restrizioni  $\{f_n|_\Sigma\}$  converga uniformemente.*

*Dimostr.* La necessità è ovvia. La sufficienza segue immediatamente dal fatto che ogni sottoinsieme compatto  $K \subset U$  può essere ricoperto da un numero finito di dischi compatti contenuti in  $U$ .  $\square$

**Teorema 4.1.2.** *Se una successione di funzioni  $f_n \in H(U)$  è uniformemente convergente sui compatti di  $U$ , la funzione limite  $f$  è olomorfa in  $U$ .*

*Dimostr.* Abbiamo già osservato che la funzione  $f$  è continua. D'altra parte, per ogni disco  $D \subset U$ , e per ogni arco chiuso  $\gamma$  contenuto in  $D$ , si ha

$$\int_\gamma f_n dz = 0$$

perché  $f_n$  è olomorfa. Dalla uniforme convergenza sui compatti, e dal fatto che l'immagine di  $\gamma$  è un compatto, segue che

$$\int_\gamma f dz = \lim_n \int_\gamma f_n dz = 0$$

Applicando il teorema di Morera 2.5.4 deduciamo che  $f \in H(U)$ .  $\square$

Il seguente corollario è immediato.

**Corollario 4.1.3.** *La somma di una serie di funzioni  $f_n \in H(U)$  normalmente convergente sui compatti di  $U$  è olomorfa.*

**Teorema 4.1.4.** *Se una successione di funzioni  $f_n \in H(U)$  converge ad una funzione  $f \in H(U)$  uniformemente sui compatti di  $U$ , allora la successione delle derivate  $\{f'_n\}$  converge alla derivata  $f' \in H(U)$  uniformemente sui compatti di  $U$ .*

*Dimostr.* Sia  $z_0 \in U$  e sia  $R > 0$  tale che il disco chiuso  $\Sigma_R$  di centro  $z_0$  e raggio  $R$  sia contenuto in  $U$ . Allora per ogni  $n$  per ogni  $z$  tale che  $|z - z_0| \leq R/2$ , cioè  $z \in \Sigma_{R/2}$ , si ha:

$$f'_n(z) = \int_{C_R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

e

$$f'(z) = \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

Poiché  $C_R$  è compatto e  $f_n$  converge a  $f$  uniformemente sui compatti segue che

$$\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \lim_n \int_{C_R} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

cioè  $f'(z) = \lim_n f'_n(z)$ . Quindi  $\lim_n f'_n = f'$ . Per verificare che la convergenza è uniforme sui compatti di  $U$  si osservi che, essendo  $|z - \zeta| \geq R/2$  per ogni  $\zeta \in C_R$  e  $z \in \Sigma_{R/2}$ , si ha

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \int_{C_R} \left| \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| d\zeta \leq \frac{4}{R^2} \int_{C_R} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| d\zeta$$

e quindi  $\lim_n f'_n = f'$  uniformemente in  $\Sigma_{R/2}$ . La conclusione ora segue dal Lemma 4.1.1 perché  $U$  può essere ricoperto dalla famiglia dei dischi compatti  $\Sigma_{R/2}$  al variare di  $z_0 \in U$ .  $\square$

Dimostriamo ora un risultato che risulta utile in diverse circostanze.

**Proposizione 4.1.5.** *Sia  $U \subset \mathbf{C}$  un aperto connesso, e sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni olomorfe in  $U$  uniformemente convergente sui compatti di  $U$ . Supponiamo che  $f_n(z) \neq 0$  per ogni  $z \in U$  e per ogni  $n$ . Allora la funzione  $f = \lim_n f_n$  soddisfa  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in U$ , oppure è identicamente nulla.*

*Dimostr.* Per il Teorema 4.1.2  $f$  è olomorfa. Supponiamo che esista  $z_0 \in U$  tale che  $f(z_0) = 0$ . Allora, se  $f$  non è identicamente nulla,  $z_0$  è uno zero isolato di  $f$  perché  $U$  è connesso. Quindi, per il teorema dell'indicatore logaritmico (Teorema 3.5.6), si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz > 0$$

dove  $\gamma$  è una circonferenza di centro  $z_0$  e raggio sufficientemente piccolo. Ma per il Teorema 4.1.4 quest'integrale è il limite degli integrali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz$$

che sono nulli, ancora per il Teorema 3.5.6. Abbiamo quindi una contraddizione, e la Proposizione è dimostrata.  $\square$

**Osservazione 4.1.6.** Il Teorema 4.1.2 descrive un fenomeno caratteristico delle funzioni di variabile complessa, che non ha un analogo nel caso di funzioni di variabile reale. Infatti un classico teorema di Weierstrass afferma che ogni funzione continua a valori reali definita in un insieme chiuso e limitato di  $\mathbf{R}^N$  può essere ottenuta come limite di una successione di polinomi reali uniformemente convergente. Nel caso complesso invece ogni successione di polinomi uniformemente convergente sui compatti di un aperto  $U \subset \mathbf{C}$  converge ad una funzione *olomorfa*, per il Teorema 4.1.2: quindi non è possibile approssimare uniformemente sui compatti di  $U$  una qualsiasi funzione *continua* su  $U$  mediante polinomi né funzioni olomorfe.

## 4.2 Serie di funzioni meromorfe

Sia  $U \subset \mathbf{C}$  un aperto,  $\{f_n\}$  una successione di funzioni meromorfe in  $U$  e  $K \subset U$  un sottoinsieme compatto. diremo che la serie  $\sum_n f_n$  converge uniformemente

in  $K$  se è possibile rimuovere un numero finito di termini dalla serie in modo che le rimanenti funzioni non abbiano poli in  $K$  e costituiscano una serie uniformemente convergente in  $K$ .

Analogamente, diremo che la serie  $\sum_n f_n$  converge normalmente in  $K$  se è possibile rimuovere un numero finito di termini dalla serie in modo che le rimanenti funzioni non abbiano poli in  $K$  e costituiscano una serie normalmente convergente in  $K$ .

È ovvio che una serie di funzioni meromorfe normalmente convergente in  $K$  è anche uniformemente convergente in  $K$ .

Consideriamo una serie  $\sum_n f_n$  di funzioni meromorfe su  $U$ , uniformemente convergente sui compatti di  $U$ . Sia  $V \subset U$  un sottoinsieme aperto la cui chiusura sia compatta e contenuta in  $U$  (un aperto siffatto si dice *relativamente compatto* in  $U$ ). La somma della serie  $\sum_n f_n$  in  $V$  è definita come la funzione meromorfa in  $V$

$$\sum_{n \leq n_0} f_n + \sum_{n > n_0} f_n \quad (4.1)$$

dove  $n_0$  è tale che la funzioni  $f_n$ ,  $n > n_0$ , non abbiano poli in  $\bar{V}$ . Quindi il primo termine della (4.1) è una funzione meromorfa in  $V$ , perché è somma di un numero finito di funzioni meromorfe; il secondo termine è una funzione olomorfa in  $V$  perché è somma di una serie di funzioni olomorfe in  $V$  uniformemente convergente sui compatti di  $V$ . È un facile esercizio dimostrare che la funzione meromorfa (4.1) è indipendente dalla scelta di  $n_0$ .

**Teorema 4.2.1.** *Sia  $\sum_n f_n$  una serie di funzioni meromorfe su un aperto  $U$  uniformemente (risp. normalmente) convergente sui compatti di  $U$ . Allora la somma della serie è una funzione meromorfa su  $U$ . Inoltre la serie  $\sum_n f'_n$  delle derivate della serie assegnata converge uniformemente sui compatti di  $U$  e la sua somma è la derivata  $f'$  della somma  $f$  della serie assegnata.*

*Dimostr.* La somma della serie  $\sum_n f_n$  è ben definita e meromorfa in ogni aperto relativamente compatto di  $V$ . Pertanto è ben definita e meromorfa in tutto  $U$ .

Sia  $V \subset U$  un sottoinsieme aperto e relativamente compatto, e sia  $n_0$  un intero scelto come in (4.1). Allora in  $V$  si ha:

$$f' = \sum_{n \leq n_0} f'_n + \left( \sum_{n > n_0} f_n \right)'$$

Inoltre la serie  $\sum_{n > n_0} f_n$  può essere derivata termine a termine perché converge uniformemente sui compatti di  $V$ . Pertanto, per il Teorema 4.1.4 la serie delle derivate  $\sum_{n > n_0} f'_n$  converge uniformemente sui compatti di  $V$  alla serie  $(\sum_{n > n_0} f_n)'$ . Ciò dimostra che la serie di funzioni meromorfe  $\sum_n f'_n$  converge alla funzione meromorfa  $f'$  uniformemente sui compatti di  $V$ . Poiché ciò è vero per ogni aperto relativamente compatto  $V \subset U$ , deduciamo che  $\sum_n f'_n$  converge alla funzione meromorfa  $f'$  uniformemente sui compatti di  $U$ .  $\square$

### 4.3 Un esempio

Consideriamo la serie di funzioni meromorfe in  $\mathbf{C}$ :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} \quad (4.2)$$

**Lemma 4.3.1.** *La serie (4.2) converge normalmente sui compatti di  $\mathbf{C}$ . La sua somma è una funzione meromorfa  $f(z) \in M(\mathbf{C})$ , avente un polo di ordine 2 in tutti gli  $n \in \mathbf{Z}$  con parte principale*

$$\frac{1}{(z - n)^2}$$

e nessun'altra singolarità. Inoltre  $f$  è periodica di periodo 1, cioè soddisfa

$$f(z + 1) = f(z)$$

per ogni  $z \in \mathbf{C}$ .

*Dimostr.* Poiché ogni sottoinsieme compatto di  $\mathbf{C}$  è contenuto in un insieme della forma

$$S = S_{x_0, x_1} = \{z = x + iy : x_0 \leq x \leq x_1\}$$

è sufficiente dimostrare che la serie (4.2) converge normalmente in ogni insieme  $S$ . Poiché un tale  $S$  contiene solo un numero finito di interi  $n$ , solo un numero finito di termini della serie possiede poli in  $S$ . Inoltre per ogni  $n < x_0$  si ha

$$\left| \frac{1}{(z - n)^2} \right| \leq \frac{1}{(x_0 - n)^2}$$

per ogni  $z \in S$  e quindi la sottoserie

$$\sum_{n < x_0} \frac{1}{(z - n)^2}$$

converge normalmente in  $S$ . D'altra parte si ha anche

$$\left| \frac{1}{(z - n)^2} \right| \leq \frac{1}{(n - x_1)^2}$$

per ogni  $n > x_1$  e per ogni  $z \in S$ . Quindi anche la sottoserie

$$\sum_{n > x_1} \frac{1}{(z - n)^2}$$

converge normalmente in  $S$ . Quindi, dopo aver rimosso un numero finito di termini dalla serie (4.2), otteniamo una serie di funzioni olomorfe in ogni punto di  $S$  e normalmente convergente in  $S$ . Quindi (4.2) è normalmente convergente sui compatti di  $\mathbf{C}$ .

La relazione

$$\sum_n \frac{1}{(z+1-n)^2} = \sum_{n'} \frac{1}{(z-n')^2}$$

ottenuta ponendo  $n-1 = n'$  implica  $f(z+1) = f(z)$ . Infine è evidente che  $f(z)$  non ha poli al di fuori dei numeri interi  $n \in \mathbf{Z}$  e che per ogni  $n \in \mathbf{Z}$  la funzione

$$f(z) - \frac{1}{(z-n)^2}$$

è olomorfa in  $n$ . □

La funzione somma della serie (4.2) è descritta precisamente nel seguente modo.

**Proposizione 4.3.2.** *La somma  $f(z)$  della serie (4.2) è uguale a*

$$\left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2$$

*Dimostr.* Consideriamo la striscia  $S_{0,1}$ . Si ha

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = 0$$

Poiché la serie (4.2) converge normalmente nella striscia  $S_{0,1}$ , il limite e la sommatoria si possono scambiare e deduciamo che in  $S_{0,1}$  si ha anche

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} f(z) = 0 \tag{4.3}$$

Utilizzando il fatto che  $f(z)$  è periodica di periodo 1, deduciamo che la (4.3) sussiste in tutto  $\mathbf{C}$ .

Ora consideriamo la funzione  $g(z) := \left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2$ . Essa possiede le seguenti proprietà analoghe a quelle della  $f(z)$ :

- (i)  $g(z) \in M(\mathbf{C})$  ed è periodica di periodo 1.
- (ii) I poli di  $g(z)$  sono i numeri interi  $n$ , che sono poli doppi con parte principale  $1/(z-n)^2$ .

(iii)

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} g(z) = 0$$

La proprietà (i) è ovvia. A causa della periodicità è sufficiente dimostrare la (ii) nell'origine, cioè dimostrare che l'origine è un polo doppio con parte principale  $1/z^2$ . Si ha, in un intorno di 0:

$$\left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 = \left( \frac{\pi}{\pi z - \frac{1}{6}\pi^3 z^3 + \dots} \right)^2 = \frac{1}{z^2} \left( 1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \dots \right)^{-2}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z^2} \left( 1 + \frac{1}{6} \pi^2 z^2 + \dots \right)^2 = \frac{1}{z^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \pi^2 z^2 + z^4(\dots) \right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\dots)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

e la (ii) segue. La relazione (iii) segue immediatamente dall'identità (1.12) di pag. 29.

Da questi fatti segue che la funzione  $f(z) - g(z)$  è olomorfa in tutto  $\mathbb{C}$  perché  $f$  e  $g$  hanno gli stessi poli con le stesse parti principali. Inoltre in ogni striscia  $S_{x_0, x_1}$  la funzione  $f(z) - g(z)$  è limitata perché lo sono sia  $f$  che  $g$ , come segue dalla (4.3) e dalla (iii). Dalla periodicità di  $f - g$  segue quindi che  $f - g$  è limitata in  $\mathbb{C}$ . Applicando il teorema di Liouville (pag. 63) deduciamo che  $f - g$  è costante. Infine, poiché  $f - g$  tende a 0 al tendere di  $|y|$  a  $+\infty$ , deduciamo che  $f - g$  è identicamente nulla.  $\square$

Come applicazione dimostriamo la seguente identità, dovuta a Eulero:

**Proposizione 4.3.3.**

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.5}$$

*Dimostr.* Dalla Proposizione 4.3.2 deduciamo che si ha:

$$\left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z - n)^2}$$

ed il secondo membro è una funzione  $h(z)$  olomorfa in un intorno di 0. Inoltre

$$h(0) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

D'altra parte la (4.4) implica che

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 - \frac{1}{z^2} \right] = \frac{\pi^2}{3}$$

e la (4.5) segue.  $\square$

Consideriamo ora la serie

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) \tag{4.6}$$

il cui termine generale è uguale a  $z/n(z-n)$ . È facile dimostrare che questa serie converge normalmente sui compatti di  $\mathbb{C}$  (si proceda come nella dimostrazione del Lemma 4.3.1). La sua somma è quindi una funzione  $F(z)$  meromorfa in  $\mathbb{C}$ , i cui poli sono gli interi  $z = n$ , e sono poli semplici con residuo uguale a 1. Per il teorema 4.2.1 la derivata  $F'(z)$  è la somma della serie delle derivate, cioè:

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z - n)^2} = -\left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 = \frac{d}{dz} \left( \frac{\pi}{\tan \pi z} \right)$$

e quindi

$$F(z) - \frac{\pi}{\tan \pi z} = c \quad (4.7)$$

una costante. D'altra parte dalla (4.6) segue che  $F(-z) = -F(z)$ ; pertanto il primo membro della (4.7) è un funzione dispari e, essendo costante, è identicamente nulla.

La serie (4.6) può essere riordinata accorpendo i termini relativi agli interi  $n$  e  $-n$ . Poiché

$$\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

otteniamo la relazione:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan \pi z} \quad (4.8)$$

## 4.4 Prodotti infiniti

Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni continue in un aperto  $U \subset \mathbf{C}$ . Diremo che il *prodotto infinito*

$$\prod_n f_n(z)$$

converge normalmente in un sottoinsieme  $K \subset U$  se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 1$  uniformemente in  $K$ .

(b)  $\sum_n \ln f_n(z)$  converge normalmente in  $K$ .

La condizione (b) ha senso perché dalla (a) segue che  $|f_n(z) - 1| < 1$  per  $n \gg 0$  e quindi  $\ln f_n(z)$  è una funzione ben definita in  $K$ .

Poniamo  $f_n(z) = 1 + u_n(z)$ . La (a) equivale alla condizione che la successione  $\{u_n\}$  converga uniformemente a 0 in  $K$ . La (b) equivale alla condizione che la serie  $\sum_n u_n$  converga normalmente in  $K$ . Riassumendo possiamo dire che le condizioni (a) e (b) sono equivalenti all'unica condizione:

(c) La serie

$$\sum_n u_n(z)$$

dove  $u_n = f_n - 1$ , converge normalmente in  $K$ .

Diremo che il *prodotto infinito*

$$\prod_n f_n(z)$$

converge normalmente nei compatti di  $U$  se converge normalmente in ogni sottoinsieme compatto  $K \subset U$ .

**Teorema 4.4.1.** Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni olomorfe in un aperto  $U \subset \mathbf{C}$ . Supponiamo che

$$\prod_n f_n(z)$$

converga normalmente nei compatti di  $U$ . Allora la funzione

$$f(z) = \prod_n f_n(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(z)f_2(z) \cdots f_n(z)$$

è olomorfa in  $U$ . Inoltre per ogni  $p > 0$  si ha:

$$f(z) = f_1(z) \cdots f_p(z) \prod_{n>p} f_n(z) \quad (4.9)$$

L'insieme degli zeri di  $f$  coincide con l'unione degli zeri delle funzioni  $f_n(z)$ . L'ordine di uno zero di  $f$  è uguale alla somma degli ordini che esso ha per ciascuno dei fattori.

*Dimostr.*  $f$  è olomorfa perché è limite uniforme sui compatti di  $U$  dei prodotti parziali finiti, che sono funzioni olomorfe. La formula (4.9) è ovvia in ogni sottoinsieme compatto di  $U$  e quindi è vera per ogni  $z \in U$ . Poiché la successione  $\{u_n\}$  converge a 0 uniformemente sui compatti di  $U$ , la funzione  $f_n$  non ha zeri in  $U$  quando  $n \gg 0$ . Quindi l'ultima affermazione è ovvia.  $\square$

**Teorema 4.4.2.** Sotto le stesse ipotesi del Teorema 4.4.1, la serie di funzioni meromorfe

$$\sum_n \frac{f'_n}{f_n}$$

converge normalmente nei compatti di  $U$ , e ha per somma la derivata logaritmica  $f'/f$ .

*Dimostr.* Sia  $K \subset U$  un compatto. La funzione

$$g_p = e^{\sum_{n>p} \ln f_n}$$

è ben definita e olomorfa in  $K$  per  $p \gg 0$ . Per la (4.9) abbiamo:

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n \leq p} \frac{f'_n}{f_n} + \frac{g'_p}{g_p} \quad (4.10)$$

D'altra parte:

$$\frac{g'_p}{g_p} = \sum_{n>p} \frac{f'_n}{f_n} \quad (4.11)$$

dove la serie a secondo membro converge uniformemente sui compatti di  $U$ : infatti la serie  $\sum_{n>p} \ln f_n$  dei logaritmi converge uniformemente sui compatti a  $\ln g_p$ , cosicché la serie delle derivate di questi logaritmi converge uniformemente

sui compatti alla derivata  $g'_p/g_p$ . Confrontando (4.10) e (4.11) deduciamo che in  $K$  si ha:

$$\frac{f'}{f} = \sum_n \frac{f'_n}{f_n}$$

e che la convergenza è normale sui compatti di  $K$ . Poiché ciò è vero per ogni compatto  $K \subset U$  il teorema segue.  $\square$

## 4.5 L'espansione di $\sin \pi z$ come prodotto infinito

Consideriamo il prodotto infinito

$$f(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (4.12)$$

Dalla convergenza della serie numerica  $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$  segue che la serie  $\sum_{n \geq 1} z^2/n^2$  converge normalmente sui compatti di  $\mathbf{C}$ , e quindi il prodotto infinito (4.12) converge normalmente sui compatti di  $\mathbf{C}$ . Deduciamo che  $f(z)$  è una funzione olomorfa in tutto  $\mathbf{C}$ , i cui zeri sono i numeri interi  $z = n$ , e sono zeri semplici. Applicando il Teorema (4.4.2), possiamo differenziare logaritmicamente termine a termine ottenendo una serie di funzioni meromorfe che converge normalmente sui compatti di  $\mathbf{C}$ :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

Abbiamo visto (pag. 98) che la somma di questa serie è

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

dove abbiamo posto  $g(z) = \sin \pi z$ . Pertanto  $f'/f = g'/g$ , cosicché

$$\frac{f(z)}{z} = c \frac{\sin \pi z}{z}$$

dove  $c$  è una costante. Per la (4.12) si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = 1$$

e poiché

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

deduciamo che  $c = \frac{1}{\pi}$ . Quindi abbiamo la formula:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (4.13)$$

Ponendo  $z = \frac{1}{2}$  otteniamo la **Formula di Wallis**:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n \geq 1} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots}$$

J. Wallis (1616–1703) ottenne questa identità molto tempo prima che il calcolo integrale fosse stato creato. La formula è notevole perchè fornisce un'espressione di  $\pi$  come un limite in cui non compaiono numeri irrazionali. Wallis è anche noto per aver introdotto per primo il simbolo  $\infty$ .



## Capitolo 5

# Classificazione delle superfici topologiche

### 5.1 Poligoni etichettati

Denoteremo con il simbolo  $P_{2n}$ , o semplicemente con  $P$ , un poligono compatto e convesso di  $\mathbb{R}^2$ , a  $2n$  lati,  $n \geq 2$ . Considereremo superfici topologiche ottenute come spazi quoziente di  $P$  attraverso opportune identificazioni dei lati tra loro a coppie, nel modo che ora descriveremo.

Fissato un vertice  $v$ , ed un verso di percorrenza della frontiera di  $P$  (il verso orario per fissare le idee), consideriamo simboli  $a_1, \dots, a_n$ , ed un monomio in  $a_1, \dots, a_n$  con esponenti  $\pm 1$ , in cui ogni  $a_i$  compaia esattamente due volte:

$$a_{i_1}^{\pm 1} a_{i_2}^{\pm 1} \cdots a_{i_{2n}}^{\pm 1} \quad (5.1)$$

A questo monomio corrisponde una “etichettatura” con un simbolo  $a_i$  di ognuno dei  $2n$  lati (il  $k$ -esimo lato che si incontra percorrendo  $\mathcal{F}P$  a partire da  $v$  si etichetta con il simbolo  $a_{i_k}$ ), ed una orientazione di ognuno di essi che è concorde o discorde con il verso di percorrenza di  $\mathcal{F}P$  a seconda che l'esponente sia  $+1$  oppure  $-1$ . In questo modo ad ogni lato è assegnato lo stesso simbolo di uno ed un solo altro lato, ed esiste un unico omeomorfismo lineare tra i due lati che rispetta le orientazioni indotte su di essi dal monomio (5.1). Questi omeomorfismi tra i lati di  $P$  a coppie inducono una relazione di equivalenza su  $P$ : lo spazio quoziente  $S$  è, per motivi elementari la cui verifica è lasciata al lettore, una superficie topologica compatta e connessa che verrà denotata con lo stesso simbolo (5.1).

Ad esempio, nel caso  $2n = 4$ , la superficie  $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$  è omeomorfa al toro  $T = S^1 \times S^1$ .

La superficie  $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3 a_4 a_3^{-1} a_4^{-1}$  è detta *2-toro* e denotata  $2T$ .

Più in generale, per ogni intero  $g \geq 1$  la superficie

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3 a_4 a_3^{-1} a_4^{-1} \cdots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1}$$

quoziente di un poligono  $P_{4g}$ , si denota con il simbolo  $gT$ , ed è chiamata *multitoro di genere  $g$*  o  *$g$ -toro*. Alla sfera  $S^2$  si usa attribuire il genere  $g = 0$  e considerarla come il multitoro di genere 0.

La superficie  $a_1a_2a_1a_2$  è omeomorfa al *piano proiettivo*  $\mathbb{P}^2$ .

La superficie  $a_1a_2a_1^{-1}a_2$  è detta *bottiglia di Klein*.

Per uniformità di notazione sarà opportuno considerare anche la sfera come un quoziente, e precisamente come il quoziente di  $\mathbf{D}^2$ , il disco chiuso unitario, ottenuta identificando tra loro i punti simmetrici rispetto ad un diametro fissato  $r$ . Considereremo  $\mathbf{D}^2$  come un poligono generalizzato a 2 lati (le due semicirconferenze in cui  $r$  divide  $S^1 = \mathcal{F}\mathbf{D}^2$ ), ed il suo quoziente  $S^2$  corrisponderà al monomio  $aa^{-1}$ . Il quoziente  $aa$  di  $\mathbf{D}^2$  è invece il piano proiettivo, come si verifica facilmente.

Un'altra superficie importante, come vedremo tra poco, è

$$a_1a_1a_2a_2 \cdots a_ga_g$$

che si chiama *multipiano proiettivo di genere  $g$*  e si denota con  $g\mathbb{P}^2$ . Nel caso particolare  $g = 1$  si ottiene  $\mathbb{P}^2$ . Confrontando con la rappresentazione di  $\mathbb{P}^2$  data in precedenza vediamo in particolare che una data superficie può essere ottenuta in corrispondenza a monomi diversi.

**Definizione 5.1.1.** *Due poligoni etichettati si dicono equivalenti se le corrispondenti superfici quoziente sono omeomorfe.*

Una coppia di lati del poligono  $P$ , etichettato dal monomio (5.1), si dice una *coppia del primo tipo* se i due lati sono identificati tra loro e sono orientati discordemente, cioè se le loro etichette sono uguali ma con esponenti opposti. Se invece i due lati hanno etichette ed esponenti uguali essi costituiscono una *coppia del secondo tipo*.

**Proposizione 5.1.2.** *Se il poligono  $P$ , etichettato dal monomio (5.1), possiede una coppia di lati del secondo tipo, allora la superficie quoziente definita da (5.1) contiene un sottospazio chiuso omeomorfo ad un nastro di Moebius.*

*Dimostr.* Supponiamo che  $\ell_1$  ed  $\ell_2$  costituiscano una coppia del secondo tipo. Siano  $\lambda_1 \subset \ell_1$  e  $\lambda_2 \subset \ell_2$  segmenti chiusi non contenenti alcuno degli estremi di  $\ell_1$  ed  $\ell_2$  ed aventi la stessa immagine in  $S$ . Il quadrilatero chiuso  $R \subset P$  i cui vertici sono gli stessi di  $\lambda_1$  e di  $\lambda_2$  ha per immagine in  $S$  un nastro di Moebius.  $\square$

Il seguente teorema classifica completamente le superfici che si possono ottenere come quozienti di un poligono etichettato.

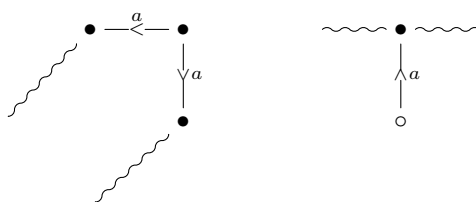
**Teorema 5.1.3.** *Ogni superficie quoziente di un poligono etichettato è omeomorfa ad un multitoro oppure ad un multipiano proiettivo.*



## 5.2 Dimostrazione del teorema 5.1.3

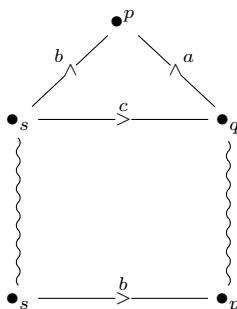
La dimostrazione è ottenuta attraverso successive sostituzioni del poligono etichettato  $P_{2n}$  con un altro ad esso equivalente. Nelle figure rappresenteremo con un  $\sim$  una successione di lati che non ci occorre specificare in dettaglio, con  $\bullet$  un vertice e con  $\circ$  un punto interno al poligono.

**Primo passo: Eliminazione di coppie di lati del primo tipo adiacenti.** Una coppia di lati del primo tipo adiacenti può essere eliminata sostituendo a  $P$  il poligono a  $2n - 2$  lati ottenuto identificando tra loro i due lati.

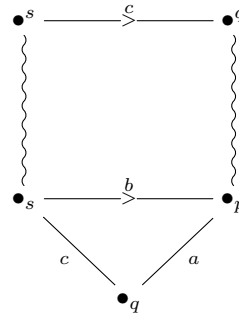


Dopo aver effettuato questa operazione per tutte le coppie di lati del primo tipo adiacenti si otterrà un poligono in cui non vi sono coppie di lati siffatte. Se saremo arrivati ad uno dei poligoni etichettati dell'enunciato il teorema è vero, altrimenti procediamo con il successivo passo della dimostrazione.

**Secondo passo: Identificazione di tutti i vertici ad un solo punto.** Per quanto dimostrato sopra, possiamo supporre che il poligono  $P$  sia etichettato da un monomio 5.1 in cui non vi sono coppie del primo tipo adiacenti. I vertici di  $P$  sono suddivisi in classi di equivalenza, ognuna delle quali è costituita da vertici che hanno la stessa immagine in  $S$ . Denoteremo tutti i vertici di una stessa classe con la stessa lettera. Supponiamo che non tutti i vertici siano equivalenti tra loro. Allora esiste una coppia di vertici adiacenti non equivalenti, siano essi  $p$  e  $q$ , e sia  $a = a_i$  il lato compreso. L'altro lato di cui  $p$  è vertice non è etichettato  $a$  perché altrimenti i due lati costituirebbero una coppia del secondo tipo, contraddicendo il fatto che  $p$  e  $q$  non sono equivalenti. Sia dunque  $b$  l'altro lato di vertice  $p$ , ed  $s$  il secondo estremo di  $b$ . Consideriamo il segmento  $c$  congiungente  $s$  e  $q$ , e sia  $\Delta$  il triangolo chiuso di vertici  $p, q, s$ .

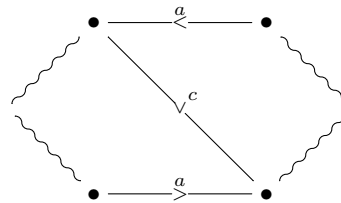


Tagliando  $P$  lungo  $c$  ed identificando il lato  $b$  con l'altro lato etichettato  $b$ , otteniamo un nuovo poligono etichettato  $Q$  equivalente a  $P$ , ed avente lo stesso numero di lati, come illustrato dalla figura seguente:

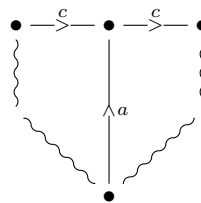


Con questa operazione la classe di equivalenza di  $p$  ha perso un elemento, mentre quella di  $q$  ne ha acquistato uno, ed il numero di elementi di tutte le altre classi è rimasto invariato. Iterando questo procedimento e riapplicando il primo passo, se necessario, è possibile far aumentare gli elementi di una classe di equivalenza a spese di tutte le altre, ottenendo alla fine che tutti i vertici siano equivalenti tra loro.

**Terzo passo: normalizzazione di coppie di lati del secondo tipo.** Supponiamo di aver effettuato i primi due passi e che il poligono ottenuto, che chiameremo ancora  $P$ , contenga una coppia di lati del secondo tipo non adiacenti. Supponiamoli etichettati con la lettera  $a$ .



Con l'operazione di taglio ed identificazione illustrata dalla figura seguente è possibile sostituire  $P$  con un altro poligono  $Q$  in cui la coppia è sostituita da un'altra costituita da lati adiacenti, mentre le adiacenze delle altre coppie non vengono modificate, e i vertici rimangono tutti equivalenti tra loro.

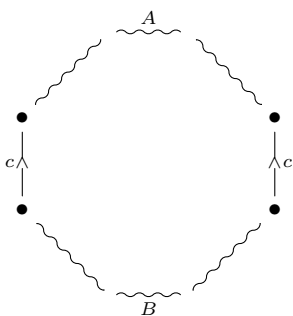


Iterando questo procedimento otteniamo un poligono equivalente a  $P$  in cui le coppie del secondo tipo, se ce ne sono, sono tutte normalizzate. Se il poligono

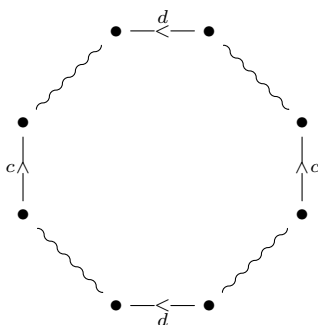
etichettato così' ottenuto, che chiameremo ancora  $P$ , è quello che definisce un multipiano proiettivo allora la dimostrazione è terminata. Altrimenti ci sono coppie di lati del primo tipo e si procede al passo successivo.

**Quarto passo: normalizzazione di coppie di lati del primo tipo.**

Supponiamo che  $P$  contenga una coppia di lati del primo tipo, etichettati  $c$ . Grazie al primo passo della dimostrazione, i due lati non sono adiacenti. Inoltre esiste un'altra coppia di lati del primo tipo, etichettati  $d$ , che separa i due lati  $c$ . cioè tale che i lati di ogni coppia si alternino a quelli dell'altra lungo il perimetro. Infatti, se così non fosse, si avrebbe una situazione come quella descritta nella figura seguente, in cui nessun vertice della regione  $A$  sarebbe equivalente ad uno della regione  $B$ , contraddicendo il fatto che tutti i vertici sono equivalenti.

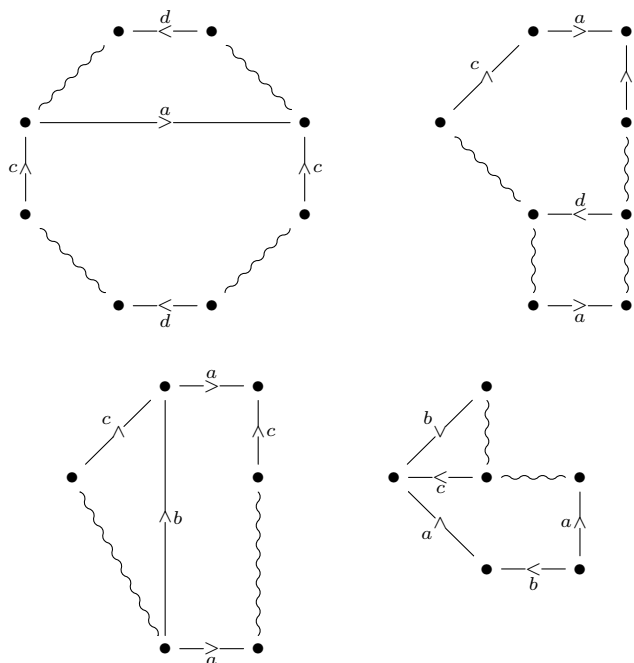


Pertanto abbiamo la situazione seguente:



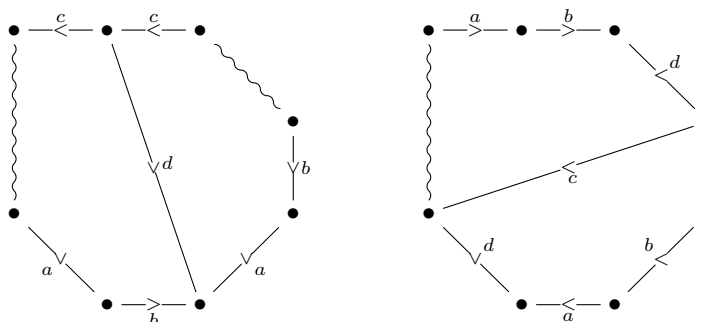
Mediante la successione di tagli ed identificazioni illustrati dalle figure seguenti si passa ad un poligono equivalente a  $P$ , in cui le due coppie di lati del primo

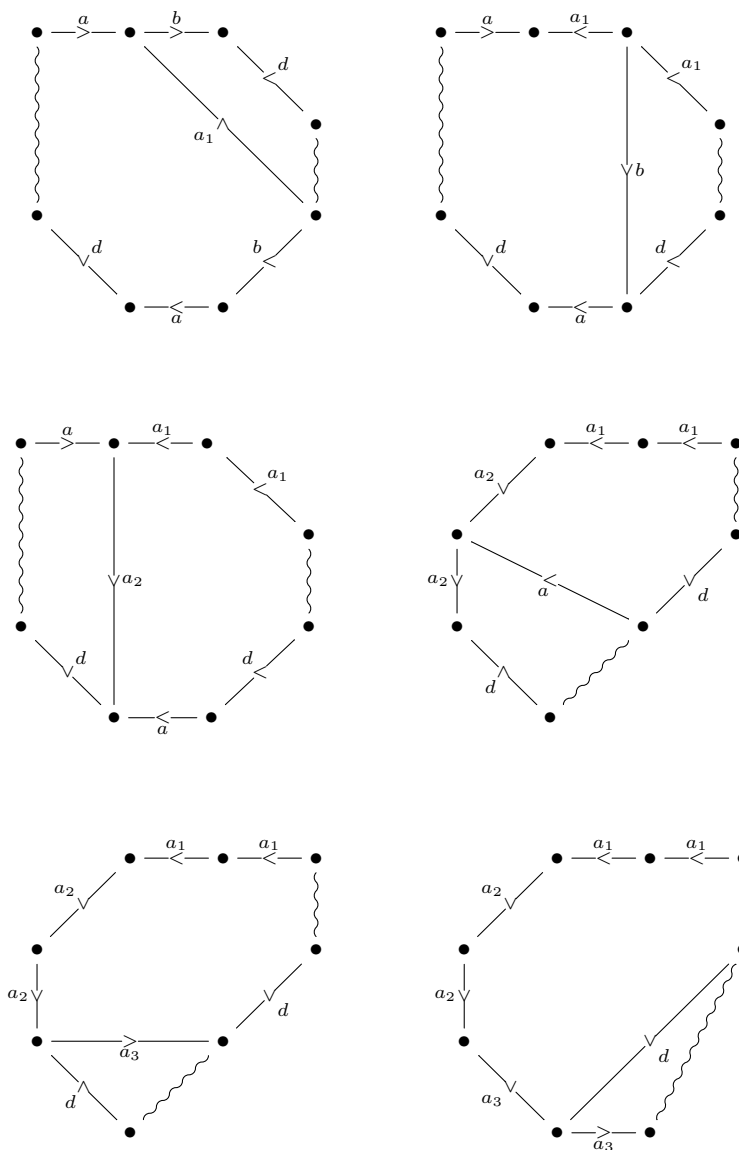
tipo  $c, d$  vengono sostituite da due coppie del primo tipo normalizzate.



Se dopo aver normalizzato tutte le coppie di lati del primo tipo si arriva ad un poligono etichettato che definisce un multitoro, il teorema è dimostrato. Altrimenti il nuovo poligono, che denoteremo ancora con  $P$ , possiede sia coppie di lati del primo che del secondo tipo, tutte normalizzate. In tal caso è necessario un ulteriore passo.

**Quinto passo: trasformazione di coppie di lati del primo tipo in coppie di lati del secondo tipo.** Il poligono etichettato  $P$  possiede sia coppie di lati del primo tipo che del secondo tipo, tutte normalizzate. La successione di tagli ed identificazioni illustrati dalle figure seguenti mostra come, data una coppia di lati del secondo tipo e due coppie del primo tipo normalizzate, è possibile trasformare le coppie del primo tipo in coppie del secondo tipo normalizzate.





Iterando questo procedimento è possibile ottenere un poligono etichettato equivalente a  $P$  in cui vi sono solo coppie normalizzate del secondo tipo. Pertanto  $S$  è un multipiano proiettivo, ed il teorema è dimostrato.  $\square$

Per ottenere una classificazione completa delle superfici descritte dal teorema precedente è necessario stabilire se le superfici dell'enunciato sono a due a due non omeomorfe. Questo è vero, e noi lo dimostreremo nel caso dei multitori e della sfera (caso orientabile). Ciò seguirà dal calcolo di  $\chi(S)$  (cfr. §5.4).

### 5.3 Triangolabilità

Il teorema 5.1.3 fornirebbe una classificazione completa di tutte le superfici compatte e connesse se ogni tale superficie fosse omeomorfa al quoziente di un poligono opportunamente etichettato. Ciò è vero, ed il procedimento per dimostrarlo si basa sulla nozione di “triangolazione”, che discuteremo in questo paragrafo.

Sia  $S$  una superficie topologica. Un *triangolo* in  $S$  è una coppia  $(T, \varphi)$  dove  $T \subset S$  è un sottoinsieme compatto e  $\varphi$  è un omeomorfismo di  $T$  su un triangolo chiuso di  $\mathbb{R}^2$ . I *lati*, risp. i *vertici* di  $T$  sono le controimmagini tramite  $\varphi$  dei lati, risp. dei vertici di  $\varphi(T)$ . Con abuso di notazione denoteremo spesso un triangolo  $(T, \varphi)$  con la sola lettera  $T$ , supponendo implicitamente assegnato l'omeomorfismo  $\varphi$ .

Una *triangolazione* di  $S$  è una famiglia  $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$  di triangoli di  $S$  con le seguenti proprietà:

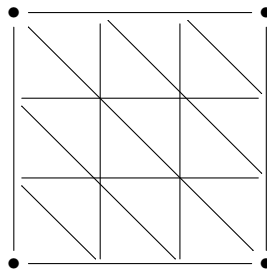
$$(T1) \bigcup_{i \in I} T_i = S$$

(T2) Se  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$  per qualche  $i \neq j$ , allora  $T_i \cap T_j$  è un vertice o un lato di entrambi i triangoli.

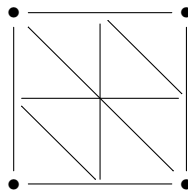
(T3) Ogni lato di ogni triangolo  $T_i$  è anche lato di uno ed un solo altro triangolo  $T_j$ .

(T4) Per ogni vertice  $v$  di qualche triangolo, i triangoli  $T_i$  che lo contengono sono un numero finito  $\geq 3$ , e si possono ordinare circolarmente in modo che due triangoli siano consecutivi se e solo se hanno un lato in comune.

La famiglia di triangoli di  $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$  rappresentata dalla figura seguente induce una triangolazione sul toro  $T$ :



Invece la famiglia di triangoli della figura seguente:



non definisce una triangolazione di  $T$ .

Se possiede almeno una triangolazione  $S$  si dice *triangolabile*. Una *triangolazione*  $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$  di  $S$  si dice *finita* se  $I$  è un insieme finito, cioè se  $\tau$  consiste di un numero finito di triangoli. Poiché l'unione di un numero finito di compatti è compatto, dalla condizione (T1) segue che, se possiede una triangolazione finita,  $S$  è compatta. Viceversa:

**Proposizione 5.3.1.** *Se  $S$  è una superficie compatta e triangolabile, ogni sua triangolazione è finita.*

*Dimostr.* Sia  $\tau = \{T_i\}_{i \in I}$  una triangolazione di  $S$ . Per ogni indice  $i \in I$  scegliamo un punto  $p_i \in \text{Int}(T_i)$ . Poniamo:

$$U_i = S \setminus \overline{\{p_j : j \neq i\}}$$

Si ha  $T_i \subset U_i$ , per ogni  $i \in I$ , e pertanto  $\{U_i\}_{i \in I}$  è un ricoprimento aperto di  $S$ . Inoltre  $p_i \notin U_j$  per ogni  $i \neq j$ , e pertanto  $\{U_i\}_{i \in I}$  non possiede sottoricoprimenti propri. Poiché  $S$  è compatta l'unica possibilità è che il ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$  sia finito, e quindi che  $I$  sia finito.  $\square$

**Proposizione 5.3.2.** *Se  $S$  è una superficie compatta e triangolabile allora  $S$  è omeomorfa al quoziente di un poligono convesso opportunamente etichettato.*

*Dimostr.* Sia  $\tau = \{T_1, \dots, T_n\}$  una triangolazione di  $S$ . Supponiamo ordinati  $T_1, \dots, T_n$  in modo che per ogni  $2 \leq i \leq n$  il triangolo  $T_i$  abbia un lato  $\ell_i$  in comune con qualche  $T_j$ ,  $j < n$ , sia questo il lato  $m_{i-1}$ . Tale ordinamento esiste per la connessione di  $S$ . Sia  $T$  l'unione disgiunta dei triangoli  $T_1, \dots, T_n$  e sia  $P$  il quoziente ottenuto da  $T$  identificando tra loro i lati  $\ell_i$  ed  $m_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, n$ . È immediato verificare che  $P$  è omeomorfo ad un poligono a  $2n$  lati, che corrispondono ai lati di  $T_1, \dots, T_n$  non ancora identificati tra loro. e che  $S$  è un quoziente di  $P$ , ottenuto dall'identificazione di tali lati a due a due in modo corrispondente alla triangolazione  $\tau$ .  $\square$

Dalla proposizione 5.3.2 segue che il teorema 5.1.3 si estende ad ogni superficie compatta connessa e triangolabile. Ma tutte le superfici compatte e connesse sono triangolabili. Infatti:

**Teorema 5.3.3.** *Ogni superficie topologica è triangolabile.*

La dimostrazione di questo teorema va oltre gli scopi di questo corso e verrà pertanto omessa. Deduciamo il seguente importante corollario, tenuto conto del teorema 5.1.3 e della proposizione 5.3.2:

**Teorema 5.3.4.** *Ogni superficie compatta e connessa è omeomorfa o ad  $S^2$ , o a un multitoro  $gT$  per qualche  $g \geq 1$ , oppure a un multipiano proiettivo  $g\mathbb{P}^2$  per qualche  $g \geq 1$ .*

Per ottenere una classificazione completa delle superfici compatte e connesse resta ancora da dimostrare che le superfici elencate nell'enunciato del teorema sono a due a due non omeomorfe, cioè che la classificazione data è irridondante. Di questo ci occuperemo nel prossimo paragrafo.

## 5.4 Caratteristica di Eulero-Poincaré e triangolazioni

Sia  $S$  una superficie compatta e connessa e  $\tau$  una triangolazione di  $S$ . Poniamo:

$$\begin{aligned}v(\tau) &= \text{numero di vertici di } \tau \\ \ell(\tau) &= \text{numero di lati di } \tau \\ t(\tau) &= \text{numero di triangoli di } \tau\end{aligned}$$

In numero intero

$$\chi(S, \tau) := v(\tau) - \ell(\tau) + t(\tau)$$

è chiamato *caratteristica di Eulero-Poincaré* di  $\tau$ . Il risultato che sta alla base dell'utilità di  $\chi(S, \tau)$  è il seguente:

**Teorema 5.4.1.** *Siano  $\tau, \tau'$  due triangolazioni della superficie compatta e connessa  $S$ . Allora  $\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau')$ .*

Per poter dimostrare il teorema 5.4.1 abbiamo bisogno di alcune premesse. Siano  $\tau, \tau'$  due triangolazioni della superficie compatta e connessa  $S$ . Allora  $\tau'$  si dice un *raffinamento* di  $\tau$ , o *più fine* di  $\tau$ , e si scrive  $\tau' > \tau$ , se ogni vertice di  $\tau$  è anche vertice di  $\tau'$ , ogni lato di  $\tau$  è unione di lati di  $\tau'$ , ed ogni triangolo di  $\tau$  è unione di triangoli di  $\tau'$ .

Chiameremo  $\tau'$  un *raffinamento elementare* di  $\tau$  se  $v(\tau') = v(\tau) + 1$ .

**Lemma 5.4.2.** *Sia  $\tau$  una triangolazione di  $S$  e sia  $\tau'$  un suo raffinamento elementare. Allora  $\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau')$ .*

*Dimostr.* Sia  $v$  il vertice di  $\tau'$  che non è vertice di  $\tau$ . Si hanno due possibilità:

- (i)  $v$  è interno a un lato  $\ell$  di  $\tau$ .
- (ii)  $v$  è interno a un triangolo  $\sigma$  di  $\tau$ .

Nel primo caso siano  $\sigma_1, \sigma_2$  i due triangoli di  $\tau$  aventi il lato  $\ell$  in comune. Allora  $\tau'$  differisce da  $\tau$  nell'avere 4 triangoli al posto di  $\sigma_1, \sigma_2$ , due lati in più che congiungono  $v$  ai vertici opposti di  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e due lati al posto di  $\ell$ . Segue che  $\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau')$  in questo caso.

Nel secondo caso  $\tau'$  differisce da  $\tau$  nell'avere 3 triangoli al posto di  $\sigma$  e 3 nuovi lati. Anche in questo caso si conclude che  $\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau')$ .  $\square$

**Proposizione 5.4.3.** *Siano  $\tau, \tau'$  due triangolazioni della superficie compatta e connessa  $S$ . Se  $\tau' > \tau$  allora  $\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau')$ .*



#### 5.4. CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÉ E TRIANGOLAZIONI 113

*Dimostr.* Supponiamo che  $v(\tau') = v(\tau) + k$ , per qualche  $k \geq 1$  e procediamo per induzione su  $k$ . Se  $k = 1$  la proposizione segue dal lemma precedente. Supponiamo  $k \geq 2$  e che la proposizione sia vera per ogni raffinamento  $\theta$  di  $\tau$  tale che  $v(\theta) \leq v(\tau) + k - 1$ . Siano  $V(\tau)$  e  $V(\tau')$  l'insieme dei vertici di  $\tau$  e di  $\tau'$  rispettivamente. Si ha

$$V(\tau') = V(\tau) \cup \{v_1, \dots, v_k\}$$

Consideriamo il vertice  $v_k$  e siano  $\ell_1, \dots, \ell_s$  i lati di  $\tau'$  che hanno  $v_k$  come vertice. Si ha  $s \geq 3$  per l'assioma  $(T_4)$ . Se  $s = 3$  allora rimuovendo  $v_k$  e  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  si ottiene una triangolazione  $\theta$  di  $S$  che è un raffinamento di  $\tau$  e di cui  $\tau'$  è un raffinamento elementare. Applicando l'ipotesi induttiva a  $\theta$  e il lemma si ottiene l'asserto.

Se  $s = 4$  siano  $\sigma_1, \dots, \sigma_4$  i triangoli di  $\tau'$  aventi  $v_k$  come vertice, ordinati come nell'assioma  $(T_4)$ . Rimuoviamo  $v_k$ , il lato adiacente di  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e il lato adiacente di  $\sigma_3$  e  $\sigma_4$ . Si ottiene una triangolazione  $\theta$  di  $S$  che è un raffinamento di  $\tau$  e di cui  $\tau'$  è un raffinamento elementare. Applicando l'ipotesi induttiva a  $\theta$  e il lemma si ottiene anche in questo caso l'asserto.

Supponiamo  $s \geq 5$ . Siano  $\sigma_1, \sigma_2$  due triangoli adiacenti di  $\tau'$  con vertice  $v_k$ , e sia  $\ell$  il lato in comune. Rimuoviamo  $\ell$  e sostituiamolo con un arco semplice di estremi i due vertici opposti di  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Otteniamo così una nuova triangolazione  $\rho$  di  $S$  avente gli stessi vertici di  $\tau'$  e che è un raffinamento di  $\tau$ . Il numero di lati di  $\rho$  di cui  $v_k$  è vertice è  $s - 1$  e, per costruzione,  $\chi(S, \rho) = \chi(S, \tau')$ . Procedendo in questo modo arriveremo a sostituire  $\tau'$  con una triangolazione  $\phi$  avente i suoi stessi vertici e tale che  $\chi(S, \phi) = \chi(S, \tau')$  e  $v_k$  sia vertice di 3 lati. Possiamo applicare il passo precedente rimuovendo  $v_k$  e ottenendo così una triangolazione  $\theta$  tale che  $v(\theta) = v(\tau) + k - 1$  e di cui  $\phi$  è un raffinamento elementare. Applicando l'ipotesi induttiva e il lemma si conclude.  $\square$

Il seguente teorema verrà utilizzato senza dimostrazione:

**Teorema 5.4.4.** *Se  $\tau$  e  $\tau'$  sono due triangolazioni della superficie compatta e connessa  $S$ , allora esiste una triangolazione  $\tau''$  tale che  $\tau'' > \tau$  e  $\tau'' > \tau'$ .*

*Dimostrazione del teorema 5.4.1* Per il teorema 5.4.4 esiste  $\tau''$  tale  $\tau'' > \tau$  e  $\tau'' > \tau'$ . D'altra parte, per la proposizione 5.4.3 si ha:

$$\chi(S, \tau) = \chi(S, \tau'') = \chi(S, \tau')$$

$\square$

Dal teorema 5.4.1 discende che, per ogni superficie compatta e connessa  $S$ , è possibile definire la caratteristica di Eulero-Poincaré di  $S$  come

$$\chi(S) := \chi(S, \tau)$$

per una qualsiasi triangolazione  $\tau$  di  $S$ .

**Proposizione 5.4.5.**  $\chi(S)$  è un invariante topologico per una superficie compatta e connessa  $S$ .

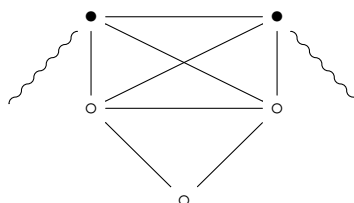
*Dimostr.* Esercizio.

Terminiamo il paragrafo con il seguente risultato che permette di calcolare facilmente  $\chi(S)$  quando si conosce una rappresentazione di  $S$  come quoziente di un poligono etichettato:

**Proposizione 5.4.6.** Sia  $S$  una superficie compatta e connessa ottenuta come quoziente di un poligono etichettato  $P_{2m}$  a  $2m$  lati, tale che i  $2m$  vertivi abbiano per immagini  $k$  punti distinti di  $S$ . Allora:

$$\chi(S) = 1 + k - m$$

*Dimostr.* È sufficiente calcolare  $\chi(S, \tau)$  dove  $\tau$  è la triangolazione indotta su  $S$  dal ricoprimento di  $P_{2m}$  mediante triangoli illustrato dalla figura seguente:



□

**Corollario 5.4.7.**

$$\chi(S^2) = 2, \quad \chi(gT) = 2 - 2g, \quad \chi(g\mathbb{P}^2) = 2 - g$$

per ogni  $g \geq 1$ . In particolare due multitori di generi diversi non sono omeomorfi, e due multipiani proiettivi di generi diversi non sono omeomorfi.

*Dimostr.* Immediata.

A titolo di esempio, classifichiamo la bottiglia di Klein  $K$ . Ricordiamo che  $K$  è il quoziente del poligono etichettato  $abab^{-1}$ . In questo caso  $m = 2$  e  $k = 1$ . Quindi  $\chi(K) = 0$ . Poiché l'etichettatura contiene una coppia del secondo tipo,  $K$  è il 2-piano proiettivo.

**Osservazione 5.4.8.** In [3] Harer e Zagier hanno dimostrato la formula ricorsiva:

$$(n + 1)e(g, n) = (4n - 2)e(g, n - 1) + (2n + 1)(n - 1)(2n - 3)e(g - 1, n - 2)$$

dove  $e(g, n)$  è il numero di modi di raggruppare i lati di un  $(2n)$ -gono in  $n$  coppie in modo che la superficie quoziente sia  $gT$ .

## Capitolo 6

# Superfici di Riemann

### 6.1 Definizioni

Sia  $X$  una superficie topologica. Un atlante  $\{U_j, \phi_j\}_{j \in J}$  si dice *analitico* (o *olomorfo*) se per ogni  $j, k \in J$  tali che  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$  l'applicazione

$$\phi_j \cdot \phi_k^{-1} : \phi_k(U_j \cap U_k) \longrightarrow \mathbb{C}$$

è analitica (dove si è identificato  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ ).

Due atlanti analitici si dicono *equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante analitico. Una classe di equivalenza di atlanti analitici si dice una *struttura complessa* su  $X$ .

Una superficie topologica  $X$  su cui è assegnata una struttura complessa si dice una *superficie di Riemann*.

**Proposizione 6.1.1.** *Ogni superficie di Riemann  $X$  è una superficie differenziabile orientabile.*

*Dimostr.* Sia  $\{U_j, \phi_j\}_{j \in J}$  un atlante analitico per  $X$ . Per ogni  $j, k \in J$  tali che  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$  l'applicazione

$$\phi_j \cdot \phi_k^{-1} : \phi_k(U_j \cap U_k) \rightarrow \mathbb{C}$$

è analitica, e quindi è anche differenziabile; pertanto  $X$  è una superficie differenziabile. Siano  $u$  e  $v$  rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di  $\phi_j \cdot \phi_k^{-1}$ . In ogni punto di  $\phi_k(U_j \cap U_k)$  la matrice jacobiana ha determinante uguale a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

(l'uguaglianza è conseguenza delle equazioni di Cauchy-Riemann), il quale è positivo perché è non nullo.  $\square$

Dalla proposizione 6.1.1 e dal teorema di classificazione delle superficie topologiche compatte segue che, se  $X$  è una superficie di Riemann compatta e connessa, allora  $X$  è omeomorfa a  $S^2$  oppure a  $gT$  per qualche  $g \geq 1$ . L'intero  $g$  (uguale a 0 nel caso di  $S^2$ ) è chiamato *genere* di  $X$ , e si denota  $g(X)$ .

**Esempi 6.1.2.** (i) Un aperto  $X$  di  $\mathbb{C}$  è una superficie di Riemann la cui struttura è definita dall'atlante in cui c'è un'unica carta locale: l'inclusione  $\phi : X \subset \mathbb{C}$ . Più in generale, ogni sottoinsieme aperto di una superficie di Riemann è una superficie di Riemann (la verifica è lasciata al lettore).

(ii) Il più semplice esempio di superficie di Riemann compatta è la retta proiettiva complessa  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , che viene chiamata *sfera di Riemann*. Utilizzando coordinate omogenee  $[z_0, z_1]$ , denotiamo con  $U_i = \{[z_0, z_1] : z_i \neq 0\}$ ,  $i = 0, 1$ , gli aperti fondamentali, con

$$\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$$

l'applicazione  $\phi_0([z_0, z_1]) = \frac{z_1}{z_0}$ , e con

$$\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

l'applicazione  $\phi_1([z_0, z_1]) = \frac{z_0}{z_1}$ . È immediato verificare che  $\phi_0$  e  $\phi_1$  sono omeomorfismi di  $U_0$  ed  $U_1$  rispettivamente su  $\mathbb{C}$ , e che inoltre

$$\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}^* = \phi_0(U_0 \cap U_1)$ . Quindi  $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$  è un atlante analitico, che definisce su  $\mathbb{P}^1$  una struttura di superficie di Riemann compatta. Essendo  $\mathbb{P}^1$  omeomorfa ad una sfera,  $g(\mathbb{P}^1) = 0$ .

Poiché il complementare in  $\mathbb{P}^1$  di  $U_0$  consiste del solo punto  $[0, 1]$ , nella pratica è consuetudine identificare  $U_0$  a  $\mathbb{C}$  per mezzo della carta locale  $\phi_0$ , e di denotare con  $\infty$  il punto  $[0, 1]$ , ponendo quindi

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Con queste notazioni  $\phi_0$  diventa l'identità di  $\mathbb{C}$  in se stesso, mentre la carta  $\phi_1$  manda  $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$  in  $\mathbb{C}$  nel modo seguente:

$$\phi_1(z) = z^{-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\phi_1(\infty) = 0$$

(iii) Un altro esempio di superficie di Riemann compatta è un *toro complesso*, che si definisce nel modo seguente.

Siano  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ . Il sottogruppo di  $\mathbb{C}$  che essi generano è

$$\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2) = \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

che è chiamato il *reticolo* generato da  $\omega_1$  ed  $\omega_2$ . Denotiamo con  $X$  il gruppo quoziente  $\mathbb{C}/\Lambda$  con la topologia quoziente. Sia  $p : \mathbb{C} \rightarrow X$  l'applicazione naturale.

$X$  è omeomorfo ad un toro  $S^1 \times S^1$ . Consideriamo infatti

$$\Pi = \{z = a\omega_1 + b\omega_2 : a, b \in \mathbb{R}, |a| \leq 1, |b| \leq 1\}$$

$\Pi$  è un parallelogramma chiuso, su cui la relazione di equivalenza indotta da  $p$  coincide con quella che viene introdotta dall'etichettatura che definisce un toro. Poiché la restrizione di  $p$  a  $\Pi$  è suriettiva, deduciamo che  $X$  è omeomorfo ad un toro.

$X$  possiede una struttura complessa così definita.

Per ogni  $x \in X$  si consideri un punto  $\tilde{x} \in \mathbb{C}$  tale che  $p(\tilde{x}) = x$  ed un intorno aperto  $\tilde{U}$  di  $\tilde{x}$  che non contiene coppie di punti equivalenti mod.  $\Lambda$ . Posto  $U_x = p(\tilde{U})$ , l'applicazione  $\varphi_x = p^{-1} : U_x \rightarrow \tilde{U}$  è un omeomorfismo, e quindi  $(U_x, \varphi_x)$  è una carta locale.

Siano  $x, y \in X$  tali che  $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ . È immediato verificare che

$$\varphi_y \circ \varphi_x^{-1} : \varphi_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \mathbb{C}$$

altro non è se non la traslazione rispetto ad un elemento di  $\Lambda$ ; in particolare  $\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}$  è un'applicazione analitica. Pertanto  $\{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in X}$  è un atlante analitico su  $X$ , che fa di  $X = \mathbb{C}/\Lambda$  una superficie di Riemann. Il genere di un toro complesso è uguale a 1.

## 6.2 Applicazioni olomorfe tra superfici di Riemann

Sia  $X$  una superficie di Riemann,  $A \subset X$  un aperto,  $p \in A$ . Diremo che una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  è *analitica (o olomorfa) in  $p$*  se per ogni carta locale di un suo atlante analitico  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $p \in U$  la funzione

$$f \cdot \phi^{-1} : \phi(A \cap U) \rightarrow \mathbb{C}$$

è analitica in  $\phi(p)$ .  $f$  si dice *analitica su  $A$*  se lo è in ogni punto  $p \in A$ . L'insieme delle funzioni analitiche su  $A$  si denota  $H(A)$ .

Siano  $X$  ed  $Y$  due superfici di Riemann su cui siano assegnati atlanti analitici, ed  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua. Diremo che  $f$  è *analitica (o olomorfa)* in un punto  $p \in X$  se per ogni carta locale  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  in  $X$  tale che  $p \in U$  e per ogni carta locale  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  in  $Y$  tale che  $f(p) \in V$ , la composizione

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{C}$$

è analitica in  $\phi(p)$ . Diremo  $f$  *analitica* se è analitica in ogni punto  $p \in X$ .

### ESERCIZI

1. Dimostrare che affinché un'applicazione continua  $f : X \rightarrow Y$  tra due superfici di Riemann sia analitica in un punto  $p \in X$  è sufficiente che esistano una carta locale  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  in  $X$  tale che  $p \in U$ , ed una carta locale  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  in  $Y$  tale che  $f(p) \in V$ , tali che la composizione

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{C}$$

sia analitica in  $\phi(p)$ .

2. Verificare che le definizioni date sopra dipendono solo dalla struttura complessa su  $X$  ed  $Y$  e non dagli atlanti analitici scelti.
3. Dimostrare che una funzione analitica  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  è analitica come applicazione tra le superfici di Riemann  $X$  e  $\mathbb{C}$ .
4. Dimostrare che se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  sono applicazioni analitiche tra superficie di Riemann, allora la composizione  $g \circ f : X \rightarrow Z$  è un'applicazione analitica.

Un'applicazione analitica  $f : X \rightarrow Y$  è un *isomorfismo analitico*, o semplicemente un *isomorfismo*, se esiste un'applicazione analitica  $g : Y \rightarrow X$  tale che  $g \circ f = 1_X$  e  $f \circ g = 1_Y$ . Se un isomorfismo di  $X$  su  $Y$  esiste diremo che  $X$  ed  $Y$  sono *isomorfe*. È ovvio che l'isomorfismo è una relazione di equivalenza tra superfici di Riemann. Un isomorfismo di una superficie di Riemann  $X$  in se stessa si dice un *automorfismo* di  $X$ . Gli automorfismi di una superficie di Riemann  $X$  costituiscono un gruppo rispetto alla composizione, che si denota  $\text{Aut}(X)$ .

**Esempio 6.2.1.** L'isomorfismo è una relazione più restrittiva dell'omeomorfismo, cioè due superfici di Riemann omeomorfe non sono necessariamente isomorfe. L'esempio più semplice è dato da  $X = \mathbb{C}$  e  $Y = D_0(1) \subset \mathbb{C}$  il disco aperto unitario. Queste due superfici di Riemann sono omeomorfe ma non isomorfe perché ogni applicazione olomorfa  $f : X \rightarrow Y$  è costante, per il teorema di Liouville.

**Proposizione 6.2.2.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione analitica tra due superfici di Riemann connesse.*

- (i) *Se  $f$  non è costante allora è un'applicazione aperta e ha fibre discrete.*
- (ii) *Se  $X$  ed  $Y$  sono compatte ed  $f$  non è costante allora  $f$  è suriettiva e ha fibre finite.*
- (iii) *Se  $X$  è compatta ed  $Y$  non è compatta allora  $f$  è costante. In particolare ogni funzione analitica  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  su una superficie di Riemann compatta  $X$  è costante.*
- (iv) *Se  $f$  è biunivoca allora è un isomorfismo.*

*Dimostr.* (i) Denotiamo con  $A$  l'insieme dei punti di  $X$  in cui  $f$  è aperta. Per la definizione stessa di applicazione aperta,  $A$  è aperto. Sia  $x \in X \setminus A$ , e siano  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  in  $X$  tale che  $p \in U$ ,  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  in  $Y$  tale che  $f(p) \in V$  carte locali. Allora la funzione

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{C}$$

non è aperta nel punto  $\phi(x)$ . Pertanto  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  è costante in un intorno di  $\phi(x)$ , e quindi non è aperta in tale intorno: ma allora  $f$  non è aperta in un intorno di  $x$ . Segue che  $x$  è interno a  $X \setminus A$ , e quindi  $X \setminus A$  è aperto, cioè  $A$  è chiuso. Dalla connessione di  $X$  si deduce che  $A = X$  oppure  $A = \emptyset$ . Poiché  $f$  non è costante,  $A \neq \emptyset$ , quindi  $f$  è aperta in tutto  $X$ .

Supponiamo che  $x$  sia un punto di accumulazione di  $f^{-1}(y)$ . Sia  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  una carta locale in  $X$  tale che  $x \in U$  e sia  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  una carta locale in  $Y$  tale che  $y \in V$ . Per ipotesi esiste una successione  $\{x_n\}$  di punti distinti di  $f^{-1}(y)$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ; non è restrittivo supporre che  $\{x_n\} \subset U \cap f^{-1}(V)$ . Allora la funzione

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} - \psi(y) : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{C}$$

si annulla nel punto  $\phi(x)$  e nei punti  $\phi(x_n)$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi(x)$ : dal principio di identità delle funzioni analitiche segue che  $\psi \circ f \circ \phi^{-1} - \psi(y)$  è identicamente nulla, e quindi  $f$  è costante su  $U \cap f^{-1}(V)$ . Ma allora  $f$  non è aperta in  $x$  e ciò contraddice quanto dimostrato in precedenza. Quindi  $f^{-1}(y)$  è un sottoinsieme discreto di  $X$ .

(ii) Poiché  $Y$  è di Hausdorff ed  $X$  è compatto,  $f(X)$  è chiuso in  $Y$ . Se  $f$  non è costante allora  $f(X)$  è anche aperto e quindi  $f(X) = Y$ . Sia  $y \in Y$ . Allora  $f^{-1}(y)$  è chiuso in  $X$  e quindi è compatto. Pertanto  $f^{-1}(y)$ , essendo compatto e discreto, è finito.

(iii) Se  $f$  non è costante allora come in (ii) si deduce che  $f(X) = Y$ , e ciò contraddice l'ipotesi che  $Y$  non sia compatta. Quindi  $f$  è costante.

(iv) Poiché  $f$  analitica, è aperta, e quindi è un omeomorfismo. Sia  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  l'omeomorfismo inverso di  $f$ . È sufficiente dimostrare che  $f^{-1}$  è analitica. Sia  $y \in Y$  e sia  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  una carta locale in  $Y$  tale che  $y \in V$ ; sia inoltre  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  una carta locale in  $X$  tale che  $x := f^{-1}(y) \in U$ . Si ha:

$$\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})^{-1} : \psi(V \cap f(U)) \rightarrow \mathbb{C}$$

Poiché  $f$  è analitica,  $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  è analitica ed è un omeomorfismo su un aperto di  $\mathbb{C}$ , il suo insieme di definizione. Pertanto soddisfa  $g'(z) \neq 0$  in ogni punto: dal teorema dell'applicazione inversa segue che  $g^{-1} = \phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$  è analitica. Pertanto  $f^{-1}$  è analitica.  $\square$

Il risultato seguente si applica utilmente in molte circostanze:

**Proposizione 6.2.3.** *Sia  $Y$  una superficie di Riemann e sia  $p : X \rightarrow Y$  un rivestimento topologico tale che  $X$  abbia base numerabile (ad esempio  $p$  abbia fibre finite o numerabili). Esiste un'unica struttura di superficie di Riemann su  $X$  tale che  $p$  sia analitica.*

*Dimostr.* Per ipotesi  $X$  è a base numerabile; inoltre segue subito che  $X$  è di Hausdorff dal fatto che  $p$  è un rivestimento. Consideriamo un atlante  $\{U_j, \phi_j\}_{j \in J}$  per  $Y$  tale che gli aperti  $U_j$  siano ben ricoperti. Per ogni  $j \in J$  sia  $p^{-1}(U_j) = \coprod_{\alpha} V_{j\alpha}$  dove i  $V_{j\alpha}$  sono aperti di  $X$  mandati da  $p$  omeomorficamente su  $U_j$ . La composizione  $\phi_j \circ p : V_{j\alpha} \rightarrow U_j \rightarrow \mathbb{C}$  è una carta locale in  $X$ . Al variare di  $\alpha$  e di  $j \in J$  si ottiene un atlante. Quest'atlante è analitico perché lo è  $\{U_j, \phi_j\}$ ; si verifica subito che  $p$  è un'applicazione analitica rispetto alla struttura complessa così definita in  $X$ . L'unicità segue dal fatto che, essendo  $p$  analitica, le applicazioni  $\phi_j \circ p$  sono analitiche, e quindi sono carte locali per qualsiasi struttura complessa che rende  $p$  analitica.  $\square$

Dimostriamo un altro importante risultato riguardante le applicazioni analitiche tra superfici di Riemann.

**Proposizione 6.2.4.** *Sia  $f : X \setminus \Delta \rightarrow Y$  un'applicazione analitica, dove  $X$  ed  $Y$  sono superfici di Riemann, e  $\Delta \subset X$  finito. Se esiste un'applicazione continua  $\hat{f} : X \rightarrow Y$  che estende  $f$ , allora  $\hat{f}$  è analitica.*

*Dimostr.* Sia  $x \in \Delta$ , e siano  $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $w : V \rightarrow \mathbb{C}$  carte locali in  $X$  e in  $Y$  rispettivamente, tali che  $x \in U$  e  $\hat{f}(x) \in V$ . La funzione

$$w \circ \hat{f} \circ z^{-1} : z(U \cap \hat{f}^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{C}$$

è analitica in  $z(U \cap \hat{f}^{-1}(V)) \setminus z(x)$  e limitata in un intorno di  $z(x)$ , quindi è analitica anche in  $z(x)$ . Ciò dimostra che  $\hat{f}$  è analitica in  $x$ .  $\square$

Come corollario della proposizione precedente possiamo dare una nuova dimostrazione di un importante teorema riguardante le funzioni intere.

**Corollario 6.2.5** (Liouville). *Se  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione analitica e limitata, allora  $f$  è costante.*

*Dimostr.* Se  $f$  è limitata allora  $f \circ \phi_1^{-1}$  è limitata in un intorno di 0, e quindi ha una singolarità eliminabile in 0. Pertanto  $f$  si estende ad una funzione olomorfa  $\hat{f} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Ma essendo  $f$  limitata,  $\hat{f}$  non è suriettiva e quindi è costante.  $\square$

Un'altra applicazione della 6.2.4 è la seguente proposizione che verrà applicata ripetutamente nel seguito.

**Proposizione 6.2.6.** *Sia  $Y$  una superficie di Riemann compatta e connessa,  $S \subset Y$  un sottoinsieme finito,  $p : X^\circ \rightarrow Y \setminus S$  un rivestimento finito, con  $X^\circ$  connesso. Allora esistono*

- un'inclusione aperta  $X^\circ \subset X$  in cui  $X$  è una superficie di Riemann compatta e connessa tale che  $X \setminus X^\circ$  sia un insieme finito, e
- un'estensione di  $p$  ad un'applicazione analitica  $\hat{p} : X \rightarrow Y$ .

La superficie  $X$  è univocamente determinata a meno di isomorfismo unico.



*Dimostr. - Esistenza* - Consideriamo il disco aperto unitario  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  e poniamo  $D^\circ = D \setminus \{0\}$ . Sia  $q : E^\circ \rightarrow D^\circ$  un rivestimento connesso di grado  $m$ . Poiché  $\pi_1(D^\circ) \cong \mathbb{Z}$ ,  $q$  corrisponde al sottogruppo  $m\mathbb{Z}$  di  $\mathbb{Z}$ . Il rivestimento di grado  $m$  corrispondente a questo sottogruppo è

$$p_m : D^\circ \rightarrow D^\circ, \quad z \mapsto z^m$$

e quindi esiste un omeomorfismo  $\psi : D^\circ \rightarrow E^\circ$  tale che  $q \cdot \psi = p_m$ . Questo omeomorfismo non è univocamente determinato, ma dipende dalla scelta dell'immagine in  $E^\circ$  di un punto base in  $D^\circ$ , e ci sono esattamente  $m$  scelte possibili, corrispondenti alle  $m$  controimmagini rispetto a  $q$  del punto base in  $D^\circ$ . Le altre possibili scelte di  $\psi$  sono della forma  $z \mapsto \psi(\zeta_k z)$ , dove  $\zeta_k = e^{2k\pi i/m}$  è un radice primitiva  $m$ -esima dell'unità,  $k = 1, \dots, m-1$ . Definiamo  $E$  come l'unione di  $E^\circ$  con un punto  $a$ , e definiamo in  $E$  una struttura di superficie di Riemann in modo che l'applicazione  $D \rightarrow E$  ottenuta mandando  $0 \mapsto a$  e che coincide con  $\psi$  su  $D^\circ$ , sia un isomorfismo. La definizione di questa struttura non dipende dalla scelta di  $\psi$  perché l'applicazione  $z \mapsto \psi(\zeta_k z)$  è la composizione di un automorfismo di  $D^\circ$  con  $\psi$ .

Consideriamo ora il rivestimento assegnato  $p$ . Il problema è locale in  $Y$ . Sia  $y \in S$  e sia  $\phi : U_y \rightarrow D$  una carta locale in  $Y$  tale che  $y \in U_y$  e  $\phi(y) = 0$ , e tale che  $U_y \cap S = \{y\}$ ; poniamo  $U_y^\circ = U_y \setminus \{y\}$ . Allora

$$p^{-1}(U_y^\circ) = V_1^\circ \cup \dots \cup V_N^\circ$$

dove ognuno dei  $V_i^\circ \rightarrow U_y^\circ$  è un rivestimento connesso, di grado  $m_i$ . Per quanto visto nella prima parte, per ogni  $i = 1, \dots, N$  possiamo trovare un isomorfismo  $\psi_i : V_i^\circ \rightarrow D^\circ$  tale che il seguente diagramma di applicazioni ologomorfe sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_i^\circ & \xrightarrow{\psi_i} & D^\circ \\ \downarrow & & \downarrow p_m \\ U_y^\circ & \xrightarrow{\phi} & D^\circ \end{array}$$

Pertanto aggiungendo un punto ad ogni  $V_i^\circ$  otteniamo spazi  $V_i$  tali che ogni  $\psi_i$  si estende ad un omeomorfismo  $V_i \rightarrow D$ . Prendendo queste estensioni come carte locali ed eseguendo queste operazioni in ogni punto di  $S$  si ottiene uno spazio  $X$  che è l'unione di  $X^\circ$  con un numero finito di punti. Le carte locali che abbiamo costruito sono compatibili con quelle di  $X^\circ$  (la verifica è lasciata al lettore) e danno pertanto ad  $X$  una struttura di superficie di Riemann. Il rivestimento  $p$  si estende ad un'applicazione continua  $\hat{p} : X \rightarrow Y$  che è ologomorfa per la Prop. 6.2.4.

Dimostriamo che  $X$  è compatta. Poiché  $Y$  è compatta, è sufficiente dimostrare che l'applicazione  $\hat{p}$  è propria. Sia  $K \subset Y$  compatto e sia  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$  un ricoprimento aperto di  $\hat{p}^{-1}(K)$ . È sufficiente dimostrare che  $\mathcal{U}$  possiede un raffinamento che è un ricoprimento finito di  $\hat{p}^{-1}(K)$ .

Possiamo raffinare  $\mathcal{U}$  con un ricoprimento  $\mathcal{V} = \{V_h\}_{h \in H}$  tale che

a)  $V_h \cap \hat{p}^{-1}(S) \neq \emptyset$  solo per un numero finito di  $h \in H$ ;  
 b) per ogni  $h$  tale che  $V_h \cap \hat{p}^{-1}(S) = \emptyset$ ,  $\hat{p}(V_h)$  sia ben ricoperto e ogni componente di  $\hat{p}^{-1}(\hat{p}(V_h))$  che viene mandata omeomorficamente su  $\hat{p}(V_h)$  sia contenuta in un aperto di  $\mathcal{U}$ . L'esistenza di  $\mathcal{V}$  segue dal fatto che  $\hat{p}$  ha fibre finite,  $\hat{p}^{-1}(S)$  è finito e gli aperti  $V$  di  $X^\circ$  che hanno immagine ben ricoperta formano una base per gli aperti di  $X^\circ$ .

Poiché  $\hat{p}$  è suriettiva e aperta, la famiglia  $\{\hat{p}(V_h)\}$  è un ricoprimento aperto di  $K$ ; sia  $\{\hat{p}(V_{h_1}), \dots, \hat{p}(V_{h_s})\}$  un sottoricoprimento finito. Allora  $\{\hat{p}^{-1}(\hat{p}(V_{h_1})), \dots, \hat{p}^{-1}(\hat{p}(V_{h_s}))\}$  è un ricoprimento di  $\hat{p}^{-1}(K)$ ; ogni  $\hat{p}^{-1}(\hat{p}(V_{h_l}))$  è unione di un numero finito di aperti ognuno dei quali è contenuto in un aperto di  $\mathcal{U}$ , per la condizione b). La famiglia di questi aperti, al variare di  $l = 1, \dots, s$ , costituisce un ricoprimento finito di  $\hat{p}^{-1}(K)$  che raffina  $\mathcal{U}$ .

*Unicità* - Osserviamo che  $X$  è stata costruita in modo che, per ogni punto  $y \in S$ ,  $\hat{f}^{-1}(y)$  consista di tanti punti quante sono le componenti connesse di  $\hat{f}^{-1}(U_y^\circ)$ . Sia  $g : X' \rightarrow Y$  soddisfacente le condizioni della proposizione. Allora  $g^{-1}(U_y^\circ) = \hat{f}^{-1}(U_y^\circ)$  e quindi, poiché  $g$  è propria,  $g^{-1}(y)$  contiene almeno un punto per ogni componente connessa di  $\hat{f}^{-1}(U_y^\circ)$ . Inoltre  $g^{-1}(y)$  non contiene altri punti perché un punto  $x$  siffatto sarebbe isolato, e quindi  $X'$  non potrebbe essere una superficie in un intorno di  $x$ . Quindi l'identità  $X^\circ = X^\circ$  si estende ad un'applicazione biunivoca e continua  $\alpha : X \rightarrow X'$  che è olomorfa per la Prop. 6.2.4, e quindi è un isomorfismo, per la Prop. 6.2.2(iv).  $\square$

### 6.3 La formula di Riemann-Hurwitz

Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione analitica e non costante tra due superfici di Riemann connesse e sia  $p \in X$ . Siano  $q = f(p)$ ,  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  una carta locale in  $X$  tale che  $p \in U$ , e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  una carta locale in  $Y$  tale che  $f(U) \subset V$ .

L'indice di ramificazione di  $f$  in  $p$  si definisce come

$$o_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1} - \psi(q))$$

cioè come

$$e_{\psi \circ f \circ \phi^{-1}}(\phi(p))$$

e si denota  $e_f(p)$ . È un intero  $\geq 1$ , indipendente dalla scelta delle carte locali  $\phi$  e  $\psi$ .

L'indipendenza dalle carte locali si verifica nel modo seguente.

Dalla definizione segue che in un intorno sufficientemente piccolo di  $\phi(p)$  la funzione  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  è la composizione di un isomorfismo analitico locale con la funzione  $w \mapsto w^{e_f(p)}$ . Scegliendo altre carte locali  $\tilde{\phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\tilde{\psi} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}$ , per opportuni intorni  $\tilde{U}$  di  $p$  e  $\tilde{V}$  di  $q$ , si ha:

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})$$

Si deduce che in un intorno sufficientemente piccolo di  $\phi(p)$  la funzione  $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1}$  è la composizione di un isomorfismo analitico locale con la funzione  $w \mapsto w^e$  per qualche  $e \geq 1$ . Poiché  $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$  e  $\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$  sono applicazioni oloedriche invertibili, segue che  $e = e_f(p)$ .

Un punto  $p \in X$  tale che  $e_f(p) \geq 2$  si dice *punto di ramificazione* di  $f$ . Un punto di ramificazione  $p$  si dice *semplice* se  $e_f(p) = 2$ . I punti di ramificazione di  $f$  costituiscono un sottoinsieme discreto di  $X$ .

**Proposizione 6.3.1.** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione analitica e non costante tra due superfici di Riemann compatte e connesse.*

(i)  *$f$  possiede un numero finito di punti di ramificazione.*

(ii) *Se  $R(f) \subset X$  è l'insieme dei punti di ramificazione e  $S = f[R(f)]$ , l'applicazione*

$$\tilde{f} : X \setminus f^{-1}(S) \rightarrow Y \setminus S$$

*determinata da  $f$  è un rivestimento finito; il suo grado  $n$  si dice grado di  $f$ .*

(iii) *Per ogni  $y \in Y$  si ha:*

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} e_f(x) = n$$

*Dimostr.* (i) Come già osservato l'insieme  $R(f)$  dei punti di ramificazione di  $f$  è un sottoinsieme discreto di  $X$ . Poiché  $X$  è compatta  $R(f)$  è un insieme finito.

(ii)  $\tilde{f}$  è un isomorfismo analitico locale e quindi è un omeomorfismo locale. Inoltre  $\tilde{f}$  è suriettiva perché  $f$  lo è. Sia  $y \in Y \setminus S$  e per ogni  $x \in f^{-1}(y)$  sia  $U_x$  un intorno aperto di  $x$  in  $X \setminus f^{-1}(S)$  tale che si abbia  $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$  se  $x \neq x'$  e la restrizione di  $f$  a  $U_x$  sia un omeomorfismo sull'immagine. Sia  $V \subset \bigcap_{x \in f^{-1}(y)} f(U_x)$  aperto.

Facciamo vedere che se  $V$  è sufficientemente piccolo allora  $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x$ . Altrimenti esisterebbe un sistema fondamentale di intorni  $\{V_n\}$  di  $y$  ed una successione  $\{x_n \in f^{-1}(V_n) \setminus (\bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x)\}$ . Per la compattezza di  $X$  la successione  $\{x_n\}$  possiede una sottosuccessione convergente  $\{x_{n_k}\}$ ; necessariamente  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in f^{-1}(y)$ , e questa è una contraddizione perché  $\bigcup_x U_x$  è un intorno di  $f^{-1}(y)$ .

Pertanto  $V \subset Y \setminus S$  e  $f^{-1}(V) = \bigcup_x (U_x \cap f^{-1}(V))$  e ognuno degli aperti  $U_x \cap f^{-1}(V)$  viene mandato da  $f$  omeomorficamente su  $V$ : quindi  $V$  è ben ricoperto. Se ne deduce che  $\tilde{f}$  è un rivestimento. Il suo grado è finito perché  $f$  ha fibre finite.

(iii) Se  $y \in Y \setminus S$  allora la conclusione è evidente, perché  $e_f(x) = 1$  per ogni  $x \in X \setminus f^{-1}(S)$  e  $f$  ha grado  $n$ .

Supponiamo  $y \in S$ , e sia  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Per ogni  $i = 1, \dots, m$  è possibile trovare intorni aperti  $U_i$  di  $x_i$  e  $V_i$  di  $y$  tali che  $f(U_i) = V_i$  e in coordinate locali l'applicazione  $f : U_i \rightarrow V_i$  sia  $z \mapsto z^{e_f(x_i)}$ . Se  $V$  è un intorno

aperto di  $y$  contenuto in  $V_1 \cap \dots \cap V_n$  e tale che  $V \cap S = \{y\}$  allora per ogni  $y' \in V$ ,  $y' \neq y$ , la fibra  $f^{-1}(y')$  consiste di  $\sum_{i=1}^m e_f(x_i)$  punti; ma questo numero dev'essere uguale al grado  $n$  di  $f$  perché  $y' \notin S$ .  $\square$

Un'applicazione analitica e non costante  $f : X \rightarrow Y$  di superfici di Riemann compatte e connesse si dice un *rivestimento ramificato*. I punti dell'immagine  $S = f(R(f))$  del luogo di ramificazione  $R(f)$  si dicono *punti di diramazione* di  $f$ .

Se  $f$  ha grado 1 allora necessariamente  $R(f) = \emptyset$  e  $f$  è un rivestimento di grado 1, cioè è un omeomorfismo, e quindi è un isomorfismo per la Proposizione 6.2.2(iv).

**Esempi 6.3.2.** (i) Sia  $n$  un intero positivo,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad a_n \neq 0$$

e sia

$$f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

definita da  $z \mapsto f(z)$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$  e  $f(\infty) = \infty$ .

È ovvio che  $f$  è un'applicazione analitica in ogni punto di  $\mathbb{C}$ . Per verificare che  $f$  è analitica in  $\infty$  consideriamo un intorno  $A$  di  $\infty$  contenuto in  $U_1$  e tale che  $f(A) \subset U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ ; consideriamo la composizione

$$\phi_1 \cdot f \cdot \phi_1^{-1}(t) = \frac{1}{f(\frac{1}{t})} = \frac{t^n}{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n}$$

che è definita in  $\phi_1(A)$ . Poiché questa funzione è analitica in un intorno di 0,  $f$  è olomorfa in  $\infty$ . Pertanto  $f$ , essendo non costante, è un rivestimento ramificato. In particolare, essendo non costante  $f$  è suriettiva, e quindi  $f(z) = 0$  ha soluzioni. Ciò fornisce una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

Si osservi che  $e_f(\infty) = o_0(\phi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}) = n$ . Pertanto, poiché  $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ ,  $f$  è un rivestimento ramificato di grado  $n$ .

(ii) La funzione

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$\exp(z) = e^z$$

non può essere estesa ad una funzione analitica di  $\mathbb{P}^1$  in  $\mathbb{P}^1$ . Infatti  $\exp$  non è costante né suriettiva (essendo  $0 \notin \text{Im}(\exp)$ ) e quindi non possiede un'estensione  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  suriettiva; a maggior ragione non possiede un'estensione analitica (per la Prop. 6.2.2(ii)).

**Esercizio 6.3.3.** Dimostrare che le funzioni  $\sin, \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  non si estendono a funzioni analitiche  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

Il prossimo risultato è una formula che mette in relazione il grado di un rivestimento ramificato di superfici di Riemann compatte, i loro generi e il numero di punti di ramificazione.

**Teorema 6.3.4.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  è un rivestimento ramificato di grado  $n$  di superfici di Riemann compatte e connesse di generi  $g(X)$  e  $g(Y)$  rispettivamente, si ha:*

$$2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + \sum_{x \in R(f)} (e_f(x) - 1) \quad (6.1)$$

La (6.1) è chiamata formula di Riemann-Hurwitz.

*Dimostr.* Sia  $S \subset Y$  l'insieme dei punti di diramazione di  $f$ . È possibile trovare una triangolazione  $\tau$  di  $Y$  tale che:

- ogni punto di  $S$  sia vertice di  $\tau$ ,
- ogni triangolo di  $\tau$  non contenga più di un vertice che sta in  $S$ ,
- per ogni  $T \in \tau$ ,  $f^{-1}(T)$  sia l'unione di  $n$  triangoli che a due a due si incontrano in al più un punto di  $R(f)$ .

Le prime due condizioni possono essere soddisfatte facilmente raffinando opportunamente una triangolazione qualunque di  $Y$ . L'ultima condizione sarà soddisfatta raffinando ulteriormente fino a che ogni triangolo non contenente punti di  $S$  tra i suoi vertici sia contenuto in un aperto ben ricoperto di  $Y \setminus S$ ; ed ogni triangolo avente un vertice in  $s \in S$  sia contenuto in un aperto  $V$  avente le stesse proprietà descritte nella dimostrazione della proposizione 6.3.1(iii).

I triangoli di cui sono unione gli  $f^{-1}(T)$ ,  $t \in \tau$ , costituiscono una triangolazione  $\tilde{\tau}$  di  $X$ . Si ha:

$$t(\tilde{\tau}) = nt(\tau); \quad l(\tilde{\tau}) = nl(\tau).$$

Ad ogni vertice  $p$  di  $\tau$  corrispondono un numero di vertici di  $\tilde{\tau}$  pari al numero di punti di  $f^{-1}(p)$ , che è uguale a  $n - \sum_{x \in f^{-1}(p)} (e_f(x) - 1)$ . Pertanto:

$$v(\tilde{\tau}) = nv(\tau) - \sum_{x \in R(f)} (e_f(x) - 1).$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= -v(\tilde{\tau}) + l(\tilde{\tau}) - t(\tilde{\tau}) = -nv(\tau) + \sum_{x \in R(f)} (e_f(x) - 1) + nl(\tau) - nt(\tau) = \\ &= n(2g(Y) - 2) + \sum_{x \in R(f)} (e_f(x) - 1) \end{aligned}$$

□

**Esercizio 6.3.5.** Verificare la formula di Riemann-Hurwitz per il rivestimento ramificato  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  definito dalla funzione  $z \mapsto z^n$ .

## 6.4 Funzioni meromorfe sulle superfici di Riemann

Sia  $X$  una superficie di Riemann connessa. Una *funzione meromorfa* su  $X$  è una funzione olomorfa  $f : X \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  definita sul complementare di un sottoinsieme discreto  $S \subset X$  e tale che, per ogni carta locale  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ , la funzione  $f \circ \phi^{-1}$  sia olomorfa su  $\phi(U \setminus (U \cap S))$  e abbia al più singolarità polari in  $\phi(U \cap S)$ , cioè sia una funzione meromorfa su  $\phi(U)$ , cioè sia quoziente di due funzioni olomorfe nell'intorno di ogni  $z \in \phi(U)$ .

Possiamo più sinteticamente dire che  $f$  è *localmente meromorfa* ovvero che è meromorfa *nell'intorno di ogni punto* di  $X$ , cioè che è localmente il quoziente di due funzioni olomorfe.

Questa definizione generalizza la nozione di funzione meromorfa su un aperto di  $\mathbb{C}$ . L'insieme delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann  $X$  si denota  $M(X)$ .

In modo del tutto analogo al caso delle funzioni meromorfe in un aperto di  $\mathbb{C}$  si definiscono gli *zeri* e i *poli* di una funzione  $f \in M(X)$ .

**Lemma 6.4.1.** *Associando a  $f \in M(X)$  l'applicazione  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  definita ponendo*

$$f(z) = \begin{cases} [1, z] & \text{se } z \text{ non è un polo di } f \\ [0, 1] = \infty & \text{se } z \text{ è un polo di } f \end{cases}$$

*si ottiene una corrispondenza biunivoca naturale tra gli elementi di  $M(X)$  e le applicazioni olomorfe non identicamente uguali a  $\infty$  da  $X$  a  $\mathbb{P}^1$ .*

*Dimostr.* La corrispondenza è evidente nel caso di funzioni costanti. Sia  $f \in M(X)$  non costante e sia  $S \subset X$  il sottoinsieme dei poli di  $f$ . L'applicazione  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  è evidentemente olomorfa in  $X \setminus S$ . Se  $t \in S$  sia  $A_t \subset X$  un aperto non contenente zeri di  $f$  e tale che  $A_t \cap S = \{t\}$ . Allora  $f(A_t) \subset U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{[1, 0]\}$ . Si ha:

$$\phi_1 \circ f = 1/f(t)$$

che è olomorfa in  $A_t$ . Quindi  $f$  è olomorfa anche nei punti di  $S$ .

Viceversa, supponiamo che  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  sia un'applicazione olomorfa non costante. L'insieme  $S = f^{-1}(\infty)$  è discreto, per la proposizione 6.2.2. Sia  $t \in S$  e  $A_t \subset X$  un aperto contenente  $t$  tale che  $f(A_t) \subset U_1$ . La composizione di  $f|_{A_t}$  con la carta locale  $\phi_1$  è la funzione  $1/f : A_t \rightarrow \mathbb{C}$ , che per ipotesi è olomorfa in  $A_t$ . Pertanto  $f$  è meromorfa in  $A_t$ . Poiché evidentemente  $f$  è olomorfa in ogni punto di  $X \setminus S$ , concludiamo che  $f \in M(X)$ .  $\square$

In virtù di questo lemma d'ora in poi identificheremo ogni  $f \in M(X)$  con la corrispondente applicazione olomorfa  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

Osserviamo che se  $f, g \in M(X)$  allora  $f \pm g, fg$  sono ben definite e sono meromorfe (perché lo sono localmente); similmente se  $f \in M(X)$ ,  $f \neq 0$ , allora  $1/f \in M(X)$ . Pertanto  $M(X)$  è un campo.

È ovvio che le funzioni olomorfe su  $X$  costituiscono un sottoanello  $H(X)$  di  $M(X)$ ; in particolare  $M(X)$  contiene le funzioni costanti, che costituiscono un sottocampo che si identifica a  $\mathbb{C}$ .

Supponiamo che  $f \in M(X)$  non sia identicamente nulla. Sia  $x \in X$  e sia  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  una carta locale tale che  $x \in U$  e  $f(U)$  sia contenuto in uno dei due aperti  $U_i, i = 0, 1$ . L'intero:

$$o_x(f) = o_{\phi(x)}(f \circ \phi^{-1})$$

sarà chiamato *ordine di  $f$  in  $x$* .

Osserviamo che  $o_x(f) \neq 0$  se e solo se  $f(x) = 0$  oppure  $f(x) = \infty$ . Se  $f(x) = 0$  allora si ha  $o_x(f) = e_f(x)$ ; se invece  $f(x) = \infty$  allora  $o_x(f) = -e_f(x)$  perché  $1/z$  è una carta locale in un intorno di  $\infty$ . In particolare la definizione di  $o_x(f)$  è indipendente dalla carta locale  $\phi$ .

**Proposizione 6.4.2.** *Se  $f$  è una funzione meromorfa non costante su una superficie di Riemann compatta  $X$ , allora  $o_x(f) = 0$  per tutti gli  $x \in X$  tranne al più un numero finito, e:*

$$\sum_{x \in X} o_x(f) = 0$$

*Dimostr.* Come osservato sopra,  $o_x(f)$  è diverso da zero solo nei punti di  $f^{-1}(0) \cup f^{-1}(\infty)$ , e quest'insieme è finito perché  $X$  è compatta ed  $f$  non è costante. Sia  $n$  il grado di  $f$ . Per la proposizione 6.3.1(iii) si ha:

$$\sum_{x \in f^{-1}(0)} o_x(f) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} e_f(x) = n$$

mentre

$$\sum_{x \in f^{-1}(\infty)} o_x(f) = \sum_{x \in f^{-1}(\infty)} -e_f(x) = -\left(\sum_{x \in f^{-1}(\infty)} e_f(x)\right) = -n$$

e quindi la conclusione segue.  $\square$

**Esempi 6.4.3.** (i) Siano  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ,  $Q(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m \in \mathbb{C}[z]$ ,  $a_n b_m \neq 0$ , due polinomi non nulli privi di fattori comuni, e sia

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

la corrispondente funzione razionale. La funzione meromorfa  $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  si estende a  $\infty$  ponendo

$$R(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z)$$

Verifichiamo che  $R \in M(\mathbb{P}^1)$ .

Infatti  $R$  è certamente meromorfa in  $\mathbb{C} = U_0$ , come è stato verificato all'inizio del paragrafo.

Inoltre in un intorno sufficientemente piccolo di  $0 \in \mathbb{C}$  si ha:

$$\begin{aligned} R \circ \phi_1^{-1}(t) &= R\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{Q\left(\frac{1}{t}\right)} = \\ &= \frac{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_m} t^{m-n} \\ &= (a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n)(b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_m)^{-1} t^{m-n} \end{aligned}$$

e quindi se  $m \geq n$   $R \circ \phi_1^{-1}$  ha una singolarità eliminabile in 0 e quindi  $R$  è analitica in  $\infty$ . Se invece  $m < n$  allora  $R \circ \phi_1^{-1}$  ha un polo in 0 e quindi  $\phi_1 \circ R \circ \phi_1^{-1}$  è analitica in 0, e pertanto  $R$  è analitica in  $\infty$  anche in questo caso.

Viceversa, sia  $f(z) \in M(\mathbb{P}^1)$ , non identicamente nulla, e siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  i poli di  $f$  in  $\mathbb{C}$ , di ordini  $n_1, \dots, n_s$  rispettivamente. La funzione

$$g(z) = f(z)(z - \alpha_1)^{n_1} \dots (z - \alpha_s)^{n_s}$$

è analitica in tutto  $\mathbb{C}$ , e quindi

$$g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

dove il secondo membro è una serie di potenze a raggio di convergenza  $+\infty$ . Poiché  $f(z)$  è analitica all' $\infty$ , lo è anche  $g(z)$ , e quindi  $\sum_{k \geq 0} a_k t^{-k}$  è una funzione meromorfa in 0. Pertanto  $a_k = 0$  per ogni  $k \gg 0$ . Quindi  $g(z)$  è un polinomio, e

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \alpha_1)^{n_1} \dots (z - \alpha_s)^{n_s}}$$

è una funzione razionale.

In conclusione il campo  $M(\mathbb{P}^1)$  delle funzioni meromorfe su  $\mathbb{P}^1$  si identifica con il campo  $\mathbb{C}(z)$  delle funzioni razionali in una variabile  $z$ , cioè con in campo dei quozienti di  $\mathbb{C}[z]$ .

Dall'analisi fatta segue che  $R(z) \in M(\mathbb{P}^1)$  è analitica in  $\mathbb{C}$  se e solo se  $R(z)$  è un polinomio.

Se  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  dove  $P(z)$  e  $Q(z)$  sono due polinomi non nulli privi di fattori comuni, il grado della funzione meromorfa  $R(z)$ , come applicazione analitica di  $\mathbb{P}^1$  in sé, è uguale a  $\max\{\text{gr}(P), \text{gr}(Q)\}$  (per verificarlo è sufficiente calcolare  $\sum_{f(x)=0} o_x(f)$ ).

(ii) *Gli automorfismi di  $\mathbb{P}^1$ .*

Poiché gli automorfismi di  $\mathbb{P}^1$  sono le funzioni meromorfe su  $\mathbb{P}^1$  non costanti e di grado 1, essi sono della forma

$$R(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{6.2}$$



con  $ad - bc \neq 0$  (questa condizione garantisce che numeratore e denominatore non siano proporzionali e quindi che  $R$  non sia costante). Una funzione meromorfa della forma (6.2) è detta *trasformazione di Möbius* o *trasformazione lineare fratta*. Pertanto il gruppo  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  degli automorfismi di  $\mathbb{P}^1$  consiste delle trasformazioni di Möbius.

Si osservi che una trasformazione (6.2) non determina univocamente i coefficienti  $a, b, c, d$ : se infatti  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  allora i coefficienti  $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$  definiscono la stessa trasformazione. Si ha  $R(-d/c) = \infty$ ,  $R(\infty) = a/c$ ; in particolare  $R(\infty) = \infty$  se e solo se  $c = 0$ , cioè se  $R(z) = az + b$  è un'applicazione lineare.

La composizione di due trasformazioni di Möbius  $R(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  e  $S(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$  è:

$$(S \cdot R)(z) = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}$$

dove

$$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = (a'd' - b'c')(ad - bc) \neq 0$$

La trasformazione identità  $I(z) = z$  corrisponde ai coefficienti  $a = d \neq 0$ ,  $b = c = 0$ , mentre l'inversa della (6.2) è la trasformazione di Möbius:

$$R^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Una conseguenza di queste osservazioni è che si ha un omomorfismo suriettivo di gruppi:

$$\text{GL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

il cui nucleo consiste delle matrici

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{I}_2, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

e quindi si identifica al gruppo moltiplicativo  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Tutto ciò può essere riassunto nella successione esatta di gruppi:

$$(1) \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow (1)$$

Si deduce che  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  si identifica al gruppo  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  delle proiettività di  $\mathbb{P}^1$  in sé. Per ulteriori dettagli rinviamo al complemento 27.10.1 del testo [6].

(iii) *Gli automorfismi di  $\mathbb{C}$ .*

Sia  $z \mapsto f(z)$  un automorfismo di  $\mathbb{C}$ : allora  $f$  è una funzione intera. Poiché  $f$  non è costante, non è analitica all' $\infty$  (le sole funzioni analitiche sull'intera sfera di Riemann sono le costanti). Pertanto si hanno due possibilità:

- a)  $f$  ha una singolarità essenziale all' $\infty$ .
- b)  $f$  ha un polo all' $\infty$ .

Poiché  $f$  è un omeomorfismo, l'immagine del disco  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  è un aperto non vuoto che non interseca  $f(\mathbb{C} \setminus D)$ . Quindi  $f(\mathbb{C} \setminus D)$  non è denso in  $\mathbb{C}$ , e quindi il caso a) non si verifica. Quindi si verifica il caso b), e pertanto  $f$  si estende ad un automorfismo di  $\mathbb{P}^1$  che manda  $\infty \mapsto \infty$ . Pertanto si ha  $f(z) = az + b$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . Quindi:  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  *consiste delle trasformazioni lineari*:

$$f(z) = az + b,$$

dove  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ .

Se  $a = 1$ ,  $f$  è una traslazione, e non ha punti fissi, cioè non esistono punti  $z$  tali che  $f(z) = z$ . Se  $a \neq 1$  allora  $f$  ha l'unico punto fisso:  $z = \frac{b}{1-a}$ .

L'esempio 6.4.3(i) mostra in particolare che  $M(\mathbb{P}^1)$  contiene funzioni meromorfe non costanti. Vedremo nel prossimo paragrafo che ogni superficie di Riemann di genere 1 possiede funzioni meromorfe non costanti.

Più in generale vale il seguente risultato, di fondamentale importanza nella teoria delle superfici di Riemann:

**Teorema 6.4.4** (di esistenza di Riemann). *Su ogni superficie di Riemann compatta e connessa esistono funzioni meromorfe non costanti.*

La dimostrazione di questo teorema utilizza strumenti che non saranno sviluppati in questo corso, e quindi verrà omessa.

## 6.5 Le funzioni meromorfe sui tori complessi

Una funzione  $f(z)$  meromorfa in  $\mathbb{C}$  si dice *periodica* se esiste  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $\omega \neq 0$ , tale che

$$f(z + \omega) = f(z)$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Il numero  $\omega$  si dice un *periodo* di  $f$ . Dalla definizione segue che si ha anche  $f(z + k\omega) = f(z)$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , e quindi anche  $k\omega$  è un periodo di  $f$  se lo è  $\omega$ .

Se  $f$  è costante allora ogni  $\omega \in \mathbb{C}$  è periodo di  $f$ . Esempi di funzioni periodiche non costanti sono  $e^z$ ,  $\text{sen}(z)$ , di periodo  $2\pi i$  e  $2\pi$  rispettivamente.

Una funzione periodica  $f(z)$  si dice *doppiamente periodica* o *ellittica* se tutti i suoi periodi sono della forma

$$\omega = h\omega_1 + k\omega_2, \quad h, k \in \mathbb{Z}$$

dove  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  sono due numeri complessi linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ .

L'insieme dei periodi di una funzione ellittica è dunque un reticolo

$$\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$$

Dato un reticolo  $\Lambda$ , l'insieme delle funzioni ellittiche il cui reticolo dei periodi coincide con, o contiene,  $\Lambda$ , si denota  $E(\Lambda)$  ed i suoi elementi si dicono *funzioni ellittiche relative a  $\Lambda$* . Per convenzione le funzioni costanti si considerano ellittiche relative a qualunque  $\Lambda$ . Si osservi che se  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$  allora  $E(\Lambda_2) \subset E(\Lambda_1)$ .

È immediato verificare che  $E(\Lambda)$  costituisce un sottocampo di  $M(\mathbb{C})$ .

Consideriamo il toro complesso  $X = \mathbb{C}/\Lambda$ , e denotiamo con  $p : \mathbb{C} \rightarrow X$  l'applicazione naturale. È evidente che  $p$  è olomorfa.

Se  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  è un'applicazione olomorfa, la composizione

$$g = f \circ p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$$

è una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  tale che  $g(z + \omega) = g(z)$  per ogni  $\omega \in \Lambda$ ; quindi  $g \in E(\Lambda)$ .

Viceversa, se  $g \in E(\Lambda)$  allora  $g$ , assumendo lo stesso valore su ogni classe laterale rispetto a  $\Lambda$ , definisce un'applicazione  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  tale che  $g = f \circ p$ . Poiché le carte locali in  $X$  sono definite come inverse locali di  $p$ , segue immediatamente che  $f$  è olomorfa.

Conclusione: l'applicazione  $f \mapsto f \circ p$  definisce un isomorfismo di campi

$$M(X) \rightarrow E(\Lambda)$$

Vogliamo dimostrare che per ogni reticolo  $\Lambda$  esistono funzioni ellittiche non costanti in  $E(\Lambda)$ , o equivalentemente che esistono funzioni meromorfe non costanti su  $X = \mathbb{C}/\Lambda$ . Fissiamo dunque un reticolo qualsiasi  $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \omega_2)$ , con  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  linearmente indipendenti su  $\mathbf{R}$ .

**Lemma 6.5.1.** *La serie*

$$\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^r}$$

converge per ogni  $r \geq 3$ .

*Dimostr.* Per ogni  $n \geq 1$  denotiamo con  $P_n$  l'insieme degli  $\omega \in \Lambda$  della forma

$$\omega = h\omega_1 + k\omega_2$$

con  $n \in \{\pm h, \pm k\}$ ,  $|h|, |k| \leq n$ . Si verifica immediatamente che:  $P_n \cap P_m = \emptyset$  se  $n \neq m$ , e

$$\Lambda \setminus \{0\} = \bigcup_n P_n$$

Inoltre  $P_n$  consiste di  $8n$  elementi, ognuno dei quali ha modulo  $\geq cn$ , dove  $c = \min_{\omega \in P_1} |\omega|$ . Quindi:

$$\sum_{\omega \in P_n} \frac{1}{|\omega|^r} \leq \frac{8n}{c^r n^r}$$

Sommando rispetto ad  $n$  troviamo:

$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^r} = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{\omega \in P_n} \frac{1}{|\omega|^r} \right) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{8}{c^n n^{r-1}}$$

e questa serie converge per  $r \geq 3$ . La conclusione segue.  $\square$

**Corollario 6.5.2.** *La serie di funzioni meromorfe:*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

converge normalmente in ogni disco  $D_0(R)$ ,  $R > 0$ , e quindi ha per somma una funzione meromorfa in tutto il piano.

*Dimostr.*

Fissato  $R > 0$ , si ha  $|\omega| \geq R$  per tutti gli  $\omega \in \Lambda$  eccettuato al più un numero finito. Quindi per tutti i termini della serie, eccettuato al più un numero finito, si ha, se  $|z| < r$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \left| \frac{2\omega z - z^2}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| = \\ &= \frac{|z(2 - \frac{z}{\omega})|}{|\omega^3| |1 - \frac{z}{\omega}|^2} \leq \frac{R \frac{3}{2}}{|\omega^3| \frac{1}{4}} = \frac{6R}{|\omega^3|} \end{aligned}$$

Dal lemma 6.5.1 segue che la serie  $\wp(z)$  converge normalmente nel disco  $D_0(R)$ .  $\square$

La funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  somma della serie  $\wp(z)$  è detta *funzione  $\wp$  di Weierstrass* e denotata con lo stesso simbolo. Ovviamente  $\wp(z)$  dipende dalla scelta del reticolo  $\Lambda$ . Le sue principali proprietà sono date dalla seguente:

**Proposizione 6.5.3.** (i)  $\wp(z) \in E(\Lambda)$ , cioè  $\wp(z)$  è una funzione ellittica relativa a  $\Lambda$ .

(ii) I poli di  $\wp(z)$  sono esattamente i punti di  $\Lambda$ , ed essi sono poli di ordine 2 con residuo nullo.

(iii) La funzione meromorfa su  $X$  definita da  $\wp(z)$  ha grado 2.

(iv)  $\wp(-z) = \wp(z)$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , cioè  $\wp(z)$  è una funzione pari.

(v) La derivata  $\wp'(z)$  appartiene a  $E(\Lambda)$ , e soddisfa:

$$\wp'(-z) = -\wp'(z)$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , cioè è una funzione dispari; inoltre ha per poli tutti e soli i punti di  $\Lambda$ , che sono poli di ordine 3 con residuo nullo.

*Dimostr.* (iv) Si ha:

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left( \frac{1}{(-z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

e sostituendo  $\omega$  al posto di  $-\omega$  si riottiene la serie originaria.

(v) La convergenza normale implica che la serie  $\wp(z)$  può essere derivata termine a termine. Quindi:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

La conclusione segue immediatamente.

(ii) Ogni  $z \notin \Lambda$  è punto di regolarità di ogni termine della serie  $\wp(z)$ , e quindi è punto di regolarità della funzione  $\wp(z)$ . Inoltre dalla definizione segue che per ogni  $\omega \in \Lambda$  si ha, in un intorno di  $\omega$ :

$$\wp(z) = \frac{1}{(z - \omega)^2} + f(z)$$

dove  $f(z)$  è olomorfa. La conclusione segue.

(i) Dalla periodicità di  $\wp'(z)$  si deduce che esiste una costante  $C$  tale che

$$\wp(z + \omega_1) = \wp(z) + C$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Prendendo  $z = -\frac{\omega_1}{2}$  (che non è un polo di  $\wp$ ) si ottiene:

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + C$$

e poiché  $\wp$  è pari, si deduce che  $C = 0$ . Argomentando in modo simile per  $\omega_2$  si conclude.

(iii) Dalla (ii) segue che l'applicazione  $\wp : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  definita da  $\wp(z)$  ha un solo polo, e di ordine 2. Quindi, per la prop. 6.3.1(iii),  $\wp$  ha grado 2.  $\square$

Dalla discussione precedente discende il:

**Corollario 6.5.4.**  $E(\Lambda) = M(X)$  contiene funzioni non costanti per ogni reticolo  $\Lambda$ .

Si osservi che la funzione  $\wp(z)$  non è meromorfa all'infinito, cioè non si estende a  $\mathbb{P}^1$ . Quindi ha una singolarità essenziale in  $\infty$ , pur definendo una funzione meromorfa su  $X$ .

Per poter proseguire lo studio delle funzioni  $\wp(u)$  e  $\wp'(u)$  è necessario considerare i loro sviluppi in serie di Laurent. Allo scopo introduciamo le cosiddette *serie di Eisenstein*. Esse sono definite per ogni  $r \geq 3$  come:

$$G_r = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^r}$$

Ovviamente  $G_r = G_r(\Lambda)$  dipende dal reticolo  $\Lambda$ . Per il Lemma ?? la serie  $G_r$  converge assolutamente per ogni  $r \geq 3$ . Denotando con lo stesso simbolo la sua somma osserviamo che si ha

$$G_r = 0$$

per ogni  $r$  dispari perché

$$-1/\omega^r = 1/(-\omega)^r$$

e quindi i termini corrispondenti ad  $\omega$  e a  $-\omega$  si cancellano. Ciò posto si ha:

**Lemma 6.5.5.** *Gli sviluppi di Laurent di  $\wp(u)$  e di  $\wp'(u)$  nell'origine sono*

$$\begin{aligned}\wp(u) &= u^{-2} + \sum_{j \geq 2} (2j-1)G_{2j}u^{2j-2} \\ \wp'(u) &= -2u^{-3} + \sum_{j \geq 1} 2j(2j+1)G_{2j+2}u^{2j-1}\end{aligned}$$

*Dimostr.* Lo sviluppo di  $\wp'(u)$  segue da quello di  $\wp(u)$  derivandolo termine a termine. Per  $\wp(u)$  osserviamo che si ha:

$$(u - \omega)^{-2} = \omega^{-2} \left[ 1 + \sum_{j \geq 1} (j+1) \frac{u^j}{\omega^j} \right]$$

e quindi

$$\begin{aligned}\wp(u) - u^{-2} &= \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} [(u - \omega)^{-2} - \omega^{-2}] = \\ &= \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \sum_{j \geq 1} (j+1) \frac{u^j}{\omega^{j+2}} = \sum_{j \geq 1} (j+1) G_{j+2} u^j\end{aligned}$$

che è l'espressione cercata, tenuto conto del fatto che  $G_r = 0$  per  $r$  dispari.  $\square$

Dimostriamo ora il seguente importante risultato:

**Teorema 6.5.6.** *Le funzioni  $\wp(u)$  e  $\wp'(u)$  soddisfano l'identità*

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3 \quad (6.3)$$

dove abbiamo posto:

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6$$

*Dimostr.* Utilizzando il Lemma 6.5.5 si calcola che primo e secondo membro della (6.3), che hanno un polo di ordine 6 nell'origine, hanno uguali i termini in  $u^{-6}, \dots, u^{-1}$  ed il termine costante. Quindi la loro differenza è una funzione ellittica olomorfa che si annulla nell'origine, cioè è la funzione identicamente nulla.  $\square$

Il Teorema 6.5.6 afferma che al variare di  $u \in \mathbf{C}$  il punto  $(\wp(u), \wp'(u))$  varia sulla curva piana  $\mathcal{C}$  di equazione:

$$W^2 = 4Z^3 - g_2Z - g_3 \quad (6.4)$$

Osserviamo che il secondo membro della (6.4), cioè il polinomio

$$4Z^3 - g_2Z - g_3(3) \quad (6.5)$$

possiede 3 radici distinte, che sono

$$e_1 = \wp(\omega_1/2), \quad e_2 = \wp(\omega_2/2), \quad e_3 = \wp((\omega_1 + \omega_2)/2)$$

Sia infatti  $\omega \in \{\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2\}$ . Poiché  $-\omega \equiv \omega \pmod{\Lambda}$  si ha

$$\wp'(\omega) = \wp'(-\omega) = -\wp'(\omega)$$

cioè  $\wp'(\omega) = 0$ . Dalla (6.3) segue che  $e_1, e_2, e_3$  sono radici di (6.5). Poiché  $\wp'(\omega) = 0$  segue che l'equazione

$$\wp(u) - \wp(\omega) = 0$$

ha in  $\omega$  una radice doppia. Sia  $0 \neq z_0 \in \mathbf{C}$  tale che  $|z_0| < \epsilon$ , con  $\epsilon > 0$  sufficientemente piccolo, Nel parallelogramma fondamentale  $\Pi$  di primo vertice  $z_0$  è contenuto un solo polo di  $\wp$ , che ha ordine 2. Dalla Proposizione 6.5.3(ii) segue che in nessun altro punto  $\sigma$  di  $\Pi$  si ha  $\wp(\sigma) = \wp(\omega)$ . Quindi le tre radici  $e_1, e_2, e_3$  sono distinte.

Questo fatto significa che, come è immediato verificare, la curva  $\mathcal{C}$  è nonsingolare, anche all'infinito.

Se  $(z, w)$  è un punto di  $\mathcal{C}$  diverso da  $(e_i, 0)$ , cioè tale che  $w \neq 0$ , allora si ha  $\wp(u) = \wp(-u) = z$  per qualche  $u \not\equiv -u \pmod{\Lambda}$  perché  $w \neq 0$ . D'altra parte essendo  $\wp'(-u) = -\wp'(u)$  deduciamo che per ogni punto  $(z, w)$  della curva  $\mathcal{C}$  esiste un unico  $u \pmod{\Lambda}$  tale che

$$(z, w) = (\wp(u), \wp'(u))$$

## 6.6 Il teorema delle funzioni implicite

**Teorema 6.6.1** (delle funzioni implicite). *Sia  $f(z, w)$  un polinomio di grado  $n \geq 1$  rispetto a  $w$ . Sia  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tale che*

$$f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w}(a, b) \neq 0$$

Allora esiste una ed una sola serie di potenze

$$\bar{w} = b + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots \in \mathbb{C}[[t]]$$

tale che, posto  $\bar{z} = a + t$ , si abbia  $f(\bar{z}, \bar{w}) = 0$ . La serie  $\bar{w}$  ha raggio di convergenza positivo.

*Dimostr.* Introduciamo nuove indeterminate  $\xi, \eta$  e poniamo

$$z = a + \xi, \quad w = b + \eta, \quad g(\xi, \eta) = f(a + \xi, b + \eta) \quad (6.6)$$

Si ha:

$$g(\xi, \eta) = g_{00} + g_{10}\xi + g_{01}\eta + g_{20}\xi^2 + g_{11}\xi\eta + g_{02}\eta^2 + \cdots \quad (6.7)$$

dove abbiamo denotato con  $g_{jk} \in \mathbb{C}$  i coefficienti.

Poiché  $g(0, 0) = f(a, b) = 0$ , si ha  $g_{00} = 0$ . Inoltre

$$g_{01} = g_\eta(0, 0) = f_w(a, b) \neq 0.$$

Poiché le trasformazioni (6.6) sono invertibili, sarà sufficiente dimostrare il teorema per il polinomio  $g(\xi, \eta)$  nel punto  $(0, 0)$ .

Il teorema afferma l'esistenza di un'unica serie di potenze:

$$\bar{\eta}(\xi) = C_1\xi + C_2\xi^2 + \dots \quad (6.8)$$

a raggio di convergenza positivo, tale che  $g(\xi, \bar{\eta}(\xi)) = 0$ .

Come serie formale  $\bar{\eta}(\xi)$  esiste ed i suoi coefficienti sono univocamente determinati dalle condizioni seguenti, ottenute sostituendo la (6.8) nella (6.7) ed uguagliando a zero:

$$\begin{aligned} g_{01}C_1 + g_{10} &= 0 \\ g_{01}C_2 + g_{20} + g_{11}C_1 + g_{02}C_1^2 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Quindi ci resta solo da far vedere che la serie  $\bar{\eta}(\xi)$  ha raggio di convergenza positivo. Il procedimento che utilizzeremo è dovuto a Cauchy.

Non è restrittivo supporre che  $g_{01} = -1$  (basta moltiplicare  $g(\xi, \eta)$  per  $-g_{01}^{-1}$ ). Sotto quest'ipotesi la serie formale  $\bar{\eta}(\xi)$  soddisfa identicamente l'equazione:

$$\eta = h(\xi, \eta)$$

dove

$$h(\xi, \eta) = g_{10}\xi + g_{20}\xi^2 + g_{11}\xi\eta + g_{02}\eta^2 + \dots$$

Sia  $M$  un numero reale positivo maggiore dei moduli di tutti i coefficienti di  $h(\xi, \eta)$ , e consideriamo la funzione

$$H(\xi, \eta) = \frac{M}{(1-\xi)(1-\eta)} - M - M\eta$$

che è definita per  $\xi \neq 1 \neq \eta$ . Consideriamo l'equazione:

$$\eta = H(\xi, \eta) \quad (6.9)$$

Esplicitando la  $\eta$  la (6.9) dà:

$$\eta = \frac{1 - \left[1 - \frac{4M(M+1)\xi}{1-\xi}\right]^{\frac{1}{2}}}{2(1+M)} = \frac{1 - B_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{4M(M+1)\xi}{1-\xi}\right)}{2(1+M)}$$

dove  $B_{\frac{1}{2}}(Z)$  è la serie binomiale. Questa formula definisce  $\eta$  come funzione olomorfa di  $\xi$  in un intorno di  $\xi = 0$ . Quindi esiste una serie di potenze a raggio di convergenza positivo

$$\epsilon(\xi) = D_1\xi + D_2\xi^2 + \dots$$



tale che

$$\epsilon(\xi) = H(\xi, \epsilon(\xi))$$

identicamente. Per calcolare i coefficienti di  $\epsilon(\xi)$  riscriviamo  $H(\xi, \eta)$  come serie formale in  $\xi$  ed  $\eta$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta) &= M(1 + \xi + \xi^2 + \dots)(1 + \eta + \eta^2 + \dots) - M - M\eta = \\ &= M\xi + M\xi^2 + M\xi\eta + M\eta^2 + \dots \end{aligned}$$

Andando a sostituire  $\epsilon(\xi)$  al posto di  $\eta$  nell'equazione

$$\eta = M\xi + M\xi^2 + M\xi\eta + M\eta^2 + \dots$$

troviamo che i coefficienti di  $\epsilon(\xi)$  sono:

$$\begin{aligned} D_1 &= M \\ D_2 &= M(1 + D_1 + D_1^2) \\ D_3 &= M(1 + D_2 + D_1 + D_1^2 + 2D_1D_2 + D_1^3) \\ &\dots \end{aligned}$$

In particolare, tutti i coefficienti  $D_j$  sono reali positivi e  $|C_j| < D_j$  per ogni  $j$ . Da ciò segue che il raggio di convergenza di  $\bar{\eta}(\xi)$  è non minore di quello di  $\epsilon(\xi)$ , e ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**Definizione 6.6.2.** Una funzione olomorfa  $w(z)$  in un aperto  $A$  di  $\mathbb{C}$  si dice una funzione algebrica se esiste un polinomio  $f(z, w)$ , non costante rispetto a  $w$ , tale che si abbia  $f(z, w(z)) = 0$  identicamente in  $A$ .

Consideriamo un polinomio  $f(z, w)$  irriducibile in due indeterminate  $z, w$  a coefficienti complessi; possiamo scriverlo nella forma seguente:

$$f(z, w) = f_n(z)w^n + f_{n-1}(z)w^{n-1} + \dots + f_1(z)w + f_0(z)$$

dove  $f_n, \dots, f_0 \in \mathbb{C}[z]$ . Denotiamo con  $D(z)$  il discriminante di  $f(z, w)$  rispetto a  $w$ . Supporremo che  $f$  abbia grado effettivo  $n \geq 1$  in  $w$ , cioè che si abbia

- $f_n \neq 0$ ;
- Poiché  $f$  è irriducibile, si ha anche:
- $f_n, \dots, f_0$  non hanno fattori non costanti in comune;
- $D(z)$  non è identicamente nullo.

Un punto  $a \in \mathbb{C}$  si dice *ordinario* (o *regolare*) per  $f$  rispetto a  $w$  se  $f_n(a)D(a) \neq 0$ ; altrimenti  $a$  si dice un *punto eccezionale* per  $f$  rispetto a  $w$ .

Se  $a$  è un punto regolare per  $f$  (rispetto a  $w$ ) e  $b \in \mathbb{C}$  è tale che  $f(a, b) = 0$ , allora  $b$  è una radice semplice del polinomio  $f(a, w)$  (cioè  $f_w(a, b) \neq 0$ ) ed  $f(a, w)$  ha grado  $n$  in  $w$ .

Dal teorema (6.6.1) segue che per ogni punto  $a \in \mathbb{C}$  regolare per  $f$  l'equazione

$$f(z, w) = 0$$

definisce  $n$  funzioni olomorfe  $w_1(z), \dots, w_n(z)$  in un disco aperto  $D_\rho(a)$  di centro  $a$  e raggio  $\rho > 0$ . Se  $\rho$  è sufficientemente piccolo perché  $D_\rho(a)$  non contenga punti eccezionali per  $f$ , al variare di  $z$  in  $D_\rho(a)$  i valori  $w_1(z), \dots, w_n(z)$  soddisfano identicamente:

$$f(z, w_j(z)) \equiv 0;$$

e quindi sono le  $n$  radici distinte del polinomio  $f(z, w)$ . In altre parole,  $w_1(z), \dots, w_n(z)$  definiscono altrettante funzioni algebriche in  $D_\rho(a)$ .

In generale  $w_1(z), \dots, w_n(z)$  sono definite solo localmente nell'intorno di ogni  $a \in \mathbb{C}$  non eccezionale.

Ad esempio sia

$$f(z, w) = w^2 - z$$

Per ogni  $a \neq 0$  le funzioni algebriche  $w_1(z), w_2(z)$  sono definite nel disco  $D_\rho(a)$ , dove  $\rho = |a|$ , e coincidono con le due determinazioni  $\pm\sqrt{z}$ . Se  $z = Re^{i\theta} \in D_\rho(a)$ , allora

$$\{w_1(z), w_2(z)\} = \{\sqrt{Re^{i\frac{\theta}{2}}}, \sqrt{Re^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}}\}$$

Quindi le due determinazioni  $\pm\sqrt{z}$  sono distinte in ogni punto di  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e sono localmente funzioni olomorfe.

È però facile convincersi che  $\pm\sqrt{z}$  non sono funzioni olomorfe in tutto  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se lo fossero, le loro restrizioni ad una circonferenza, ad esempio ad  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , sarebbero continue. Ma d'altra parte, muovendo  $z$  in senso antiorario lungo  $S^1$ , a partire dal punto 1 per ritornare allo stesso punto, cioè incrementando  $\theta$  di  $2\pi$ , si passa dalla determinazione  $1 = e^0$  alla determinazione  $-1 = e^\pi$ , e quindi le due determinazioni vengono scambiate dopo un giro completo intorno ad una circonferenza. Ciò non avverrebbe se le due determinazioni  $\pm\sqrt{z}$  fossero due distinte funzioni olomorfe.

## 6.7 La superficie di Riemann di una curva algebrica piana

Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $\bar{w} : U \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa. In  $\mathbb{C}^2$  consideriamo il sottoinsieme:

$$\Gamma_{\bar{w}} := \{(z, \bar{w}(z)) : z \in U\}$$

con la topologia di sottospazio.  $\Gamma_{\bar{w}}$  si dice il *grafico di  $\bar{w}$* . L'applicazione  $\pi : \Gamma_{\bar{w}} \rightarrow U$  è un omeomorfismo con inversa  $\sigma(z) = (z, \bar{w}(z))$ . Quindi  $\Gamma_{\bar{w}}$ , dotata dell'atlante costituito della sola carta  $\pi$ , è una superficie di Riemann.  $\Gamma_{\bar{w}}$  si identifica con il sottospazio di  $U \times \mathbb{C}$ , con coordinate  $(z, w)$ , determinato dall'equazione  $w - \bar{w}(z) = 0$ . Carte locali di questo tipo possono essere utilizzate, come vedremo tra poco, nel caso in cui  $\bar{w}(z)$  sia una funzione algebrica definita implicitamente, in un opportuno intorno di  $a \in \mathbb{C}$ , da un polinomio irriducibile  $f(z, w)$  in corrispondenza di un punto  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tale che  $f(a, b) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(a, b) \neq 0$  (cfr. Teorema 6.6.1).

Consideriamo una curva piana complessa irriducibile  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$  di equazione:

$$f(z, w) = 0$$

dove  $f(z, w)$  è un polinomio irriducibile in due indeterminate  $z, w$  a coefficienti complessi. Denotiamo con  $p_z, p_w : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$  le due proiezioni  $p_z(z, w) = z$  e  $p_w(z, w) = w$ .

**Teorema 6.7.1.** *Sia  $A \subset \mathcal{C}$  l'aperto dei punti nonsingolari di  $\mathcal{C}$ . Allora  $A$  ha una struttura di superficie di Riemann connessa tale che le restrizioni di  $p_z$  e  $p_w$  ad  $A$  siano funzioni olomorfe. In particolare, una curva piana affine irriducibile e nonsingolare ha una struttura di superficie di Riemann connessa.*

*Dimostr.* La dimostrazione della connessione non è del tutto elementare e verrà omessa. Sia  $(a, b) \in A$ . Per ipotesi una delle derivate parziali di  $f$  è diversa da zero in  $(a, b)$ . Supponiamo ad esempio che si abbia  $\frac{\partial f}{\partial w}(a, b) \neq 0$ . Dal teorema delle funzioni implicite segue l'esistenza di una serie di potenze a raggio di convergenza  $\rho > 0$ :

$$\bar{w}_{(a,b)}(t) = b + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

tale che si abbia indenticamente  $f(t, \bar{w}_{(a,b)}(t - a)) = 0$  per  $t \in D_\rho(a)$ . Per la continuità di  $\frac{\partial f}{\partial w}$ , se  $\rho$  è sufficientemente piccolo il grafico della funzione  $t \mapsto \bar{w}_{(a,b)}(t - a)$ , che denoteremo  $\Gamma_{(a,b)}$ , coincide con un intorno aperto di  $(a, b)$  in  $A$ . Pertanto la proiezione  $p_z : \Gamma_{(a,b)} \rightarrow \mathbb{C}$  è una carta locale per  $A$ . Applicando questo procedimento ad ogni punto di  $A$  (eventualmente scambiando la  $z$  con la  $w$ ) possiamo costruire un atlante per  $A$ .

Verifichiamo che quest'atlante è olomorfo. Siano  $(a, b), (a', b') \in A$  due punti tali che  $\Gamma_{(a,b)} \cap \Gamma_{(a',b')} \neq \emptyset$ . Supponiamo dapprima che le due carte locali siano entrambe la proiezione  $p_z$ . Allora

$$p_z \circ p_z^{-1} : D_\rho(a) \cap D_{\rho'}(a') \rightarrow \mathbb{C}$$

è l'identità. Pertanto le due carte sono olomorficamente compatibili. Una verifica analoga può farsi nel caso in cui le carte locali siano entrambe uguali alla proiezione  $p_w$ . Resta da considerare il caso in cui le carte locali sono due proiezioni distinte. Supponiamo, per fissare le idee, che le due carte locali siano date da  $p_z : \Gamma_{(a,b)} \rightarrow \mathbb{C}$  e da  $p_w : \Gamma_{(a',b')} \rightarrow \mathbb{C}$ . In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} p_w \circ p_z^{-1} : p_z(\Gamma_{(a,b)} \cap \Gamma_{(a',b')}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \bar{w}_{(a,b)}(t - a) \end{aligned}$$

che è olomorfa. Quindi l'atlante è olomorfo. Dalla dimostrazione segue anche che le proiezioni  $p_z, p_w : A \rightarrow \mathbb{C}$  sono olomorfe.  $\square$

Il caso delle curve proiettive è analogo. Si ha infatti:

**Teorema 6.7.2.** *Sia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  una curva piana irriducibile proiettiva, di equazione  $F(X_0, X_1, X_2) = 0$  e sia  $A \subset \mathcal{C}$  l'aperto dei punti nonsingolari di  $\mathcal{C}$ . Allora  $A$  ha una struttura di superficie di Riemann connessa la cui restrizione a ciascuno degli aperti affini fondamentali  $U_i \cap \mathcal{C}$  coincide con la struttura definita nel teorema 6.7.1. In particolare, una curva piana proiettiva irriducibile e nonsingolare ha una struttura di superficie di Riemann compatta e connessa.*

*Dimostr.* Come detto poc'anzi, non dimostreremo la connessione. Sia  $\mathcal{C}_i = \mathcal{C} \cap U_i$ , la curva affine ottenuta deomogeneizzando  $F$  rispetto ad  $X_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , e sia  $A_i$  l'aperto dei punti singolari di  $\mathcal{C}_i$ . Si ha  $A_i = A \cap U_i$  perché un punto  $p \in U_i$  è singolare per  $\mathcal{C}_i$  se e solo se lo è per  $\mathcal{C}$ . Poiché  $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ , sarà sufficiente verificare che gli atlanti definiti su  $A_0, A_1, A_2$  dal teorema precedente sono olomorficamente compatibili. Supponiamo ad esempio che  $p = [x_0, x_1, x_2] \in A_0 \cap A_1$ , cioè che  $p$  sia un punto nonsingolare di  $\mathcal{C}$  e  $x_0 \neq 0 \neq x_1$ . Siano  $f_0(z, w) = F(1, z, w)$  e  $f_1(u, v) = F(u, 1, v)$ . Supponiamo ad esempio che  $\frac{\partial F}{\partial X_2}(p) \neq 0$ . Allora

$$\frac{\partial f_0}{\partial w}(p) \neq 0 \neq \frac{\partial f_1}{\partial v}(p)$$

e le due carte locali in  $A_0$  e in  $A_1$  sono le seguenti. Per il teorema delle funzioni implicite abbiamo una serie  $\bar{w}(t)$  a raggio di convergenza  $r > 0$  tale che  $f_0(t, \bar{w}(t - \frac{x_1}{x_0})) = 0$  e un omeomorfismo

$$\sigma_0 : D_r(x_1/x_0) \longrightarrow A_0, \quad t \mapsto (t, \bar{w}(t - \frac{x_1}{x_0}))$$

su un intorno aperto  $V_0$  di  $p$  in  $A_0$ . Similmente abbiamo una serie  $\bar{v}(\theta)$  a raggio di convergenza  $s > 0$  tale che  $f_1(\theta, \bar{v}(\theta - \frac{x_0}{x_1})) = 0$  e un omeomorfismo

$$\sigma_1 : D_s(x_0/x_1) \longrightarrow A_1, \quad \theta \mapsto (\theta, \bar{v}(\theta - \frac{x_0}{x_1}))$$

su un intorno aperto  $V_1$  di  $p$  in  $A_1$ . Salvo a restringere  $r$  e  $s$  possiamo supporre che  $V_0 = V_1$ . La carta locale su  $V_0$  è la proiezione  $p_0$  che manda

$$(t, \bar{w}(t - \frac{x_1}{x_0})) \mapsto t$$

La carta locale su  $V_1$  è la proiezione  $p_1$  che manda

$$(\theta, \bar{v}(\theta - \frac{x_0}{x_1})) \mapsto \theta$$

Ma le coordinate  $z$  in  $A_0$  e  $u$  in  $A_1$  sono legate dalla relazione  $zu = 1$ . Quindi  $p_1 \circ p_0^{-1}(t) = 1/t$ , che è olomorfa. Quindi le due carte locali sono olomorficamente compatibili. Gli altri casi si trattano in modo simile. La compattezza di  $\mathcal{C}$  segue dal fatto che è chiusa nel compatto  $\mathbb{P}^2$ .  $\square$

Se la curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  è singolare è possibile “risolvere” le singolarità e sostituire  $\mathcal{C}$  con una superficie di Riemann *compatta* contenente  $A$  come complementare di un numero finito di punti. Esistono diversi modi per realizzare questa costruzione. Noi utilizzeremo la Proposizione 6.7.1.

**Teorema 6.7.3.** *Sia  $\bar{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2$  una curva piana irriducibile proiettiva, e sia  $A(\bar{\mathcal{C}}) \subset \bar{\mathcal{C}}$  l'aperto dei suoi punti nonsingolari, dotato della struttura di superficie di Riemann descritta nel Teorema 6.7.2. Esiste una superficie di Riemann compatta  $X$  ed una inclusione  $\iota : A(\bar{\mathcal{C}}) \subset X$  la cui immagine ha complementare finito. La coppia  $(X, \iota)$  è unica a meno di isomorfismo.*

*Se  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$  è una curva piana irriducibile affine, allora la medesima costruzione applicata alla sua chiusura proiettiva  $\bar{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2$  fornisce una superficie di Riemann compatta e connessa  $X$  contenente l'aperto  $A(\bar{\mathcal{C}})$  dei punti nonsingolari di  $\mathcal{C}$  come complementare di un insieme finito e tale che*

$$A(\mathcal{C}) \subset A(\bar{\mathcal{C}}) \subset X$$

*Dimostr.* La seconda parte dell'enunciato segue immediatamente dalla prima. Per dimostrare la prima parte supponiamo che  $\bar{\mathcal{C}}$  abbia equazione  $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ , dove  $F$  è irriducibile. Possiamo supporlo di grado  $d > 0$  rispetto ad  $X_2$ . Non è restrittivo supporre inoltre che  $[0, 0, 1] \notin \bar{\mathcal{C}}$ , salvo effettuare un cambiamento di coordinate. Consideriamo la proiezione

$$\pi : \bar{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

definita da  $\pi([x_0, x_1, x_2]) = [x_0, x_1]$ . Quest'applicazione è continua suriettiva e propria. In particolare ha fibre finite. Sia  $S \subset \mathbb{P}^1$  l'immagine dei punti di  $\bar{\mathcal{C}}$  in cui si annulla  $\frac{\partial F}{\partial X_2}$  e poniamo  $X^\circ := \pi^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus S)$ . Consideriamo l'applicazione

$$\pi^\circ : X^\circ \longrightarrow \mathbb{P}^1 \setminus S$$

restrizione di  $\pi$  a  $X^\circ$ . Dimostriamo che  $\pi^\circ$  è un rivestimento olomorfo di grado  $d$ . Sia  $p = [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1 \setminus S$  e facciamo vedere che  $p$  possiede un intorno ben ricoperto. Supponiamo che  $p \neq [0, 1]$  (il caso  $p = [0, 1]$  si tratta allo stesso modo scambiando le coordinate  $X_0, X_1$ ). Utilizzando il teorema delle funzioni implicite applicato a  $f(z, w) = F(1, z, w)$  nel punto  $a = x_1/x_0$  si deduce l'esistenza di un disco aperto  $D_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus (S \cap \mathbb{C})$  e di  $d$  funzioni  $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_d$  olomorfe in  $D_r(a)$  tali che i  $d$  grafici soddisfino

$$\pi^{\circ-1}(D_r(a)) = \Gamma_{\bar{w}_1} \amalg \dots \amalg \Gamma_{\bar{w}_d}$$

e  $\pi^\circ$  mandi ognuno di essi omeomorficamente su  $D_r(a)$ . Pertanto  $D_r(a)$  è ben ricoperto e quindi  $\pi^\circ$  è un rivestimento di grado  $d$ . Applicando la Proposizione 6.2.6 si ottiene una superficie compatta  $X$ , un'inclusione  $\iota : X^\circ \subset X$  ottenuta aggiungendo un numero finito di punti, e che è unica a meno di isomorfismo. Si ha inoltre una estensione olomorfa  $\hat{\pi} : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$  di  $\pi^\circ$ . La situazione è descritta dal seguente diagramma di applicazioni:

$$\begin{array}{ccccc} A(\bar{\mathcal{C}}) & \longleftarrow & X^\circ & \xrightarrow{\iota} & X \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi^\circ & \swarrow \hat{\pi} & \\ & & \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

Sia  $p \in A(\bar{\mathcal{C}}) \setminus X^\circ$  e sia  $D \subset A(\bar{\mathcal{C}})$  un intorno sufficientemente piccolo di  $p$ . Allora la chiusura di  $\iota(D \setminus \{p\})$  contiene un unico punto  $q$  tale che  $\widehat{\pi}(q) = \pi(p)$ . Poniamo  $\iota(p) = q$ . In questo modo si definisce una estensione continua di  $\iota$  a  $A(\bar{\mathcal{C}})$ . Utilizzando la Proposizione 6.2.4 si deduce che questa estensione è olomorfa.  $\square$

La superficie di Riemann  $X$  costruita nel Teorema 6.7.3 si dice *superficie di Riemann della curva algebrica*  $\bar{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2$  (rispettivamente  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ ). Ovviamente, se  $\bar{\mathcal{C}}$  è nonsingolare si ha  $X = \bar{\mathcal{C}}$ .

## 6.8 Funzioni meromorfe sulle curve piane

Sia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$  una curva piana affine nonsingolare ed irriducibile di equazione  $f(z, w) = 0$ . Come sappiamo (Teorema 6.7.1) le funzioni coordinate  $z, w$  definiscono funzioni olomorfe su  $\mathcal{C}$ , e quindi anche ogni polinomio  $g(z, w)$ . Ne segue che il quoziente di due polinomi  $q(z, w) = g(z, w)/h(z, w)$  definisce una funzione meromorfa su  $\mathcal{C}$  purché  $h(z, w)$  non si annulli identicamente su  $\mathcal{C}$ . Certamente se  $f$  divide  $h$  allora  $h$  si annulla identicamente su  $\mathcal{C}$ . Anche il viceversa è vero e cioè sussiste il seguente

**Teorema 6.8.1.** *Sia  $f(z, w)$  un polinomio irriducibile. Se un polinomio  $h(z, w)$  si annulla identicamente sui punti della curva di equazione  $f(z, w) = 0$  allora  $f$  divide  $h$ .*

*Dimostr.* [6], Teorema 33.2, p. 401.  $\square$

Come immediata conseguenza abbiamo il seguente:

**Teorema 6.8.2.** *Sia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$  una curva piana affine nonsingolare ed irriducibile di equazione  $f(z, w) = 0$ . Ogni quoziente di due polinomi*

$$q(z, w) = \frac{g(z, w)}{h(z, w)}$$

*in cui  $h$  non è divisibile per  $f$  definisce una funzione meromorfa sulla superficie di Riemann  $\mathcal{C}$ .*

Passiamo al caso proiettivo. Sia dunque  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  una curva piana proiettiva nonsingolare ed irriducibile di equazione  $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ . Denotiamo con  $\mathcal{C}_i = \mathcal{C} \cap U_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Allora  $\mathcal{C}_i$  è un aperto denso di  $\mathcal{C}$  che coincide con la curva piana affine definita in coordinate  $X_j/X_i$  dall'equazione  $F(X_0/X_i, X_1/X_i, X_2/X_i) = 0$ . In virtù del Teorema 6.8.2 ogni quoziente

$$Q(X_0/X_i, X_1/X_i, X_2/X_i) = \frac{G(X_0/X_i, X_1/X_i, X_2/X_i)}{H(X_0/X_i, X_1/X_i, X_2/X_i)}$$

di polinomi tali che  $F(X_0/X_i, X_1/X_i, X_2/X_i)$  non divide  $H(X_0/X_i, X_1/X_i, X_2/X_i)$  definisce una funzione meromorfa su  $\mathcal{C}_i$ . Razionalizzando possiamo ottenere  $Q$  deomogeneizzando un quoziente di due polinomi *omogenei dello stesso grado*

$$Q(X_0, X_1, X_2) = \frac{G(X_0, X_1, X_2)}{H(X_0, X_1, X_2)}$$

in cui  $H$  non è divisibile per  $F$ . Un quoziente siffatto definisce una analoga funzione su tutti e tre gli aperti  $\mathcal{C}_i$ . Pertanto abbiamo il seguente:

**Teorema 6.8.3.** *Sia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  una curva piana proiettiva nonsingolare ed irriducibile di equazione  $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ . Ogni quoziente di due polinomi omogenei dello stesso grado*

$$Q(X_0, X_1, X_2) = \frac{G(X_0, X_1, X_2)}{H(X_0, X_1, X_2)}$$

*in cui  $H$  non è divisibile per  $F$  definisce una funzione meromorfa sulla superficie di Riemann  $\mathcal{C}$ .*

## 6.9 Divisori

Le superfici di Riemann vengono studiate principalmente in relazione alle funzioni meromorfe che vi sono definite. I due casi possibili,  $X$  compatta oppure non compatta, sono completamente diversi. Le funzioni meromorfe sulle superfici di Riemann non compatte sono difficili da descrivere e si studiano prevalentemente con metodi analitici. Un'indicazione di ciò può essere ottenuta osservando quanto segue.

Sia  $\iota : X \subset Y$  un'inclusione olomorfa di superfici di Riemann connesse. L'inclusione  $\iota$  induce per restrizione un'inclusione di campi  $\iota^* : M(Y) \subset M(X)$ . Questa inclusione è sempre stretta se  $Y$  è compatta e  $X$  è non compatta. Ad esempio ciò accade se  $\iota : \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ : ogni funzione razionale definisce una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$ , ma le funzioni meromorfe su  $\mathbb{C}$  sono molto più numerose. Infatti  $M(\mathbb{C})$  contiene le funzioni trascendenti elementari, le funzioni ellittiche e molte altre funzioni.

All'opposto, la teoria delle superfici di Riemann compatte è essenzialmente di natura algebrica, e tale è essenzialmente lo studio delle loro funzioni meromorfe. In questo paragrafo inizieremo a studiare questo caso, introducendo il concetto di *divisore*. Fissiamo dunque una superficie di Riemann *compatta e connessa*  $X$ .

**Definizione 6.9.1.** *Un divisore su  $X$  è una combinazione lineare formale*

$$D = \sum_{p \in X} a_p p$$

*dove  $a_p \in \mathbb{Z}$  per ogni  $p \in X$  e dove al più un numero finito di  $a_p$  sono diversi da 0. Gli  $a_p \neq 0$  si dicono i coefficienti di  $D$ , e il sottoinsieme*

$$\text{Supp}(D) := \{p : a_p \neq 0\}$$

di  $X$  si dice il supporto di  $D$ . Il divisore  $D$  si dice effettivo se  $a_p \geq 0$  per ogni  $p$ .

I divisori si possono sommare sommandone i coefficienti punto per punto. I divisori su  $X$  costituiscono un gruppo abeliano rispetto all'addizione. Lo denoteremo  $\text{Div}(X)$ . Scriveremo  $D > 0$  per significare che  $D$  è effettivo, e scriveremo  $D > E$  per significare che  $D - E > 0$ . Dato  $D = \sum_{p \in X} n_p p \in \text{Div}(X)$ , il suo grado è

$$\text{gr}(D) = \sum_{p \in X} n_p$$

I divisori di grado zero costituiscono un sottogruppo  $\text{Div}(X)_0$  di  $\text{Div}(X)$ , che coincide con il nucleo dell'omomorfismo

$$\text{gr} : \text{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Se  $\varphi \in M(X)$  è una funzione meromorfa e non nulla, ad essa si associa il divisore

$$(\varphi) = \sum_{p \in X} o_p(\varphi) p$$

che viene detto *principale*. Scriveremo:

$$(\varphi) = (\varphi)_0 - (\varphi)_\infty$$

come differenza dei divisori (effettivi) dei suoi zeri e dei suoi poli. Si ottiene in questo modo un omomorfismo

$$M(X)^* := M(X) \setminus \{0\} \longrightarrow \text{Div}(X) \quad (6.10)$$

il cui nucleo consiste delle funzioni ovunque olomorfe, cioè costanti, e non nulle. Quindi ogni funzione meromorfa è determinata dal suo divisore a meno di una costante moltiplicativa non nulla. I divisori principali hanno grado zero, per la Proposizione 6.4.2. Quindi l'immagine dell'omomorfismo (6.10) è un sottogruppo  $\mathcal{P}(X) \subset \text{Div}(X)_0$ . Il gruppo quoziente

$$J(X) := \text{Div}(X)_0 / \mathcal{P}(X)$$

è detto *varietà jacobiana* di  $X$ . La varietà jacobiana è sempre diversa dal gruppo banale, fatta eccezione per il caso  $X = \mathbb{P}^1$  (cfr. Esempio 6.9.3).

**Definizione 6.9.2.** Due divisori  $D, E \in \text{Div}(X)$  si dicono linearmente equivalenti, in simboli  $D \sim E$ , se  $D - E$  è principale.

Se  $D \sim E$  allora  $\text{gr}(D) = \text{gr}(E)$ . L'equivalenza lineare è una relazione di equivalenza, come si verifica facilmente.

Possiamo interpretare l'equivalenza lineare in modo più geometrico nel modo seguente. Sia  $f : X \longrightarrow Y$  un rivestimento ramificato di superfici di Riemann compatte e connesse. Allora ogni  $y \in Y$  determina un divisore su  $X$ :

$$f^*(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} e_f(x) x$$



che ha grado uguale al grado di  $f$ . Questa definizione si estende per linearità ad ogni divisore  $D = \sum n_y y \in \text{Div}(Y)$  ponendo

$$f^*(D) = \sum n_y f^*(y)$$

Si ottiene in tal modo un omomorfismo di gruppi abeliani:

$$f^* : \text{Div}(Y) \longrightarrow \text{Div}(X)$$

che moltiplica il grado per  $\text{gr}(f)$ , cioè è tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}(Y) & \xrightarrow{f^*} & \text{Div}(X) \\ \downarrow \text{gr} & & \downarrow \text{gr} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{gr}(f)} & \mathbb{Z} \end{array}$$

e che possiede le ovvie proprietà funtoriali seguenti:

- $1_X^* = 1_{\text{Div}(X)} : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Div}(X)$
- Se  $f : X \longrightarrow Y$  e  $g : Y \longrightarrow Z$  sono rivestimenti ramificati di superfici di Riemann compatte e connesse allora

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : \text{Div}(Z) \longrightarrow \text{Div}(X)$$

Si osservi che se  $\varphi \in M(X)$  è non costante, allora  $(\varphi) = \varphi^*(0 - \infty)$ . Quindi,  $D \sim E$ , con  $D$  ed  $E$  effettivi, se e solo se esiste un'applicazione olomorfa  $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$  tale che  $\varphi^*(0) = D$  e  $E = \varphi^*(\infty)$ . In tal caso

$$\text{gr}(D) = \text{gr}(E) = \text{gr}(\varphi)$$

Pertanto lo studio dell'equivalenza lineare in  $\text{Div}(X)$  è equivalente allo studio di  $M(X)$  perché gli elementi di  $M(X)^*$  corrispondono a quelli di  $\mathcal{P}$ , i quali a loro volta sono tutti della forma  $D - E$ , con  $D \sim E$  effettivi.

Prima di introdurre i più importanti metodi che si utilizzano nello studio delle funzioni meromorfe vogliamo illustrare i concetti fin qui introdotti con alcuni esempi.

**Esempio 6.9.3.** Supponiamo  $X = \mathbb{P}^1$ . Come visto nell'esempio 6.4.3(i),  $M(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(z)$  e ogni divisore di grado zero è il divisore di una funzione razionale. Quindi

$$\mathcal{P}(\mathbb{P}^1) = \text{Div}(\mathbb{P}^1)_0$$

In altre parole, due divisori sono linearmente equivalenti se e solo se hanno lo stesso grado.

## 6.10 Funzioni meromorfe con poli limitati

**Definizione 6.10.1.** Sia  $D \in \text{Div}(X)$ . Lo spazio delle funzioni meromorfe con poli limitati da  $D$  è

$$L(D) = \{\varphi \in M(X)^* : (\varphi) + D > 0\} \cup \{0\}$$

È immediato verificare che  $L(D)$  è un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale. Per definizione una funzione meromorfa  $\varphi$  appartiene a  $L(D)$  precisamente se

$$(\varphi)_0 - (\varphi)_\infty > -D$$

Poiché  $(\varphi)_0$  e  $(\varphi)_\infty$  hanno supporti disgiunti, questa condizione equivale a

$$(\varphi)_\infty < D \tag{6.11}$$

cioè alla condizione che il divisore dei poli di  $\varphi$  sia limitato da  $D$ .

Dalla definizione segue inoltre che, al variare di  $\varphi \in L(D)$ , il divisore  $(\varphi) + D$  varia tra tutti i divisori effettivi che sono linearmente equivalenti a  $D$ .

**Lemma 6.10.2.** Siano  $D_1$  e  $D_2$  due divisori linearmente equivalenti, e sia  $\varphi \in M(X)^*$  tale che  $D_1 - D_2 = (\varphi)$ . Allora l'applicazione  $M(X) \rightarrow M(X)$  definita dalla moltiplicazione per  $\varphi$  induce un isomorfismo  $L(D_1) \cong L(D_2)$ .

*Dimostr.* Se  $h \in L(D_1)$  allora

$$(h\varphi) + D_2 = (h) + (\varphi) + D_2 = (h) + D_1 - D_2 + D_2 = (h) + D_1 > 0$$

e quindi  $h\varphi \in L(D_2)$ . L'altra inclusione si dimostra nello stesso modo.  $\square$

Un altro risultato elementare è il seguente:

**Lemma 6.10.3.** (i) Se  $\text{gr}(D) < 0$  allora  $L(D) = (0)$ .

(ii)  $L(0) = \mathbb{C}$ .

*Dimostr.* (i) Per ogni  $\varphi \in M(X)^*$  si ha  $\text{gr}((\varphi)_\infty) \geq 0$  e quindi la (6.11) non può essere soddisfatta se  $\text{gr}(D) < 0$ .

(ii)  $\varphi \in L(0)$  significa che  $(\varphi) > 0$ , cioè che  $\varphi$  è olomorfa. Ma le uniche funzioni meromorfe su una superficie di Riemann compatta sono le costanti.  $\square$

Dunque lo studio degli spazi  $L(D)$  deve essere ristretto al caso  $\text{gr}(D) \geq 0$ .

**Esempio 6.10.4.** Sia  $X = \mathbb{P}^1$ , e sia  $D = k\infty + \sum n_i p_i$ , dove  $\sum n_i = n - k$ , un divisore effettivo di grado  $n \geq 0$ . Le funzioni  $\varphi \in L(D)$  sono le funzioni razionali della forma:

$$\varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

dove  $Q(z) = \prod (z - p_i)^{n_i}$  e  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  è tale che  $\text{gr}(P(z)) \leq n$ . Pertanto

$$\dim(L(D)) = n + 1$$

**Proposizione 6.10.5.** *Sia  $D \in \text{Div}(X)$  e  $p \in X$ . Allora si hanno solo le due seguenti possibilità:*

- $L(D - p) = L(D)$ ,
- $L(D - p)$  ha codimensione uno in  $L(D)$ .

*Dimostr.* Sia  $n = n_p$  il coefficiente di  $p$  per il divisore  $D$ . Scegliamo una coordinata locale  $z$  in un intorno di  $p$  tale che  $z(p) = 0$ . Ogni  $\varphi \in L(D)$  si esprime rispetto a  $z$  in un intorno di  $p$  nella forma

$$\varphi(z) = c(\varphi)z^{-n} + \text{termini di ordine superiore}$$

per qualche  $c(\varphi) \in \mathbb{C}$ . D'altra parte il coefficiente di  $p$  per il divisore  $D - p$  è  $n - 1$  e quindi se  $\psi \in L(D - p)$  allora in un intorno di  $p$  si ha:

$$\psi = az^{-n+1} + \text{termini di ordine superiore}$$

Definiamo un'applicazione:

$$e : L(D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

ponendo  $e(\varphi) = c(\varphi)$ . Quest'applicazione è evidentemente lineare e il suo nucleo è  $L(D - p)$ . Se  $c(\varphi) = 0$  per ogni  $\varphi \in L(D)$  allora siamo nel primo caso dell'enunciato. Altrimenti  $e$  è suriettiva e quindi il suo nucleo ha codimensione uno in  $L(D)$ , e siamo nel secondo caso.  $\square$

**Corollario 6.10.6.** *Per ogni divisore  $D \in \text{Div}(X)$  lo spazio  $L(D)$  ha dimensione finita non superiore a  $\text{gr}(D) + 1$ .*

*Dimostr.* Sia  $\text{gr}(D) = d$ . Se  $d < 0$  allora  $(D) = 0$  e non c'è niente da dimostrare. Supponiamo  $d \geq 0$  e sia  $p \in X$ . Per la Proposizione 6.10.5 abbiamo una successione di inclusioni di spazi vettoriali:

$$(0) = L(D - (d + 1)p) \subset L(D - dp) \subset \cdots \subset L(D - p) \subset L(D)$$

in cui ogni spazio ha codimensione al più uno nel successivo. La conclusione segue immediatamente.  $\square$

Denoteremo:

$$\ell(D) := \dim(L(D))$$

Un problema fondamentale nella teoria è calcolare esattamente  $\ell(D)$ . Osserviamo che la stima superiore per  $\ell(D)$  fornita dal corollario è esatta nel caso di  $X = \mathbb{P}^1$  (Esempio 6.10.4).

## 6.11 Il teorema di Bezout per le curve piane nonsingolari

Sia  $X$  la superficie di Riemann della curva piana proiettiva irriducibile  $\mathcal{C}$  di equazione  $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ . Sia  $G(X_0, X_1, X_2)$  un polinomio omogeneo che non si annulla identicamente su  $\mathcal{C}$ . Sia  $d = \text{gr}(G)$ . È possibile associare ad un polinomio siffatto un divisore  $\text{div}(G) = \sum_{p \in \mathcal{C}} \text{molt}_p(G)p$  nel modo seguente. Se  $p \in \mathcal{C}$  è un punto in cui  $G(p) \neq 0$  allora poniamo  $\text{molt}_p(G) = 0$ . Se invece  $G(p) = 0$  allora consideriamo un polinomio omogeneo  $H$  di grado  $d$  tale che  $H(p) \neq 0$  e poniamo

$$\text{molt}_p(G) = o_p \left( \frac{G}{H} \right)$$

Questa definizione è ben posta. Infatti, se  $M$  è un altro polinomio di grado  $d$  tale che  $M(p) \neq 0$  allora  $H/M$  definisce una funzione meromorfa su  $\mathcal{C}$  tale che  $o_p(H/M) = 0$ . Pertanto:

$$o_p \left( \frac{G}{M} \right) = o_p \left( \frac{GH}{HM} \right) = o_p \left( \frac{G}{H} \right) + o_p \left( \frac{H}{M} \right) = o_p \left( \frac{G}{H} \right)$$

Pertanto  $\text{div}(G)$  è ben definito. Si chiama *divisore di intersezione di  $\mathcal{C}$  con  $G$* . Se  $G'(X_0, X_1, X_2)$  è un altro polinomio di grado  $d$  che non si annulla identicamente su  $\mathcal{C}$  allora il quoziente  $G/G'$  definisce una funzione meromorfa non nulla su  $\mathcal{C}$  e quindi:

$$\text{div}(G) = \text{div} \left( \frac{G'G}{G'} \right) = \text{div}(G') + (G/G')$$

Pertanto  $\text{div}(G) \sim \text{div}(G')$ .

**Teorema 6.11.1.** *Se  $G$  ha grado uno, il divisore  $\text{div}(G)$  ha grado uguale al grado della curva  $\mathcal{C}$ .*

*Dimostr.* Sia  $n$  il grado di  $\mathcal{C}$ . Salvo operare con una proiettività, che trasforma la curva in un'altra la cui superficie di Riemann è isomorfa a  $\mathcal{C}$ , possiamo supporre che  $G = X_1$ , e che  $\mathcal{C}$  non contenga il punto  $[0, 0, 1]$ . Pertanto il punto  $[0, 0, 1]$  di intersezione delle rette  $X_1 = 0$  e  $X_0 = 0$  non appartiene a  $\mathcal{C}$  e quindi la funzione razionale  $\gamma = X_2/X_0$  può essere utilizzata per calcolare  $\text{div}(G)$  in tutti i punti, e quindi  $\text{div}(G)$  ha grado uguale al grado di  $\gamma$ . Consideriamo un punto  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Allora  $\gamma^{-1}(\lambda)$  consiste dei punti di  $\mathcal{C}$  che soddisfano l'equazione  $F(1, \lambda, X_2) = 0$ . Se  $\lambda$  è generale il primo membro ha grado  $n$  e ha  $n$  radici distinte. Quindi  $\gamma$  ha grado  $n$ .  $\square$

**Corollario 6.11.2.** *Se  $\mathcal{C}$  ha grado  $n$  e  $G$  è un polinomio omogeneo di grado  $d$  che non si annulla identicamente su  $\mathcal{C}$ , si ha:*

$$\text{gr}(\text{div}(G)) = dn$$

*Dimostr.* Se  $H$  è un polinomio omogeneo di grado uno, allora il divisore di  $G$  e quello di  $H^d$  hanno lo stesso grado perché la loro differenza è il divisore della funzione razionale  $G/H^d$ . La conclusione segue quindi dal Teorema 6.11.1.  $\square$

**Definizione 6.11.3.** Sia  $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$  una curva di equazione  $G(X_0, X_1, X_2)$ , e sia  $p \in \mathbb{P}^2$ . Definiamo la molteplicità di intersezione  $I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  di  $\mathcal{C}$  e  $G$  in  $p$  come  $\infty$  se  $G$  si annulla identicamente su  $\mathcal{C}$ , e altrimenti come

$$I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = n_p$$

dove  $n_p$  è il coefficiente di  $p$  per il divisore  $\text{div}(G)$ .

Con questa terminologia il Corollario 6.11.2 può enunciarsi nel modo seguente:

**Teorema 6.11.4** (Teorema di Bezout). Se  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  è una curva piana proiettiva nonsingolare di grado  $d$ , e  $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2$  è una curva di grado  $n$  che non contiene  $\mathcal{C}$  come componente, si ha:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} I_p(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = nd$$

## 6.12 La formula di Plücker

Una facile applicazione del teorema di Bezout permette di ottenere una formula per il genere di una curva nonsingolare di grado  $d$ , in funzione di  $d$ . Essa è basata sul seguente

**Lemma 6.12.1.** Sia  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  una curva piana proiettiva nonsingolare di grado  $d$  tale che  $[0, 0, 1] \notin \mathcal{C}$ , e sia  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  l'applicazione definita da:

$$\pi([x_0, x_1, x_2]) = [x_0, x_1]$$

Allora

$$e_\pi(p) - 1 = \text{molt}_p(\partial F / \partial X_2)$$

per ogni  $p \in \mathcal{C}$ .

*Dimostr.* È sufficiente dimostrare l'asserto nel caso in cui  $p = [1, a, b]$ . Nell'aperto affine  $U_0$  con coordinate  $x, y$  l'applicazione  $\pi$  coincide con la proiezione sull'asse  $x$  della curva  $F(1, x, y) = f(x, y) = 0$ . Si ha

$$\text{molt}_p(\partial F / \partial X_2) = 0$$

se e solo se il punto  $p$  non appartiene alla curva  $\partial F / \partial X_2 = 0$ , se e solo se  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$  e ciò è equivalente, per il teorema delle funzioni implicite, al fatto che  $\pi$  è un isomorfismo analitico locale in  $p$ , cioè  $e_\pi(p) = 1$ .

Quindi è sufficiente considerare il caso in cui  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ . Poiché  $\mathcal{C}$  è nonsingolare, dev'essere  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$ . Per il teorema delle funzioni implicite

applicato alla proiezione  $(x, y) \mapsto y$  esiste una funzione analitica  $\bar{x}(t)$  in un disco  $D$  di centro  $0 \in \mathbb{C}$  tale che si abbia identicamente

$$f(\bar{x}(t), a + t) = 0$$

in  $D$ . Derivando rispetto a  $t$  otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} \bar{x}(t)'$$

Osserviamo ora che l'applicazione  $\varphi : D \rightarrow \mathcal{C}$  definita da  $t \mapsto (\bar{x}(t), a + t)$  è l'inversa di una carta locale, e quindi  $\text{ord}_0(\bar{x}(t)') = e_\pi(p) - 1$ . Poiché  $-\frac{\partial f}{\partial x}$  non si annulla in  $p$ , dall'identità precedente la conclusione segue.  $\square$

Applicando la formula di Hurwitz, e osservando che il grado della proiezione  $z$  è uguale a  $d$ , si ha:

$$2g(\mathcal{C}) - 2 = -2d + \sum_{Q \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} (e_z(Q) - 1) = -2d + d(d - 1)$$

da cui si deduce:

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d - 1)(d - 2)}{2}$$

che è la *formula di Plücker* per il genere di una curva piana proiettiva irriducibile e nonsingolare.

La tabella seguente fornisce  $g = g(\mathcal{C})$  per i primi valori di  $d$ :

$d$	$g$
1	0
2	0
3	1
4	3
5	6
6	10
7	15

Come si vede, non tutti i possibili valori di  $g$  vengono realizzati da curve piane nonsingolari. Per ottenerli è necessario includere anche curve singolari (irriducibili), il cui genere dipende, oltre che dal grado, anche dalla struttura dei loro punti singolari.

### 6.13 Forme differenziali olomorfe e meromorfe

**Definizione 6.13.1.** Una forma differenziale olomorfa (risp. meromorfa) su un aperto  $V$  di  $\mathbb{C}$  è un'espressione della forma

$$\omega = f(z)dz$$

dove  $f$  è una funzione olomorfa (risp. meromorfa) in  $V$  e  $dz$  è un simbolo.

Sia  $X$  una superficie di Riemann e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  una carta locale definita su un aperto  $U \subset X$ . Se  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione, scriveremo  $f(z)$  per indicare la composizione  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ , come funzione della coordinata  $z$  in  $\varphi(U) \subset \mathbb{C}$ . Chiameremo  $z$  una *coordinata locale* in  $U$ . Utilizzeremo  $(U, z)$  come notazione alternativa per una carta locale  $(U, \varphi)$  per la quale  $z$  sia la coordinata locale.

Una *forma differenziale locale olomorfa (risp. meromorfa)* in  $(U, \varphi)$  è una forma differenziale olomorfa (risp. meromorfa)  $f(z)dz$  nell'aperto  $V = \varphi(U) \subset \mathbb{C}$ .

Siano  $(U, \varphi)$  e  $(W, \psi)$  due carte locali per  $X$ , con coordinate locali  $z$  e  $w$  rispettivamente. Se  $f(z)dz$  è una forma differenziale locale in  $(U, \varphi)$  e  $g(w)dw$  è una forma differenziale locale in  $(W, \psi)$  (olomorfe o meromorfe), le diremo *compatibili* se in  $U \cap W$  si ha

$$f(z(w))z'(w) = g(w)$$

dove  $z(w)$  è l'isomorfismo analitico  $\psi(U \cap W) \rightarrow \varphi(U \cap W)$  definito dalle due carte locali.

**Definizione 6.13.2.** Una *forma differenziale olomorfa (risp. meromorfa)*  $\omega$  su una superficie di Riemann  $X$  consiste del dato di una forma differenziale locale olomorfa (risp. meromorfa)  $f(z)dz$  per ogni carta locale  $(U, z)$  in  $X$ , soddisfacente la condizione che per due qualsiasi carte locali le corrispondenti forme differenziali siano compatibili.

È facile verificare che per assegnare una forma differenziale è sufficiente assegnare forme differenziali compatibili sulle carte locali di un atlante olomorfo per  $X$ .

Sia  $\omega$  una forma differenziale meromorfa su  $X$ , e  $p \in X$ . Definiamo *l'ordine di  $\omega$  in  $p$*  come:

$$\text{ord}_p(\omega) := o_p(f(z))$$

dove  $f(z)dz$  è un rappresentante di  $\omega$  in una carta locale definita su un intorno di  $p$ . Per verificare che la definizione è ben posta osserviamo che, se  $\omega$  è anche definita su altro intorno di  $p$  da  $g(w)dw$ , allora abbiamo:

$$o_p(g(w)) = o_p[f(z(w))z'(w)] = o_p(f(z))$$

perché  $o_p(z'(w)) = 0$ , essendo  $z(w)$  un isomorfismo analitico.

**Definizione 6.13.3.** Sia  $\omega$  una forma differenziale meromorfa sulla superficie di Riemann compatta e connessa  $X$ . Il *divisore di  $\omega$*  è:

$$\text{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\omega)p$$

Segue immediatamente dalla definizione che, se  $\omega$  è olomorfa allora  $\text{div}(\omega)$  è effettivo.

**Proposizione 6.13.4.** *Se  $\omega, \tilde{\omega}$  sono due forme differenziali meromorfe su  $X$  compatta e connessa, i divisori  $\text{div}(\omega)$  e  $\text{div}(\tilde{\omega})$  sono linearmente equivalenti. Viceversa, se  $D \sim \text{div}(\omega)$  allora esiste una forma differenziale meromorfa  $\tilde{\omega}$  tale che  $\text{div}(\tilde{\omega}) = D$ .*

*Dimostr.* Se  $\omega, \tilde{\omega}$  sono rappresentate in  $(U, z)$  da  $f(z)dz$  e  $\tilde{f}(z)dz$ , e in  $(W, w)$  da  $g(w)dw$  e  $\tilde{g}(w)dw$  rispettivamente, allora si ha

$$f(z(w))z'(w) = g(w), \quad \tilde{f}(z(w))z'(w) = \tilde{g}(w)$$

Pertanto in  $U \cap W$  si ha

$$\frac{\tilde{g}(w)}{g(w)} = \frac{\tilde{f}(z(w))}{f(z(w))}$$

e quindi i quozienti  $\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)}$  sono restrizioni di una funzione meromorfa  $F \in M(X)$  il cui divisore è

$$(F) = \text{div}(\tilde{\omega}) - \text{div}(\omega)$$

e ciò significa che  $\text{div}(\omega)$  e  $\text{div}(\tilde{\omega})$  sono linearmente equivalenti.

Viceversa, dato  $D \sim \text{div}(\omega)$  esiste una funzione  $F \in M(X)$  tale che  $D = (F) + \text{div}(\omega)$ . Definiamo le forme differenziali locali

$$\tilde{f}(z)dz = Ff(z)dz$$

È immediato verificare che queste forme differenziali sono a due a due compatibili e quindi definiscono una  $\tilde{\omega}$  meromorfa il cui divisore è evidentemente uguale a  $D$ .  $\square$

Un divisore della forma  $D = \text{div}(\omega)$  si dirà un *divisore canonico*. Denotiamo con  $\text{KDiv}(X)$  l'insieme dei divisori canonici. Dalla Proposizione 6.13.4 segue che  $\text{KDiv}(X)$  coincide con una classe laterale in  $\text{Div}(X)$  rispetto al sottogruppo  $\mathcal{P}(X)$ . In particolare tutti i divisori canonici hanno lo stesso grado, che tra poco calcoleremo.

**Esempio 6.13.5.** Supponiamo che  $X = \mathbb{P}^1$ . Si verifica subito che, rispetto all'atlante usuale  $\{(U_0, z), (U_1, w)\}$ , con  $z(w) = w^{-1}$  e  $w(z) = z^{-1}$  le forme differenziali locali

$$dz, w^{-2}dw$$

sono compatibili. Quindi definiscono una forma differenziale meromorfa  $\eta$  su  $\mathbb{P}^1$  tale che  $\text{div}(\eta) = -2\infty$ . In particolare  $\text{gr}(\eta) = -2$ .

Sia  $F : X \rightarrow Y$  un rivestimento ramificato tra superfici di Riemann compatte e connesse, e sia  $\omega$  una forma differenziale meromorfa su  $Y$ . L'immagine inversa di  $\omega$  rispetto a  $F$  è la forma differenziale  $F^*\omega$  su  $X$  che si definisce nel modo seguente.

Supponiamo assegnata  $\omega$  mediante forme differenziali locali  $f(v)dv$  assegnate sulle carte locali  $(V, v)$  di un atlante per  $Y$ . Consideriamo un atlante in  $X$  in



cui ciascuna carta locale  $(U, u)$  soddisfi  $F(U) \subset V$  per qualche  $(V, v)$ . In ogni carta siffatta definiamo una forma differenziale locale ponendo

$$g(u)du = f(v(u))\frac{dv}{du}du$$

dove  $v(u)$  è la funzione ologomorfa che coincide con la composizione  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ , essendo  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  le carte locali. Se  $(\tilde{U}, \tilde{u})$  è un'altra carta locale in  $X$  e  $(\tilde{V}, \tilde{v})$  è una carta locale in  $Y$  tale che  $F(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$  allora si ha:

$$\begin{aligned} g(u(\tilde{u}))\frac{du}{d\tilde{u}}d\tilde{u} &= f(v(u(\tilde{u})))\frac{dv}{du}\frac{du}{d\tilde{u}}d\tilde{u} \\ &= f(v(\tilde{v}(\tilde{u})))\frac{dv}{d\tilde{v}}\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{u}}d\tilde{u} \\ &= \tilde{f}(\tilde{v}(\tilde{u}))\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{u}}d\tilde{u} \\ &= \tilde{g}(\tilde{u})d\tilde{u} \end{aligned}$$

il che dimostra che le forme differenziali locali  $g(u)du$  su  $X$  sono compatibili e quindi definiscono una forma differenziale meromorfa che per definizione chiamiamo  $F^*\omega$ .

**Lemma 6.13.6.** *Sia  $F : X \rightarrow Y$  un rivestimento ramificato tra superfici di Riemann compatte e connesse, e sia  $\omega$  una forma differenziale meromorfa su  $Y$ . Sia  $p \in X$ . Allora:*

$$\text{ord}_p(F^*\omega) = [1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega)]e_F(p) - 1$$

*Dimostr.* Possiamo scegliere una carta locale  $(U, u)$  in un intorno di  $p$  ed una carta locale  $(V, v)$  in un intorno di  $F(p)$  in modo che  $F$  sia data da  $v = u^n$ , dove  $n = e_F(p)$ . In  $V$  la forma differenziale  $\omega$  sarà della forma

$$(cv^k + \text{termini di ordine superiore})dv$$

dove  $k = \text{ord}_{F(p)}(\omega)$ , e quindi in  $U$  si ha:

$$F^*\omega = (cu^{nk} + \text{termini di ordine superiore})nu^{n-1}du$$

Quindi

$$\text{ord}_p(F^*\omega) = nk + n - 1 = (1 + k)n - 1$$

come voluto. □

**Teorema 6.13.7.** *Sia  $\omega$  una forma differenziale meromorfa e non nulla su una superficie di Riemann compatta e connessa  $X$  di genere  $g$ . Allora  $\text{gr}(\omega) = 2g - 2$ .*

*Dimostr.* Sia  $F : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  una funzione meromorfa e non costante, e sia  $\eta$  la forma differenziale su  $\mathbb{P}^1$  descritta nell'esempio 6.13.5. Poiché tutti i divisori in  $\text{KDiv}(X)$  hanno lo stesso grado, sarà sufficiente calcolare il grado di  $F^*\eta$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{gr}(F^*\eta) &= \sum_{p \in X} \text{ord}_p(F^*\eta) \\ &= \sum_{p \in X} [(1 + \text{ord}_{F(p)}(\eta))e_F(p) - 1] \\ &= \sum_{q \neq \infty} \sum_{p \in F^{-1}(q)} (e_F(p) - 1) + \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} (-e_F(p) - 1) \\ &= \sum_{p \in X} (e_F(p) - 1) - \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} 2e_F(p) \\ \text{per la (6.1)} &= (2g - 2 + 2\text{gr}(F)) - 2\text{gr}(F) \\ &= 2g - 2 \end{aligned}$$

□

Le forme differenziali olomorfe su  $X$  costituiscono uno spazio vettoriale che si denota con  $\Omega(X)$ .

**Proposizione 6.13.8.** *Sia  $\omega$  una forma differenziale meromorfa e sia  $K = \text{div}(\omega)$ . Per ogni  $\varphi \in L(K)$  la forma differenziale  $f\omega$  è olomorfa e l'applicazione*

$$L(K) \longrightarrow \Omega(X), \quad \varphi \longmapsto \varphi\omega \quad (6.12)$$

*è un isomorfismo di  $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali. In particolare  $\Omega(X)$  ha dimensione finita.*

*Dimostr.* Per definizione si ha  $(\varphi) + K > 0$  per ogni  $\varphi \in L(K)$ . Quindi

$$\text{div}(\varphi\omega) = (\varphi) + K > 0$$

cioè  $\varphi\omega \in \Omega(X)$ . L'applicazione (6.12) è evidentemente lineare. La sua inversa è l'applicazione

$$\Omega(X) \longrightarrow L(K), \quad \tilde{\omega} \longmapsto \varphi$$

dove  $\varphi \in M(X)^*$  è l'unica funzione meromorfa tale che  $\text{div}(\tilde{\omega}) - \text{div}(\omega) = (\varphi)$ . L'ultima affermazione è conseguenza del Corollario 6.10.6. □

La dimensione di  $\Omega(X)$  è un numero intero intrinsecamente associato a  $X$ . Infatti si ha

$$\dim(\Omega(X)) = g$$

(si veda il §6.18)

Una forma differenziale meromorfa  $\omega$  si può integrare lungo un qualsiasi arco differenziabile non contenente poli di  $\omega$ . Questa operazione possiede proprietà analoghe a quelle dell'integrazione di forme differenziali in  $\mathbb{C}$ . Non svilupperemo questo argomento perché non ne faremo uso nel seguito (salvo che nella dimostrazione della Proposizione ??).

## 6.14 Serie lineari

Anche in questo paragrafo denoteremo con  $X$  una superficie di Riemann compatta e connessa.

**Proposizione 6.14.1.** *Sia  $D \in \text{Div}(X)$ . Associando a  $\varphi \in L(D) \setminus \{0\}$  il divisore  $(\varphi) + D$ , si ottiene una biezione tra lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}(L(D))$  e l'insieme di tutti i divisori effettivi che sono linearmente equivalenti a  $D$ .*

*Dimostr.* I divisori della forma  $(\varphi) + D$ , al variare di  $\varphi \in L(D) \setminus \{0\}$ , sono effettivi e linearmente equivalenti a  $D$ . Viceversa, se  $E \sim D$  è effettivo, allora esiste  $\varphi \in M(X)^*$  tale che  $E - D = (\varphi)$ , cioè  $\varphi \in L(D)$  e  $E = (\varphi) + D$ . Due funzioni  $\varphi, \psi \in L(D) \setminus \{0\}$  definiscono lo stesso divisore se e solo se esiste  $c \in \mathbb{C}^*$  tale che  $\psi = c\varphi$ .  $\square$

**Definizione 6.14.2.** *L'insieme dei divisori  $(\varphi) + D$  al variare di  $\varphi \in L(D) \setminus \{0\}$  si dice la serie lineare completa associata a  $D$ , e si denota con il simbolo  $|D|$ . Se  $V \subset L(D)$  è un sottospazio vettoriale l'insieme dei divisori effettivi della forma  $D + (\varphi)$ , al variare di  $\varphi \in V \setminus \{0\}$ , si identifica al sottospazio proiettivo  $\mathbb{P}(V) \subset |D|$  e si dice la serie lineare associata a  $V$ , e denotata con  $|V|$ . Se  $n = \text{gr}(D)$  e  $r + 1 = \dim(V)$ , diremo che  $|V|$  ha grado  $n$  e dimensione  $r$ , ovvero che è una  $g_n^r$ . La serie lineare  $|K|$ , dove  $K$  è un divisore canonico qualsiasi, si dice la serie canonica.*

**Esempio 6.14.3.** Se  $X = \mathbb{P}^1$  allora segue dall'Esempio 6.10.4 che tutti i divisori di grado  $n$  sono linearmente equivalenti tra loro e costituiscono una  $g_n^n$  completa. Quindi ogni  $g_n^r$  (completa o no) soddisfa  $r \leq n$ .

**Esempio 6.14.4.** Sia  $X$  una curva piana nonsingolare di grado  $d$ . Siano  $G_1, G_2$  due polinomi omogenei di grado  $m$  che non si annullano identicamente su  $X$ . Allora  $\text{div}(G_1) \sim \text{div}(G_2)$  perché:

$$\text{div}(G_2) - \text{div}(G_1) = \left( \frac{G_2}{G_1} \right)$$

Se ne deduce che un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione  $r + 1$  di polinomi di grado  $m$  che non si annullano identicamente su  $X$  definisce una  $g_{dm}^r$ .

Sia  $D \in \text{Div}(X)$ ,  $V \subset L(D)$  un sottospazio vettoriale e  $|V|$  la corrispondente serie lineare. Un punto  $p \in X$  si dice un *punto base* di  $|V|$  se per ogni  $E \in |V|$  si ha  $E - p > 0$ , cioè se  $p$  acc e nel supporto di ogni divisore di  $|V|$ .

Il *divisore base*, o *parte fissa* di  $|V|$  è

$$F = \min\{E \in |V|\}$$

**Lemma 6.14.5.** (i)  $p$  è un punto base di  $|V|$  se e solo se  $V \subset L(D - p)$ .

(ii) Se  $F$  è il divisore base di  $|D|$  allora  $L(D) = L(D - F)$ .

(iii) La serie lineare  $|D - F|$  è priva di punti base.

*Dimostr.* (i) Sia  $n_p$  il coefficiente di  $D$  in  $p$ . Allora  $p$  è punto base di  $|V|$  se e solo se

$$n_p + o_p(f) \geq 1$$

per ogni  $f \in V \setminus \{0\}$ . Ciò significa che

$$(n_p - 1) + o_p(f) \geq 0$$

e cioè che  $f \in L(D - p)$ .

(ii) Poiché  $F$  è effettivo, si ha  $D - F < D$  e quindi  $L(D - F) \subset L(D)$ . Viceversa, se  $f \in L(D)$  abbiamo  $(f) + D = D' + F$  per qualche  $D'$  effettivo. Quindi:

$$(f) + (D - F) = D' > 0$$

e quindi  $f \in L(D - F)$ .

(iii) è lasciata al lettore. □

## 6.15 Applicazioni olomorfe di una superficie di Riemann in uno spazio proiettivo

Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta e connessa.

**Definizione 6.15.1.** Sia  $r \geq 1$ . Un'applicazione  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{P}^r$  si dice olomorfa in  $p \in X$  se esistono funzioni olomorfe  $g_0, \dots, g_r$  definite in un intorno  $U$  di  $p$  tali che  $\Phi(q) = [g_0(q), \dots, g_r(q)]$  per ogni  $q \in U$ . L'applicazione  $\Phi$  si dice olomorfa se lo è in ogni punto  $p \in X$ .

Un modo sistematico per costruire applicazioni olomorfe è il seguente. Siano  $f_0, \dots, f_r \in M(X)$  non tutte nulle. È possibile definire un'applicazione

$$\Phi_f : U \rightarrow \mathbb{P}^r$$

nell'aperto  $U \subset X$  costituito da tutti i punti  $p \in X$  tali che

- $p$  non è un polo di  $f_i$  per ogni  $i$ .
- in  $p$  non si annullano tutte le  $f_i$

Si osservi che  $X \setminus U$  è un insieme finito, ed è caratterizzato dalla condizione seguente. Per ogni  $p \in X$  poniamo

$$n_p := \min\{o_p(f_i) : i = 0, \dots, r\}$$

Allora  $p \in X \setminus U \iff n_p \neq 0$ . Consideriamo  $p \in X \setminus U$  e sia  $z$  una coordinata locale in  $p$  tale che  $z(p) = 0$ . In un intorno  $V$  di  $p$  tale che  $z(q) \neq 0$  per  $p \neq q$  e tale che  $V \setminus \{p\} \subset U$  si ha:

$$\Phi_f(q) = [f_0(q)z^{-n_p}(q), \dots, f_r(q)z^{-n_p}(q)]$$

D'altra parte, poiché le funzioni  $f_i z^{-n_p}$  hanno una singolarità eliminabile in  $p$ , si estendono a funzioni olomorfe in tutto  $V$  e quindi  $\Phi_f$  si estende olomorficamente a  $p$ . Questo procedimento può essere applicato a tutti i punti di  $X \setminus U$  e quindi deduciamo che  $\Phi_f$  si estende ad una applicazione olomorfa:

$$\Phi_f : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

Il fatto notevole è che *ogni* applicazione olomorfa  $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$  si può ottenere in questo modo. Più precisamente:

**Proposizione 6.15.2.** *Sia  $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$  un'applicazione olomorfa. Allora esistono  $f_0, \dots, f_r \in M(X)$  tali che  $\Phi = \Phi_f$ . Se  $g_0, \dots, g_r \in M(X)$  sono altre funzioni tali che si abbia  $\Phi = \Phi_g$  allora esiste  $\lambda \in M(X)^*$  tale che  $g_i = \lambda f_i$ ,  $i = 0, \dots, r$ .*

*Dimostr. Esistenza.* Salvo riordinare le coordinate  $[X_0, \dots, X_r]$  possiamo supporre che  $\Phi(X)$  non sia contenuta nell'iperpiano  $X_0 = 0$ . Definiamo  $f_i = X_i/X_0 \cdot \Phi$ . Verifichiamo che le  $f_0 = 1, f_1, \dots, f_r$  sono funzioni meromorfe. Sia  $p \in X$  e per  $q \in U$  intorno di  $p$  sia

$$\Phi(q) = [g_0(q), \dots, g_r(q)]$$

con  $g_0, \dots, g_r$  olomorfe in  $U$ . Allora in  $U$  si ha  $f_i = g_i/g_0$  che è meromorfa, per  $i = 0, \dots, r$ . Pertanto le  $f_i$  sono funzioni meromorfe in  $X$  e si ha  $\Phi = \Phi_f$ , dove  $f = (1 = f_0, f_1, \dots, f_r)$ .

*Unicità.* Supponiamo che  $\Phi_f = \Phi_h$  per qualche  $(r + 1)$ -upla di funzioni meromorfe  $(h_0, \dots, h_r)$ . Non è restrittivo supporre che nessuna delle  $h_i$  sia identicamente nulla perché in tal caso lo sarebbe anche la corrispondente  $f_i$  e potremmo rimuoverle entrambe e ragionare sulle rimanenti. Sia  $U \subset X$  l'aperto complementare di un insieme finito in cui tutte le  $f_i$  e le  $h_i$  non hanno né zeri né poli. Se  $p \in U$  la funzione  $\Phi_f = \Phi_h$  è data in  $p$  da:

$$[f_0(p), \dots, f_r(p)] = [h_0(p), \dots, h_r(p)]$$

e quindi esiste un  $\lambda(p) \in \mathbb{C}^*$  tale che  $h_i(p) = \lambda(p)f_i(p)$ ,  $i = 0, \dots, r$ . Allora  $\lambda$  è olomorfa funzione di  $p \in U$  perché  $\lambda = h_i/f_i$ . Inoltre  $\lambda$  è meromorfa in tutto  $X$  perché quoziente di funzioni meromorfe in tutto  $X$ .  $\square$

## 6.16 La serie lineare di un'applicazione olomorfa

Sia  $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$  un'applicazione olomorfa che, per i risultati precedenti, possiamo rappresentare come

$$\Phi(p) = [f_0(p), \dots, f_r(p)], \quad p \in X$$

per opportune funzioni meromorfe  $f_0, \dots, f_r \in M(X)$ . Sia

$$D = -\min\{(f_i) : i = 0, \dots, r\}$$

Quindi  $-D = \sum_p n_p p$  dove  $n_p = \min\{o_p(f_i) : i = 0, \dots, r\}$ . Pertanto

$$(f_i) + D > 0, \quad i = 0, \dots, r$$

e quindi  $f_0, \dots, f_r \in L(D)$ . Poiché  $L(D)$  è uno spazio vettoriale, le funzioni meromorfe  $f_0, \dots, f_r \in L(D)$  generano un sottospazio  $V_\Phi \subset L(D)$ . Allora  $|V_\Phi|$  si dice *la serie lineare dell'applicazione  $\Phi$* .

Si osservi che la serie lineare  $|V_\Phi|$  ha dimensione  $\leq r$  e la sua dimensione può essere anche strettamente minore di  $r$ : ciò accade precisamente quando  $f_0, \dots, f_r$  non sono linearmente indipendenti. In tal caso, se  $\sum_i a_i f_i = 0$  è una relazione di dipendenza lineare, allora  $\Phi(X) \subset H$ , dove  $H \subset \mathbb{P}^r$  è l'iperpiano di equazione  $\sum_i a_i X_i = 0$ . Se  $|V_\Phi|$  ha dimensione  $r$ , cioè  $\Phi(X)$  non è contenuta in un iperpiano, allora diremo che  $\Phi$  è *non degenera*.

**Proposizione 6.16.1.** *La serie lineare di un'applicazione ologomorfa è priva di punti base.*

*Dimostr.* Sia  $D = -\min\{(f_i) : i = 0, \dots, r\}$  e sia  $p \in X$ . Se  $n_p$  è il coefficiente di  $D$  in  $p$  allora per qualche  $0 \leq j \leq r$  si ha  $o_p(f_j) = n_p$ . Pertanto il divisore  $E = (f_j) + D \in |V_\Phi|$  e ha coefficiente 0 in  $p$ , quindi  $p \notin \text{Supp}(E)$ .  $\square$

Se è assegnata una serie lineare  $|V|$  priva di punti base, dove  $V \subseteq L(D)$  per qualche  $D \in \text{Div}(X)$ , e  $\{f_0, \dots, f_r\}$  è una base di  $V$  allora possiamo considerare l'applicazione ologomorfa

$$\Phi_f : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$$

associata a  $f_0, \dots, f_r$ . È immediata conseguenza di tutto ciò che abbiamo detto in questo paragrafo e nel precedente che  $|V_{\Phi_f}| = |V|$  e  $\Phi$  è non degenera.

C'è un altro modo di descrivere la serie lineare  $|V_\Phi|$  di un'applicazione ologomorfa  $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$ . Sia  $H \subset \mathbb{P}^r$  un iperpiano di equazione  $L = 0$ , dove  $L = \sum_i a_i X_i$ , tale che  $\Phi(X) \not\subseteq H$ . Vogliamo associare ad  $H$  un divisore effettivo  $\Phi^*H = \sum_p n_p p$  che è definito nel modo seguente. Per ogni punto  $p \in X$  consideriamo un polinomio lineare omogeneo  $M = \sum_i b_i X_i$  tale che  $M(\Phi(p)) \neq 0$ . Allora

$$h = \frac{H}{M} \cdot \Phi$$

è una funzione ologomorfa in un intorno di  $p$  perché

$$h(q) = \frac{\sum_i a_i g_i(q)}{\sum_i b_i g_i(q)}$$

dove  $g_0, \dots, g_r$  sono funzioni ologomorfe tali che  $\Phi(q) = [g_0(q), \dots, g_r(q)]$  per  $q$  in un intorno di  $p$ . Definiamo  $n_p = o_p(h)$ . Si verifica nel modo usuale che  $n_p$  è ben definito e quindi che lo è  $\Phi^*H$ . Chiamiamo  $\Phi^*H$  un *divisore iperpiano*.

**Lemma 6.16.2.** *Supponiamo che  $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^r$  sia individuata dalle funzioni meromorfe  $f_0, \dots, f_r \in M(X)$ , e sia  $D = -\min\{(f_0), \dots, (f_r)\}$ . Allora, se  $H \subset \mathbb{P}^r$  è un iperpiano di equazione  $\sum_i a_i X_i = 0$  non contenente  $\Phi(X)$ , si ha:*

$$\Phi^*(H) = \left( \sum_i a_i f_i \right) + D$$

*Dimostr.* Sia  $D = \sum_p d_p p$ . Dato  $p \in X$  sia  $j \in \{0, \dots, s\}$  tale che  $o_p(f_j) = \min\{o_p(f_0), \dots, o_p(f_r)\}$ . Allora la coordinata  $X_j$  non si annulla in  $\Phi(p)$  e possiamo scegliere  $M = X_j$ . Quindi la funzione  $h = \frac{H}{M} \cdot \Phi = \frac{\sum_i a_i f_i}{f_j}$  ha ordine in  $p$ :

$$o_p(h) = o_p\left(\sum_i a_i f_i\right) - o_p(f_j) = o_p\left(\sum_i a_i f_i\right) + d_p$$

□

**Corollario 6.16.3.** *La serie lineare  $|V_\Phi|$  dell'applicazione ologomorfa  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{P}^r$  consiste di tutti i divisori  $\Phi^*H$  al variare di  $H$  tra tutti gli iperpiani di  $\mathbb{P}^r$  che non contengono  $\Phi(X)$ .*

*Dimostr.* Immediata. □

**Definizione 6.16.4.** *Il grado  $\text{gr}(\Phi)$  di un'applicazione ologomorfa  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{P}^r$  è il grado della serie lineare  $|V_\Phi|$ .*

Si osservi che, se  $X$  è una curva piana nonsingolare e  $\Phi$  è l'inclusione  $X \subset \mathbb{P}^2$ , allora  $\text{gr}(X) = \text{gr}(\Phi)$ . Quindi questa definizione generalizza quella di grado di una curva piana.

Se  $G(X_0, \dots, X_r)$  è un polinomio omogeneo di grado  $n$  che non si annulla identicamente su  $\Phi(X)$ , allora possiamo definire il divisore di  $G$  su  $X$  come il divisore  $\Phi^*(G)$  localmente definito in un punto  $p \in X$  dalla funzione ologomorfa in un intorno di  $p$ :

$$h = \frac{G(f_0, \dots, f_r)}{f_j^n}$$

dove  $f_j(p) \neq 0$ . Dalla definizione segue immediatamente il seguente risultato, che generalizza il teorema di Bezout.

**Teorema 6.16.5.** *Se  $G(X_0, \dots, X_r)$  è un polinomio omogeneo di grado  $n$  che non si annulla identicamente su  $\Phi(X)$ , allora*

$$\text{gr}(\Phi^*G) = n \text{gr}(\Phi)$$

## 6.17 Proprietà delle applicazioni ologomorfe

Sia  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{P}^r$  un'applicazione ologomorfa, definita da  $f_0, \dots, f_r \in M(X)$ . Sia  $D = -\min\{(f_0), \dots, (f_r)\}$ . Supporremo  $\Phi$  non degenerare, e tale che la serie lineare sia la serie completa  $|D|$ , cosicché  $L(D) = \langle f_0, \dots, f_r \rangle$  e  $\ell(D) = r + 1$ .

**Proposizione 6.17.1.** *L'applicazione  $\Phi$  è iniettiva se e solo se  $\ell(D - p - q) = \ell(D) - 2$  per ogni  $p, q \in X$  distinti.*

*Dimostr.* Siano  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$ . Si ha

$$L(D - p - q) \subseteq L(D - p) \subsetneq L(D)$$

dove la seconda inclusione è stretta perché  $|D|$  non ha punti base (Prop. 6.16.1) e conseguentemente:

$$\ell(D) - 2 \leq \ell(D - p - q) \leq \ell(D) - 1$$

e la seconda possibilità si verifica se e solo se  $L(D - p - q) = L(D - p)$ . Se sostituiamo  $f_0, \dots, f_r$  con un'altra base di  $L(D)$  l'applicazione  $\Phi$  viene sostituita con la sua composizione con una proiettività, che è biunivoca. Quindi l'iniettività di  $\Phi$  non viene influenzata da una diversa scelta delle  $f_i$ , così come ne è indipendente la condizione  $\ell(D - p - q) = \ell(D) - 2$ . Possiamo quindi supporre che  $\langle f_1, \dots, f_r \rangle = L(D - p)$ , e che  $f_0 \in L(D) \setminus L(D - p)$ . Sia  $D = \sum_{x \in X} n_x x$ . Si noti che  $D - p = (n_p - 1)p + \sum_{x \neq p} n_x x$ . Allora, per la scelta di  $f_0, \dots, f_r$ , si ha:

$$o_p(f_0) + n_p = 0, \quad o_p(f_i) + n_p \geq 1, \quad i \geq 1$$

Se  $z$  è una coordinata locale in  $p$ , si ha:

$$\Phi(x) = [(f_0 z^{-n_p})(x), \dots, (f_r z^{-n_p})(x)]$$

quando  $x$  varia in un intorno di  $p$ , e quindi

$$o_p(f_0 z^{-n_p}) = 0, \quad o_p(f_i z^{-n_p}) \geq 1, \quad i \geq 1$$

Pertanto  $\Phi(p) = [1, 0, \dots, 0]$ . Supponiamo che  $\Phi(q) = \Phi(p) = [1, 0, \dots, 0]$ . Allora, ragionando come prima, deduciamo che

$$o_q(f_0) = n_q, \quad o_q(f_i) \geq n_q + 1$$

e quindi che  $f_1, \dots, f_r \in L(D - p - q)$ , cioè  $L(D - p - q) = L(D - p)$ . Lo stesso ragionamento porta a concludere che se  $L(D - p - q) = L(D - p)$  allora  $\Phi(q) = \Phi(p)$ .  $\square$

Un raffinamento della dimostrazione precedente consente di dimostrare che  $\Phi(X)$  è una superficie di Riemann in  $\mathbb{P}^r$  isomorfa a  $X$  se e solo se oltre alla condizione della Proposizione 6.17.1 è soddisfatta la seguente:

$$\ell(D - 2p) = \ell(D) - 2 \quad \text{per ogni } p \in X$$

Un esempio importante di applicazione oloedica è quella definita dalla (unica) serie lineare di grado  $n \geq 2$  su  $X = \mathbb{P}^1$ . È una  $g_n^n |D|$  priva di punti base che soddisfa le ipotesi della Proposizione 6.17.1. Una volta scelta una base di  $L(D)$  si ottiene

$$\Phi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

la cui immagine  $\Phi(\mathbb{P}^1)$  è una curva che si dice una *curva razionale e normale*.



## 6.18 Il teorema di Riemann-Roch

Abbiamo già accennato in precedenza all'importanza del problema di calcolare le dimensioni  $\ell(D)$ , quando  $D \in \text{Div}(X)$ . Una risposta a questo problema viene fornita dal seguente fondamentale risultato:

**Teorema 6.18.1** (Riemann-Roch). *Per ogni divisore  $D \in \text{Div}(X)$  si ha:*

$$\ell(D) = \text{gr}(D) + 1 - g + \ell(K - D) \quad (6.13)$$

dove  $g = g(X)$  è il genere di  $X$  e  $K$  è un divisore canonico qualsiasi.

Il numero  $\ell(K - D)$  viene chiamato *indice di specialità* di  $D$  e denotato con  $i(D)$ . Il divisore  $D$  si dice *speciale* (risp. *non speciale*) se  $i(D) > 0$  (risp.  $i(D) = 0$ ). I divisori canonici sono speciali e hanno indice di specialità  $i(K) = 1$ .

La dimostrazione del Teorema 6.18.1 va al di là degli scopi di questo corso. Ci limiteremo quindi ad illustrarne alcune conseguenze e applicazioni.

La prima conseguenza è che, essendo  $\text{gr}(K) = 2g - 2$  e  $\ell(0) = 1$ , si ha

$$\dim(\Omega(X)) = \ell(K) = g \quad (6.14)$$

In particolare la serie canonica  $|K|$  ha dimensione  $g - 1$  e grado  $2g - 2$ , cioè è una  $g_{2g-2}^{g-1}$ .

**Lemma 6.18.2.** *Le seguenti condizioni sono equivalenti per una superficie di Riemann  $X$  di genere  $g$ :*

- (i)  $X \cong \mathbb{P}^1$ .
- (ii)  $g = 0$ .
- (iii)  $\ell(p) \geq 2$  per qualche punto  $p \in X$ .

*Dimostr.* (i)  $\implies$  (ii) è ovvia. (ii)  $\implies$  (iii) segue immediatamente dalla (6.13) per un qualsiasi punto  $p \in X$ .

(iii)  $\implies$  (i). Se  $\ell(p) \geq 2$  allora  $\mathbb{C} = L(0) \subsetneq L(p)$  e se ne deduce che esiste una funzione meromorfa *non costante*  $f \in L(p)$ . Dalla condizione  $(f) + p > 0$  segue che  $f$  ha un polo di ordine 1 in  $p$  e nessun'altro polo. Pertanto il rivestimento ramificato  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  definito da  $f$  ha grado uno, e quindi è un isomorfismo.  $\square$

**Proposizione 6.18.3.** *La serie canonica è vuota se  $g = 0$ , è la serie banale se  $g = 1$  ed è priva di punti base se  $g \geq 2$ .*

*Dimostr.* Se  $g = 0$  allora  $2g - 2 = -2 < 0$  e quindi non esistono divisori canonici effettivi. Se  $g = 1$  allora la (6.13) dà  $\ell(K) = 1$ . Quindi la serie canonica è una  $g_0^0$  non vuota e consiste dell'unico divisore effettivo di grado zero, il divisore 0.

Supponiamo  $g \geq 2$ . Sia  $p \in X$ . Per la (6.13) si ha:

$$\ell(K - p) = (2g - 3) + 1 - g + \ell(p) = g - 2 + \ell(p)$$

D'altra parte, poiché  $g \geq 2$ , per il Lemma 6.18.2 si ha  $\ell(p) = 1$  e quindi  $\ell(K - p) = g - 1 = \ell(K) - 1$ . Quindi  $p$  non è un punto base di  $|K|$ .  $\square$

Dalla Proposizione 6.18.3 segue che, una volta scelta una base  $f_1, \dots, f_g$  di  $L(K)$  possiamo definire un'applicazione olomorfa non degenere

$$\Phi_K : X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

che è detta *applicazione canonica*. L'immagine  $\Phi_K(X) \subset \mathbb{P}^{g-1}$  è detta una *curva canonica*.

Nel caso  $g = 2$  la serie canonica è una  $g_2^1$ , e quindi l'applicazione canonica è un rivestimento ramificato  $\Phi_K : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$  di grado 2.

**Definizione 6.18.4.** *Una superficie di Riemann  $X$  compatta e connessa di genere  $g \geq 2$  si dice iperellittica se possiede una  $g_2^1$ .*

Le curve iperellittiche si differenziano rispetto alle proprietà della loro serie canonica. Infatti si ha il seguente risultato:

**Proposizione 6.18.5.** *Le seguenti condizioni sono equivalenti per una superficie di Riemann di genere  $g \geq 2$ :*

- (i) *L'applicazione canonica è un'immersione.*
- (ii)  *$X$  non è iperellittica.*

*Dimostr.* (ii)  $\implies$  (i) - Supponiamo  $X$  non iperellittica. Per la Proposizione 6.17.1 la condizione (i) è equivalente a  $\ell(K - p - q) = \ell(K) - 2 = g - 2$  per ogni  $p, q \in X$ . Poiché  $|K|$  non ha punti base si ha

$$g - 2 \leq \ell(K - p - q) \leq g - 1$$

per ogni scelta di  $p, q$ . Se fosse  $\ell(K - p - q) = g - 1$  per qualche  $p, q$  allora, per la (6.13) si avrebbe:

$$g - 1 = \ell(K - p - q) = g - 3 + \ell(p + q)$$

e quindi  $\ell(p + q) = 2$ . Da ciò segue l'esistenza di  $f \in L(p + q)$  non costante, la quale definisce rivestimento ramificato  $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ . Poiché  $(f) + p + q > 0$ , il divisore dei poli di  $f$  ha grado 2, e quindi  $f$  ha grado 2, e quindi  $|p + q|$  è una  $g_2^1$ . Questa è una contraddizione, e quindi la (i) è verificata.

(i)  $\implies$  (ii) - Viceversa supponiamo verificata la (i). se  $X$  fosse iperellittica, esisterebbero  $p, q \in X$  tali che  $\ell(p + q) = 2$ . Applicando la (6.13) come nella prima parte si trova che  $\ell(K - p - q) = g - 1$  e ciò contraddice la (i).  $\square$

## 6.19 Superfici di Riemann di genere 1

Tutto quanto abbiamo visto in precedenza si particolarizza in modo molto semplice al caso  $g = 1$ . Nel §6.5 abbiamo studiato i tori complessi, che sono superfici di Riemann compatte e connesse di genere 1, e le loro funzioni meromorfe. In particolare abbiamo visto che su ogni toro complesso  $X = \mathbb{C}/\Lambda$  la funzione  $\wp$  di Weierstrass definisce un rivestimento ramificato  $\bar{\wp} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  di grado 2, in particolare  $\bar{\wp}$  possiede un polo di ordine 2 in un punto che denoteremo con  $x_\infty$ . Inoltre la derivata  $\wp'$  definisce una funzione meromorfa  $\bar{\wp}' \in M(X)$  che possiede un polo di ordine 3 in  $x_\infty$ . Quindi, riassumendo:

$$L(3x_\infty) = \langle 1, \bar{\wp}, \bar{\wp}' \rangle$$

e quindi in particolare  $\ell(3x_\infty) = 3$ . Tutto questo è stato dimostrato direttamente (Proposizione 6.5.3), ma discende anche dal teorema di Riemann-Roch, perché i divisori di grado positivo su  $X$  sono tutti non speciali. Infine, nel Teorema 6.5.6 si è dimostrato che  $\bar{\wp}, \bar{\wp}'$  soddisfano l'identità cubica (6.3). Utilizzando il linguaggio delle serie lineari e delle applicazioni olomorfe possiamo riformulare il Teorema 6.5.6 nel modo seguente:

**Teorema 6.19.1.** *Sia  $X = \mathbb{C}/\Lambda$  un toro complesso, e siano  $\bar{\wp}, \bar{\wp}' \in M(X)$  le funzioni meromorfe indotte dalle funzioni  $\wp, \wp' \in E(\Lambda)$ . Sia  $x_\infty$  il polo di  $\bar{\wp}$  e  $\bar{\wp}'$ . Allora  $|3x_\infty|$  è una  $g_3^2$  priva di punti base e la base  $\{1, \bar{\wp}, \bar{\wp}'\}$  di  $L(3x_\infty)$  definisce un'applicazione olomorfa  $\Phi_{x_\infty} : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  che induce un isomorfismo tra  $X$  ed una cubica piana nonsingolare.*

*Dimostr.* Dal teorema 6.18.1 discende che  $\ell(3x_\infty - p - q) = 1$  per ogni  $p, q \in X$  e quindi  $|3x_\infty|$  è priva di punti base e  $\Phi_{x_\infty}$  immerge  $X$  in  $\mathbb{P}^2$ . L'immagine è la cubica nonsingolare di equazione (6.4) in coordinate affini.  $\square$

È naturale chiedersi se esistono superfici di Riemann di genere 1 che non sono tori complessi. Una risposta a questa domanda è data dal seguente risultato.

**Proposizione 6.19.2.** *Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta e connessa di genere 1. Esiste un reticolo  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  tale che  $X \cong \mathbb{C}/\Lambda$ . Quindi ogni superficie di Riemann compatta e connessa di genere uno è un toro complesso.*

*Dimostr.* (cenni) Sia  $\pi : Y \rightarrow X$  il rivestimento universale. Sappiamo che  $Y \approx \mathbb{R}^2$  e che il gruppo fondamentale è isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$  e agisce come un reticolo  $\Lambda$  di traslazioni su  $Y$ . Per la Proposizione 6.2.3 esiste un'unica struttura di superficie di Riemann su  $Y$  tale che  $\pi$  sia olomorfa. Sarà quindi sufficiente dimostrare che con questa struttura  $Y$  è isomorfa a  $\mathbb{C}$ , perché allora  $X = Y/\Lambda$  è un toro complesso. Si ha  $\dim(\Omega(X)) = 1$ , per il Teorema 6.18.1, e quindi esiste una forma differenziale olomorfa  $\omega_0$  su  $X$ . Poiché  $\text{div}(\omega_0)$  ha grado 0,  $\omega_0$  non ha né zeri né poli. Sia  $\omega = \pi^*\omega_0$ , e fissiamo un punto qualsiasi  $p \in Y$ .

Definiamo

$$\Phi : Y \rightarrow \mathbb{C}$$

ponendo

$$\Phi(q) = \int_{\gamma_q} \omega \quad (6.15)$$

dove  $\gamma_q : I \rightarrow Y$  è un arco differenziabile di estremi  $p$  e  $q$ . Questa applicazione è ben definita perché  $Y$  è semplicemente connessa e quindi l'integrale (6.15) dipende solo da  $p$  e  $q$ . Poiché  $\omega$  è olomorfa, (6.15) dipende olomorficamente da  $q$  e quindi  $\Phi$  è un'applicazione olomorfa che si dimostra essere un isomorfismo.  $\square$

# Bibliografia

- [1] Cartan H.: *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Hermann and Addison-Wesley (1993).
- [2] Giusti E.: *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri (1985).
- [3] Harer J., Zagier D.: The Euler characteristic of the moduli space of curves, *Inventiones Math.* 85 (1986), 457-485.
- [4] Lee J.: *Introduction to Topological Manifolds*, Springer GTM (2000).
- [5] Miranda R.: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics v. 5, American Mathematical Society (1995).
- [6] Sernesi E.: *Geometria 1*, Bollati Boringhieri (2000).
- [7] Sernesi E.: *Geometria 2*, Bollati Boringhieri (1994).



# Indice analitico

- $L(D)$ , 146
- $g$ -toro, 104
- applicazione analitica/olomorfa, 117
- applicazione canonica, 162
- applicazione olomorfa
  - non degenerare, 158
- atlante analitico (o olomorfo), 115
- automorfismi di  $\mathbb{P}^1$ , 128
- automorfismo, 118
- bottiglia di Klein, 104, 114
- caratteristica di Eulero-Poincaré, 112, 113
- coordinata locale, 151
- coppia di lati
  - del primo tipo, 104
  - del secondo tipo, 104
- curva
  - canonica, 162
  - razionale e normale, 160
- derivata logaritmica, 81
- divisore, 143
  - base, 155
  - canonico, 152
  - di intersezione, 148
  - di una forma differenziale, 151
  - effettivo, 144
  - iperpiano, 158
  - principale, 144
  - speciale/non speciale, 161
  - supporto di un, 144
- divisori
  - linearmente equivalenti, 144
- equazioni di Cauchy-Riemann, 7
- etichettatura, 103
- forma differenziale, 150
- formula di Eulero, 28
- formula di Plücker, 150
- formula di Riemann-Hurwitz, 125
- funzione
  - $\wp$  di Weierstrass, 132, 163
  - algebrica, 137
  - analitica/olomorfa, 117
  - doppiamente periodica, 130
  - ellittica, 130
  - esponenziale, 26
  - intera, 6
  - logaritmo, 28
  - meromorfa, 126
  - olomorfa, 5
  - periodica, 130
- funzioni
  - iperboliche, 29
  - trigonometriche, 27
- genere, 116
  - di una curva piana, 150
- grado
  - di un divisore, 144
  - di un'applicazione, 123
  - di un'applicazione olomorfa, 159
- grafico, 138
- indice di specialità, 161
- inversa formale, 35
- isomorfismo analitico, 118
- limite, 5
- molteplicità di intersezione, 149
- multipiano proiettivo, 104

- multitoro, 104
- numeri di Bernoulli, 29
- ordine, 127
  - di una forma differenziale in un punto, 151
- parte fissa, 155
- periodo, 130
- piano proiettivo, 104
- poli, 126
- principio del massimo modulo, 40
- punti di diramazione, 124
- punto
  - regolare/eccezionale, 137
- punto base, 155
- raffinamento, 112
- ramificazione
  - indice di, 122
  - punto di, 123
- reticolo, 117, 163
- rivestimento ramificato, 124
- serie
  - binomiale, 34, 136
  - convergenti, 19
  - di Eisenstein, 133
  - di Laurent meromorfe formali, 10
  - formale, 8
- serie lineare, 155
  - grado/dimensione di, 155
- serie lineare
  - canonica, 155, 161
  - completa, 155
  - di un'applicazione olomorfa, 158
- sfera, 104
- sfera di Riemann, 116
- struttura complessa, 115
- superficie
  - triangolabile, 111
- superficie di Riemann, 115
  - di una curva algebrica, 142
  - iperellittica, 162
- teorema
  - dell'applicazione aperta, 39
  - dell'indicatore logaritmico, 81
  - di Bezout, 159
  - di Riemann-Roch, 161
  - di Rouché, 84
  - fondamentale dell'algebra, 83
  - teorema di esistenza di Riemann, 130
- toro complesso, 116
- trasformazione
  - di Möbius, 129
  - lineare fratta, 129
- triangolazione, 110
- triangolo, 110
- varietà jacobiana, 144
- zeri, 126