Tutorato del corso di GE 3
Lezione del 20/04/2009

Esercizi

1. Dal libro Geometria 2:
   - esercizi $5, 9, 11$ pag. 132, 12 pag. 133, $16, 17$ pag. 134;
   - esercizio $2, 3, 4$, pag. 141.

2. Sia X, Y spazi topologici e $A, B \subset X$ chiusi tali che $X = A \cup B$; sia $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ due applicazioni continue tali che $\forall w \in A \cap B,\ f(w) = g(w)$, allora l'applicazione $h : X \to Y$ definita da
$$h(x) = f(x) \text{ se } x \in A,\ h(x) = g(x) \text{ se } x \in B$$
è continua. Siano dati due archi $\alpha_1, \alpha_2 : [0, 1] \to X$, dove X è ancora uno spazio topologico con $\alpha_1(1) = \alpha_2(0)$. Dimostrare che possiamo trovare un arco che sia l'incollamento di α_1, α_2.

3. Sia X uno spazio topologico e supponiamo che $\forall x, y \in X,\ x \neq y$ esistano due aperti disgiunti $A_x, A_y \subset X$ tali che $X = A_x \cup A_y$ e $x \in A_x, y \in A_y$. Dimostrare che X è totalmente sconnesso (i.e. che ogni punto di X costituisce una componente connessa). Dedurne che $\mathbf{Q}$ con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbf{R}$ è totalmente sconnesso.

4. Sia $\mathbf{R}^n, n \geq 2$ e sia $Y \subset \mathbf{R}^n$ di cardinalità numerabile. Dimostrare che $\mathbf{R}^n \setminus Y$ è ancora connesso per archi. Dedurne che data una applicazione continua suriettiva $f : \mathbf{R}^n \to [a, b],\ |a|, |b| < \infty$ allora $\forall c \in (a, b),\ f^{-1}(c)$ non ha cardinalità numerabile (i.e. gli unici punti di $[a, b]$ la cui fibra ha cardinalità al più numerabile sono gli estremi dell'intervallo). Dare esempi delle varie situazioni possibili.

5. Diciamo che un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici X, Y è propria se $\forall C \subset Y$ compatto $f^{-1}(C) \subset X$ è compatto. Dimostrare che se Y è localmente compatto e $g : X \to Y$ è un'applicazione continua propria, allora anche X è localmente compatto. Dimostrare che un' applicazione continua $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è propria se e solo se $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$. Dimostrare inoltre che se $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$ allora f ammette minimo assoluto in $\mathbf{R}^n$.