Tutorato del corso di GE 3
Lezione del 09/03/2009

Esercizi

1. Dal libro Geometria 2:
   - pag. 33, esercizio 4;
   - pag. 40, esercizio 7;
   - pag. 41, esercizi 13, 14.

2. Dimostrare che dato X spazio topologico e $A, B \subset X$ vale che:
$$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).$$
   Dare inoltre un esempio per cui valga l'inclusione stretta.

3. Consideriamo $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \text{ t.c. } x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$ ed $\mathbf{R}^2$ (in cui prendiamo coordinate (y_1, y_2)) e la proiezione stereografica dal punto di coordinate $(0, 0, 1)$ $\pi_{(0,0,1)} : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbf{R^2}$; dimostrare che la sua espressione in coordinate è la seguente:
$$\pi_{(0,0,1)}(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}).$$
   Verificare inoltre che l'inversa $\pi^{-1}_{(0,0,1)} : \mathbf{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ ha la seguente espressione in coordinate:
$$\pi^{-1}_{(0,0,1)}(y_1, y_2) = (\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + 1})$$

4. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ una base per la topologia di X. Supponiamo ora di avere una applicazione $f : X \to Y$, dove $(Y, \mathcal{T}_1)$ è uno spazio topologico (ed f non è necessariamente continua). Supponiamo che $\forall B \in \mathcal{B},\ \ f(B) \in \mathcal{T}_1$. Dimostrare che f è un'applicazione aperta.

5. Dare alcuni esempi di applicazioni tra spazi topologici che siano aperte ma non continue.

6. Sia X uno spazio e siano $\mathcal{T}, \mathcal{T}_1$ due diverse topologie su X. Dire in quali casi l'applicazione $\mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_1)$, $\mathrm{Id}(x) = x$, $\forall x \in X$, è continua, in quali è aperta, in quali ancora chiusa.
   Dimostrare che se è aperta e continua allora è un omeomorfismo (vale anche il viceversa).