

arrows

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Anno Accademico 2008/2009**  
**GE3 - Topologia**  
**Secondo Appello**  
Venerdì 17 Luglio 2009

1. Si consideri  $\mathbb{R}$  con la topologia connumerabile  $\mathcal{CN}$ , ovvero  $A \in \mathcal{CN} \Leftrightarrow A = \mathbb{R} \setminus N$ , con  $N$  sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  al più numerabile.
  - (a) Dire se tale spazio topologico è uno spazio T1, di Hausdorff e se è metrizzabile.
  - (b) Dimostrare che una successione in tale spazio è convergente se, e solo se, essa è definitivamente costante.
  - (c) Trovare, in tale spazio, interno esterno e chiusura dell'insieme  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ .
  - (d) Dire se tale spazio è separabile.
2. Si consideri lo spazio normato  $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ , dove  $C[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$  e, per ogni  $f \in C[0, 1]$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . Dimostrare che  $C[0, 1]$  con la topologia indotta dalla metrica (indotta dalla norma) è connesso per archi e semplicemente connesso.
3. Dimostrare che ogni sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$ , con la topologia indotta dalla topologia  $i_s$ , è connesso.
4.  $X \subset \mathbb{R}^n$  si dice insieme stellato se  $\exists p \in X$  tale che per ogni altro punto  $x \in X$  il segmento  $\overline{px}$  è tutto contenuto in  $X$ . Dimostrare che un insieme stellato di  $\mathbb{R}^n$ , con la topologia indotta dalla topologia euclidea, è semplicemente connesso.