Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
GE3 - Topologia
Esercitazione 6
Martedì 19 Maggio 2009
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. Sia $C[0,1]$ lo spazio delle funzioni continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dotato della norma del sup (i.e. : $||f||_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$). Verificare che $C[0,1]$, con la topologia indotta dalla norma, è uno spazio di Hausdorff non compatto.

2. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 19 pagina 134)

   Siano $Z_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x-(1,0)|| < 1\}$, $Z_{-1} := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x-(-1,0)|| < 1\}$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi:

   (a) $A := Z_1 \cup Z_{-1}$;
   (b) $B := A \cup \{(0,0)\}$;
   (c) $C := A \cup \{(-2,0),(2,0)\}$;
   (d) $D := A \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1\}$;
   (e) $E := A \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$.

   Soluzione:

   Z_1 e Z_{-1} sono, rispettivamente, il disco aperto di centro $(1,0)$ e raggio 1 e il disco aperto di centro $(-1,0)$ e raggio 1.

   (a) A è sconnesso, infatti Z_1 e Z_{-1} sono entrambi aperti, non vuoti e disgiunti (dato che i due centri dei dischi distano 2 la somma delle distanze di un punto y dai centri è maggiore o uguale a 2, quindi una delle due distanze deve necessariamente essere maggiore o uguale a 1).

   (b) Z_1 è un disco aperto, perciò convesso ed in particolare connesso per archi, quindi connesso. Dato che $(0,0) \in \overline{Z_1}$, allora $Z_1 \cup \{(0,0)\}$ è connesso. Analogamente $Z_{-1} \cup \{(0,0)\}$ è connesso. Ma allora B è connesso perchè unione dei connessi $Z_1 \cup \{(0,0)\}$ e $Z_{-1} \cup \{(0,0)\}$ che hanno $(0,0)$ come punto in comune.

   (c) Siano $Y_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : 3/2 < x_1 < 5/2\}$ e $Y_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : -5/2 < x_1 < -3/2\}$. Y_1 e Y_2 sono aperti di $\mathbb{R}^2$. Quindi $Z_1 \cup Y_1$ e $Z_{-1} \cup Y_2$ sono aperti di $\mathbb{R}^2$. Perciò, per definizione di topologia indotta, $Z_1 \cup \{(2,0)\}$ e $Z_{-1} \cup \{(-2,0)\}$ sono aperti di C la cui unione è proprio C. Sono non vuoti e disgiunti, quindi C è sconnesso.

   (d) Siccome $(-1,1) \in \overline{Z_{-1}}$ allora $Z_{-1} \cup (-1,1)$ è connesso. Siccome $Y := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1\}$ è connesso (ad esempio perché omeomorfo a $\mathbb{R}$) allora, avendo Y e $Z_{-1} \cup (-1,1)$ un punto in comune, $Z_{-1} \cup Y$ è connesso. Analogamente $Z_1 \cup Y$ è connesso. Perciò D è connesso, in quanto unione di connessi non disgiunti.

   (e) Sia $Y := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1\}$. Y è connesso. Anche B è connesso, quindi, siccome B e Y si intersecano, $B \cup Y = E$ è connesso.

3. Siano X, Y due spazi topologici omotopicamente equivalenti. Dimostrare che se X è connesso allora anche Y è connesso.

   Soluzione:

   Dimostreremo che dati due qualsiasi punti $a, b \in Y$ essi sono connessi (cioè esiste un sottoinsieme connesso di Y che li contiene entrambi).

   Per definizione esistono $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ equivalenze omotopiche. In particolare esiste $F : Y \times I \to Y$ tale che per ogni $y \in Y$ $F(y, 0) = f(g(y))$ e $F(y, 1) = y$. Siano $Z_1 := F(a, I)$, $Z_2 := F(b, I)$. Z_1 e Z_2 sono connessi, perchè immagine continua di connessi. Per lo stesso motivo anche $f(X)$ è connesso. $f(X) \cap Z_1 \neq \emptyset$, dato che $F(a, 0) = f(g(a)) \in f(X)$. Analogamente $f(X) \cap Z_2 \neq \emptyset$, quindi $W := f(X) \cup Z_1 \cup Z_2$ è connesso. Ora, siccome $F(a, 1) = a$ e $F(a, 2) = b$, allora W contiene a e b e la tesi è dimostrata.

4. Dimostrare che una varietà topologica connessa X è connessa per archi.

   Soluzione:

   Sia n la dimensione della varietà. Sia $x_0 \in X$ fissato. Si consideri l'insieme $A := \{x \in X | \exists \alpha : I \to X : \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x\}$ e il suo complementare in X, B.

   A è aperto: infatti supponiamo $y \in A$. Per definizione di varietà $\exists U \subseteq X$, U intorno aperto di y, tale che U è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Siccome $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi, U è connesso per archi, quindi $U \subseteq A$.

   Anche B è aperto: infatti supponiamo $y \in B$. Sia U come sopra. Allora ogni $z \in U$ non può essere connesso per archi a x_0, altrimenti, essendo U connesso per archi, anche y sarebbe connesso per archi a x_0.

   Siccome X è connessa, B è il complementare di A e A è non vuoto (dato che X è localmente euclidea) allora $B = \emptyset$ e $A = X$, da cui la tesi.

5. Sia $X := \overline{D(0, 2)} \setminus D(0, 1/2) \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare $\pi_1(X, (0, 1))$.

   Soluzione:

   Sia S la circonferenza di centro 0 e raggio 1. Sia $\phi : X \to S$ tale che $\phi(x) = x/||x||$. ϕ è una funzione continua. Ci basterà allora dimostrare che ϕ è anche un'equivalenza omotopica: allora $\phi_* : \pi_1(X, (0, 1)) \to \pi_1(S, (0, 1))$ è un isomorfismo, da cui $\pi_1(X, (0, 1)) \cong \mathbb{Z}$.

   Consideriamo $i : S \to X$, l'inclusione di S in X. $\phi \circ i = id_S$. Sia $F : X \times I \to X$ tale che $F(x, t) = (1 - t)x + tx/||x||$. F è una funzione continua, $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = x/||x|| = (i \circ \phi)(x)$, allora $i \circ \phi$ è omotopa a id_X. Quindi ϕ è effettivamente un'equivalenza omotopica.

   Si poteva calcolare il gruppo fondamentale di X anche in un altro modo. Infatti si considerino le funzioni $f : X \to S^1 \times [1/2, 2] \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ tale che $f((x_1, x_2)) = (\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ e $g : S^1 \times [1/2, 2] \to X$ tale che $g(x_1, x_2, y) = (x_1 y, x_2 y)$. Allora f e g sono continue, una inversa dell'altra. Quindi $X \cong S^1 \times [1/2, 2]$, da cui $\pi_1(X, (0, 1)) \cong \pi(S^1 \times [1/2, 2], (0, 1, 1))$. Per quanto visto a lezione $\pi(S^1 \times [1/2, 2], (0, 1, 1)) \cong \pi(S^1, (0, 1)) \times \pi([1/2, 2], 1) \cong \pi(S^1, (0, 1)) \cong \mathbb{Z}$, essendo $[1/2, 2]$ contraibile.

6. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 6 pagina 150)

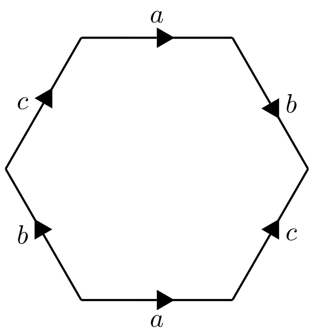
   Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che se x_0, x_1 appartengono alla stessa componente connessa per archi, l'isomorfismo $\pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ è indipendente dall'arco $\alpha : I \to X$ di estremi x_0 ed x_1 se, e solo se, $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo abeliano.

   Soluzione:

   Supponiamo che $\pi_1(X, x_0)$ sia un gruppo abeliano. Siano α_1, α_2 due archi di punto iniziale x_0 e punto finale x_1. . Dobbiamo dimostrare che $\forall[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ si ha $[\alpha_1^\circ * \gamma * \alpha_1] = [\alpha_2^\circ * \gamma * \alpha_2]$, cioè che $\alpha_1^\circ * \gamma * \alpha_1 \sim \alpha_2^\circ * \gamma * \alpha_2$. Dato che $\pi_1(X, x_0)$ è commutativo, allora $\gamma * \alpha_2 * \alpha_1^\circ \sim \alpha_2 * \alpha_1^\circ * \gamma$, quindi $\gamma * \alpha_2 * \alpha_1^\circ * \alpha_1 \sim \alpha_2 * \alpha_1^\circ * \gamma * \alpha_1$, da cui $\gamma * \alpha_2 \sim \alpha_2 * \alpha_1^\circ * \gamma * \alpha_1$. Ma allora $\alpha_1^\circ * \gamma * \alpha_1 \sim \alpha_2^\circ * \gamma * \alpha_2$.

   Viceversa: siano $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_0)$. Dobbiamo dimostrare che $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma_2 * \gamma_1$. Sia α un arco di punto iniziale x_0 e punto finale x_1. Dato che anche $\gamma_2 * \alpha$ ha punto iniziale x_0 e punto finale x_1 allora, per ipotesi, $\alpha^\circ * \gamma_1 * \alpha \sim \alpha^\circ * \gamma_2^\circ * \gamma_1 * \gamma_2 * \alpha$, da cui $\gamma_1 \sim \gamma_2^\circ * \gamma_1 * \gamma_2$, cioè $\gamma_2 * \gamma_1 \sim \gamma_1 * \gamma_2$.

7. Classificare la superficie compatta e connessa S ottenuta come quoziente del seguente poligono con etichettatura $abc^{-1}a^{-1}bc$.



   Soluzione:

   Calcoliamo la caratteristica di Eulero della superficie. Come visto a lezione, tale caratteristica è pari a $k - m + 1$, dove k è il numero delle classi di equivalenza distinte dei vertici e m la metà del numero dei lati del poligono. Quindi $\chi(S) = 1 - 3 + 1 = -1$. Inoltre, essendo $\chi(S)$ dispari, S non è orientabile e ha genere $g = 2 - \chi(S) = 3$, quindi S è omeomorfa alla somma connessa di 3 piani proiettivi.