Università degli Studi Roma Tre
Anno Accademico 2008/2009
GE3 - Topologia
Esercitazione 3
Martedì 31 Marzo 2009
domande/osservazioni: dibiagio@mat.uniroma1.it

1. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 5 pagina 100)

   Dimostrare che uno spazio X è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta := \{(x,x) : x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$.

   Soluzione:

   Supponiamo per cominciare che X sia uno spazio di Hausdorff. Sia $p = (x,y) \in X \times X \setminus \Delta$, cioè $x \neq y$. Dato che X è di Hausdorff, per definizione esistono due aperti A_x, A_y tali che $x \in A_x, y \in A_y$ e $A_x \cap A_y = \emptyset$. Allora $A_x \times A_y$ è aperto in $X \times X$, $p \in A_x \times A_y$ e inoltre $A_x \times A_y \subset X \times X \setminus \Delta$ perché $A_x \cap A_y = \emptyset$. Perciò $X \times X \setminus \Delta$ è aperto nella topologia prodotto di $X \times X$, ovvero Δ è chiuso.

   Viceversa: siano $x, y \in X$, $x \neq y$. Dato che la diagonale Δ è chiusa in $X \times X$ e $p := (x,y) \notin \Delta$, allora esiste un aperto $A \subset X \times X \setminus \Delta$ tale che $p \in A$. Per definizione di topologia prodotto esistono quindi due aperti $A_x, A_y \subset X$ tali che $A_x \times A_y \subseteq A$ e $p \in A_x \times A_y$. Perciò $x \in A_x, y \in A_y$ e $A_x \cap A_y = \emptyset$ perché A non interseca Δ. Quindi X è di Hausdorff.

2. (a) Sia X uno spazio compatto e sia $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi non vuoti tali che $V_{n+1} \subseteq V_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$. Mostrare con un esempio che l'ipotesi di compattezza è essenziale.

   (b) Sia X uno spazio compatto e di Hausdorff e sia $f : X \to X$ una funzione continua. Sia $V_0 = X$ e V_n definito induttivamente come $f(V_{n-1})$. Dimostrare che $A := \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$.

   Soluzione:

   (a) Se per assurdo $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \emptyset$ allora $X \setminus (\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n) = X$, cioè $\cup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus V_n) = X$, con $X \setminus V_n$ aperti in X e tali che $X \setminus V_{n+1} \supseteq X \setminus V_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per compattezza il ricoprimento $\{X \setminus V_n | n \in \mathbb{N}\}$ ammette un sottoricoprimento finito, quindi esiste un $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\cup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus V_n) = X \setminus V_{\overline{n}} = X$, da cui $V_{\overline{n}} = \emptyset$, assurdo.

   Come controesempio consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Si considerino poi $V_n := \mathbb{N} \setminus \{0, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$. Chiaramente i V_n verificano le ipotesi ma $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \emptyset$.

   (b) Dimostriamo per induzione che i V_n verificano le ipotesi di cui al punto precedente, ovvero sono insiemi chiusi contenuti l'uno nell'altro: $V_0 = X$ è chiaramente chiuso e $V_1 = f(X) \subseteq X = V_0$; supponiamo allora V_n chiuso tale che $V_n \subseteq V_{n-1}$. Allora $f(V_n) \subseteq f(V_{n-1})$, cioè $V_{n+1} \subseteq V_n$. Inoltre siccome X è compatto e V_n è chiuso, allora V_n è anche compatto; dato che f è continua $f(V_n)$ è compatto; dato che

X è di Hausorff, dalla compattezza di $f(V_n)$ segue che $V_{n+1} = f(V_n)$ è chiuso.

A questo punto, dato che si ha anche che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $V_n \neq \emptyset$, la tesi segue banalmente dal punto precedente.

3. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 9 pagina 101) Dimostrare che uno spazio quoziente Y di uno spazio X è T1 se e solo se ogni classe di equivalenza è un sottoinsieme chiuso di X.

   Soluzione:

   Sia $p : X \to Y$ la proiezione canonica. Uno spazio è T1 se, e solo se, ogni punto è chiuso. Dato che p è un'identificazione, un insieme in Y è chiuso se, e solo se, la sua preimmagine è chiusa in X. Quindi $\{y\} \subseteq Y$ è chiuso se, e solo se, $p^{-1}(\{y\})$ è chiuso in X, ovvero se e solo se ogni classe di equivalenza è chiusa in X.

4. (E. Sernesi - Geometria 2 - esercizio 2 pagina 113) Sia X uno spazio topologico e siano $K_1, \ldots, K_s$ sottoinsiemi di X. Dimostrare che se $K_1, \ldots, K_s$ sono compatti allora $K := K_1 \cup \ldots \cup K_s$ è compatto.

   Soluzione:

   Sia $\mathcal{F} = \{A_\pi | \pi \in \Pi\}$ un ricoprimento aperto (cioè: A_π è aperto in X per ogni $\pi \in \Pi$) di K. Chiaramente, per definizione di K, $\mathcal{F}$ è un ricoprimento aperto di K_1, K_2, ..., K_s. Quindi per ogni $i = 1, \ldots, s$ esiste $n(i) \in \mathbb{N}$ e esistono $\pi_j^i \in \Pi$ con $j = 1, \ldots, n(i)$ tali che per ogni i, $\cup_{1 \leq j \leq n(i)} A_{\pi_j^i} \supseteq K_i$. Ma allora $\cup_{1 \leq i \leq s} \cup_{1 \leq j \leq n(i)} A_{\pi_j^i} \supseteq K_1 \cup \ldots \cup K_s = K$: quindi da un ricoprimento aperto di K ne abbiamo estratto uno finito, perciò K è compatto.

5. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e K_1, K_2 due suoi sottoinsiemi compatti. Dimostrare che $K_1 \cap K_2$ è compatto. Mostrare con un controesempio che l'ipotesi "Hausdorff " è essenziale.

   Soluzione:

   Gli insiemi compatti in spazi di Hausdorff sono in particolare chiusi, quindi anche $K_1 \cap K_2$ è chiuso. Siccome un chiuso in uno spazio compatto è anch'esso compatto, dato che $K_1 \cap K_2 \subseteq K_1$ si ha che $K_1 \cap K_2$ è compatto.

   Come controesempio si consideri l'insieme $\widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\square\} \cup \{\circ\}$. Si prendano, come aperti su $\widetilde{\mathbb{R}}$, gli aperti di $\mathbb{R}$ e lo stesso $\widetilde{\mathbb{R}}$. In questo spazio topologico $\mathbb{R} \cup \{\square\}$ e $\mathbb{R} \cup \{\circ\}$ sono compatti, ma $(\mathbb{R} \cup \{\square\}) \cap (\mathbb{R} \cup \{\circ\}) = \mathbb{R}$ non è compatto.