Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Tutorato 9 (13 Maggio 2013)
Omotopia

1. Dimostrare che un sottoinsieme convesso X di $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

   Soluzione:

   In primo luogo osserviamo che un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per poligonali e dunque per archi. Rimane da far vedere che fissato un qualsiasi punto $P \in \mathbb{R}^n$ ogni cappio f in X di punto base P è omotopicamente equivalente al cappio costante c_P. Consideriamo l'applicazione $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ definita da:

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tP$$

   Osserviamo che F è ben definita poichè, essendo X convesso, $\forall\, x \in X$ il segmento tra $f(x)$ e P è interamente contenuto in X.
   Inoltre F è continua e tale che $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = P$. Ne concludiamo che F è un'omotopia tra f e c_P, da cui f e c_P sono omotope. La tesi segue dall'arbitrarietà della scelta di f.

2. Siano α, β, γ archi in X tali che il punto finale di α (risp. β) sia quello iniziale di β (risp.γ). Si dia l'espressione esplicita dei due archi $(\alpha*\beta)*\gamma, \alpha*(\beta*\gamma)$ e si dimostri che sono omotopi relativamente a $\{0,1\}$ all'arco $\delta = \alpha * \beta * \gamma$ definito da

$$\delta(t) = \begin{cases} \alpha(3t) & 0 \le t \le 1/3 \\ \beta(3t-1) & 1/3 \le t \le 2/3 \\ \gamma(3t-2) & 2/3 \le t \le 1 \end{cases}$$

   Soluzione:

   Per la definizione di composizione di archi avremo che:

$$(\alpha*\beta)*\gamma = \begin{cases} \alpha(4s) & 0 \le s \le 1/4 \\ \beta(4s-1) & 1/4 \le s \le 1/2 \\ \gamma(2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} \qquad \alpha*(\beta*\gamma) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \le s \le 1/2 \\ \beta(4s-2) & 1/2 \le s \le 3/4 \\ \gamma(4s-3) & 3/4 \le s \le 1 \end{cases}$$

   Dimostriamo che l'arco $(\alpha*\beta)*\gamma$ è omotopo relativamente a $\{0,1\}$ all'arco δ. La dimostrazione di $\alpha*(\beta*\gamma) \simeq_{\{0,1\}} \delta$ sarà analoga.

   Come sopra si avrà che $\delta = \begin{cases} \alpha(3s) & 0 \le s \le 1/3 \\ \beta(3s-1) & 1/3 \le s \le 2/3 \\ \gamma(3s-2) & 2/3 \le s \le 1 \end{cases}$
   In primo luogo osserviamo che i due archi coincidono sul sottoinsieme $\{0,1\}$, infatti:
   $((\alpha*\beta)*\gamma)(0) = \alpha(0) = \delta(0)$ e $((\alpha*\beta)*\gamma)(1) = \gamma(1) = \delta(1)$.
   Rimane da esibire un'applicazione continua $F(s,t) : I \times I \to X$ tale che $F(s,0) = ((\alpha*\beta)*\gamma)(s)$ e $F(s,1) = \delta(s)$.
   Determiniamo quindi gli intervalli in cui varia s in funzione di t. Nel primo caso dobbiamo far si che al variare di t in I l'intervallo $[0,1/4]$ venga trasformato in $[0,1/3]$ cioé s deve essere compreso tra 0 e la retta $at+b$ soddisfacente le seguenti relazioni

$$at+b = \begin{cases} 1/4 & \text{se } t=0 \\ 1/3 & \text{se } t=1 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad \begin{cases} b = 1/4 \\ a = 1/12 \end{cases}$$

   Quindi si avrà $0 \le s \le \frac{t+3}{12}$.

In maniera analoga otteniamo gli intervalli $\frac{t+3}{12} \leq s \leq \frac{t+3}{6}$ e $\frac{t+3}{6} \leq s \leq 1$.

Abbiamo dunque

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(as+b) & 0 \leq s \leq \frac{t+3}{12} \\ \beta(cs+d) & \frac{t+3}{12} \leq s \leq \frac{t+3}{6} \\ \gamma(es+f) & \frac{t+3}{6} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Procediamo nel determinare i coefficienti $a, b \in \mathbb{R}$ in base agli estremi del primo intervallo. Infatti si deve avere

$$\alpha(as+b) = \begin{cases} \alpha(0) & \text{se } s = 0 \\ \alpha(1) & \text{se } s = \frac{t+3}{12} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a(\frac{t+3}{12}) + b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{12}{t+3} \end{cases}$$

Allo stesso modo risolvendo i sistemi

$$\beta(cs+d) = \begin{cases} \beta(0) & \text{se } s = \frac{t+3}{12} \\ \beta(1) & \text{se } s = \frac{t+3}{6} \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma(es+f) = \begin{cases} \gamma(0) & \text{se } s = \frac{t+3}{6} \\ \gamma(1) & \text{se } s = 1 \end{cases}$$

si ottiene

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{12}{t+3}s) & 0 \leq s \leq \frac{t+3}{12} \\ \beta(\frac{12s-t-3}{t+3}) & \frac{t+3}{12} \leq s \leq \frac{t+3}{6} \\ \gamma(\frac{t+3-6s}{t-3}) & \frac{t+3}{6} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

che è l'omotopia cercata.

3. Sia a un arco in X spazio topologico. Dimostrare che

$$\alpha(s) = \begin{cases} a(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ a(2-2s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

è omotopo relativamente a $\{0,1\}$ al cappio costante $c_{a(0)}$.
<u>*Soluzione*</u>:

Consideriamo l'applicazione

$$F(s,t) = \alpha(ts) = \begin{cases} a(2ts) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ a(2t-2st) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Allora si ha che

- F è continua;
- F è ben definita in quanto la sua immagine coincide con quella di α;
- F è un omotopia tra i due archi infatti $F(s,0) = c_{a(0)}$ e

$$F(s,1) = \begin{cases} a(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ a(2-2s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} = \alpha(s).$$

- F rispetta la condizione di compatibilità perchè nei punti 0 e 1 dove $\alpha(0) = c_{a(0)} = a(0) = \alpha(1) = c_{a(0)}(1)$ si ha che $F(0,t) = a(2 \cdot t \cdot 0) = a(0)$ mentre $F(1,t) = a(2t - 2t \cdot 1) = a(2t-2t) = a(0)$.

4. Dimostrare che S^{n-1} ed $\mathbb{R}^n \setminus B_1^n(\mathbf{0})$, con $B_1^n(\mathbf{0}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : ||\underline{x}|| < 1\}$, sono omotopicamente equivalenti.
<u>*Soluzione*</u>:

Consideriamo le seguenti applicazioni continue:

$$i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus B_1^n(\mathbf{0}) \qquad \underline{x} \mapsto \underline{x}$$

$$|| \cdot || : \mathbb{R}^n \setminus B_1^n(\mathbf{0}) \to S^{n-1} \qquad \underline{x} \mapsto \frac{\underline{x}}{||\underline{x}||}$$

Per dimostrare che esse sono omotopicamente equivalenti dobbiamo far vedere che $||\cdot|| \circ i \simeq id_{S^{n-1}}$ e $i \circ ||\cdot|| \simeq id_{\mathbb{R}^n \setminus B_1^n(\mathbf{0})}$.
Abbiamo che $||\cdot|| \circ i = id_{S^{n-1}}$, mentre nel secondo caso dobbiamo trovare un'omotopia tra le due applicazioni.
Sia $F : (\mathbb{R}^n \setminus B_1^n(\mathbf{0})) \times I \to (\mathbb{R}^n \setminus B_1^n(\mathbf{0}))$ tale che

$$F(\underline{x}, t) = \underline{x} e^{(t-1)ln(||\underline{x}||)},$$

essa è un'applicazione continua e $F(\underline{x}, 0) = \frac{\underline{x}}{||\underline{x}||}$ mentre $F(\underline{x}, 1) = \underline{x} = id_{\mathbb{R}^n \setminus B_1^n(\mathbf{0})}(\underline{x})$. Infine F è ben definita perché $||\underline{x} e^{(t-1)ln(||\underline{x}||)}|| \geq ||\underline{x} e^{-ln(1)}|| \geq ||\underline{x}|| \geq 1$ e dunque $Im(F) \subset \mathbb{R}^n \setminus B_1^n(\mathbf{0})$.

5. Verificare che $\mathbb{R}$ ed $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ sono omotopicamente equivalenti.

   <u>*Soluzione*</u>:
   Consideriamo le seguenti applicazioni continue:

$$i : \mathbb{R} \hookrightarrow X \qquad x \mapsto (x, 0)$$

$$f : X \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} (x, 0) & \text{se } y = 0 \\ (0, 0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   Per dimostrare che esse sono omotopicamente equivalenti dobbiamo far vedere che $f \circ i \simeq id_{\mathbb{R}}$ e $i \circ f \simeq id_X$. Nel primo caso $f \circ i$ e $id_{\mathbb{R}}$ coincidono; nel secondo bisogna trovare un'omotopia tra $i \circ f$ e id_X.
   Sia $F : X \times I \to X$ tale che $F((x, y), t) = (x, ty)$. F è chiaramente un'applicazione continua, $F((x, y), 1) = (x, y) = id_X(x, y)$ e $F((x, y), 0) = (x, 0) = f(x, y)$. Infine, F è ben definita perché $Im(F) \subset X$, infatti se $(x, y) \in X$ allora $(x, y) = (x, 0)$ o $(x, y) = (0, y)$. Da cui $F(x, y) = (x, 0) \in X$, oppure $F(x, y) = (0, ty) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \subset X$.

6. Si definisca un arco in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ di estremi $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$ e la cui immagine contenga il punto $(0, 1, 0)$.

   <u>*Soluzione*</u>:

   L'arco cercato è

$$\alpha(t) = \begin{cases} (2t - 1, 2t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2t - 1, 2 - 2t, 0) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

7. Sia X uno spazio topologico e siano α, β, γ cappi di base x_0 tali che $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$. Provare che se X è di Hausdorff allora α, β, γ sono costanti.

   <u>*Soluzione*</u>:

   Dimostriamo l'asserto per α, la verifica per β e γ sarà analoga.

   Per definizione:

$$\alpha * (\beta * \gamma) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(4t - 2) & 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ \gamma(4t - 3) & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad (\alpha * \beta) * \gamma = \begin{cases} \alpha(4t) & 0 \leq t \leq 1/4 \\ \beta(4t - 1) & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   Dalla relazione $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$ otteniamo che $\alpha(4t) = \alpha(2t)$ se $t \leq \frac{1}{4}$. Ponendo quindi $4t = s$ abbiamo, $\forall\, 0 \leq s \leq 1$,

$$\alpha(s) = \alpha\left(\frac{s}{2}\right) = \alpha\left(\frac{s}{4}\right) = \ldots = \lim_{n \to +\infty} \alpha(\frac{s}{2^n}) = \alpha(0)$$

   Giustifichiamo l'ultima uguaglianza:
   sia U un intorno di $\alpha(0)$; per continuità di α in 0, $\exists\, \delta > 0$ tale che se $t \in I_\delta := (-\delta, \delta) \Rightarrow \alpha(t) \in U$.
   Ma, allora, una volta fissato δ, $\exists\, n_\delta$ tale che $\forall\, n > n_\delta \quad \frac{s}{2^n} \in I_\delta \Rightarrow \alpha(\frac{s}{2^n}) \in U$.
   Abbiamo, dunque, dimostrato che $\alpha(0) \in \lim_{n \to +\infty} \alpha(\frac{s}{2^n})$; essendo X uno spazio di Hausdorff tale limite è unico e dunque $\lim_{n \to +\infty} \alpha(\frac{s}{2^n}) = \alpha(0)$.

   In conclusione $\alpha(s) = \alpha(0)$, $\forall\, 0 \leq s \leq 1$, cioè α è costante.

8. Siano X e Y spazi topologici omotopicamente equivalenti. Dimostrare che X è connesso per archi se e solo se Y lo è.

Soluzione:

X ed Y sono omotopicamente equivalenti; allora esistono due applicazioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che $g \circ f \simeq Id_X$ e $f \circ g \simeq Id_Y$.

Dimostriamo che se X è connesso per archi anche Y lo è. La dimostrazione del viceversa sarà analoga.
Siano $y_1,\ y_2 \in Y \ \Rightarrow g(y_1),\ g(y_2) \in X \ \Rightarrow$ essendo X connesso per archi, $\exists\ \alpha : I \to X$ tale che $\alpha(0) = g(y_1)$ e $\alpha(1) = g(y_2)$.
Sia ora $F : Y \times I \to Y$ l'omotopia tra $f \circ g$ e Id_Y ($F(y,0) = f(g(y))$ e $F(y,1) = y$).
Mostriamo dunque che l'arco $\beta := F(y_1,t)^0 * (f \circ \alpha) * F(y_2,t)$ connette y_1 con y_2 (β è ben definito poichè $F(y_1,t)^0(1) = F(y_1,t)(0) = f(g(y_1)) = f \circ \alpha(0)$ e $(f \circ \alpha)(1) = f(g(y_2)) = F(y_2,t)(0)$):

- $\beta(0) = F(y_1,t)^0 * (f \circ \alpha) * F(y_2,t)(0) = F(y_1,t)^0(0) = F(y_1,t)(1) = y_1$;
- $\beta(1) = F(y_1,t)^0 * (f \circ \alpha) * F(y_2,t)(1) = F(y_2,t)(1) = y_2$.