Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Tutorato 7 (22 Aprile 2013)
Connessione

1. Dati i seguenti spazi topologici si determini quali di essi sono connessi giustificando la risposta.

$\oplus$	$\mathbb{R}^n$;	$\oplus$	S^n con $n \geq 2$;
♣	$\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ con $P \in \mathbb{R}^2$;	♣	$\mathbb{Q}$;
♢	$\mathbb{R}^2 \setminus \{r\}$ dove r è una retta in $\mathbb{R}^2$;	♢	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
♠	$\mathbb{R}^3 \setminus \{r\}$ dove r è una retta in $\mathbb{R}^3$;	♠	$\mathbb{Q}^n$;
♡	S^1;	♡	$\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.

<u>*Soluzione:*</u>

Ricordiamo in primo luogo la seguente proposizione:

L'unione di una famiglia di sottoinsiemi connessi di uno spazio topologico X aventi un punto in comunue è connessa.

$\oplus$ $\mathbb{R}^n$ è connesso.
Infatti, supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}^n = A \cup B$ con A e B aperti disgiunti, allora presi $a \in A$ e $b \in B$ si ha che $d(a,b) > 0$ e quindi possiamo considerare il segmento I (non banale) tra a e b. Gli insiemi $I \cap A \subsetneq I$ e $I \cap B \subsetneq I$ sono aperti disgiunti inoltre, $(I \cap A) \cup (I \cap B) = I \cap (A \cup B) = I \cap \mathbb{R}^n = I$ e quindi rappresentano una sconnessione di I. L'intervallo I è però omeomorfo ad un intervallo in $\mathbb{R}$ il quale è connesso. Abbiamo ottenuto una contraddizione perché la connessione è una proprietà topologica.

♣ $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ è connesso.
Senza perdita di generalità fissiamo un punto $Q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$. Per ogni punto R in $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$, se R non appartiene alla retta passante per P e Q allora possiamo considerare il segmento tra R e Q, altrimenti prendiamo una qualsiasi poligonale semplice e non chiusa tra R e Q che non contenga P. Ricordando che una poligonale semplice e non chiusa è omeomorfa all'intervallo $[0,1]$ e quindi è connessa, abbiamo ottenuto che $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ si può scrivere come unione di segmenti e poligonali semplici non chiuse aventi un punto in comune. Per la proposizione sopra citata otteniamo che $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ è connesso.

♢ $\mathbb{R}^2 \setminus \{r\}$ è sconnesso.
Si consideri una retta generica $r = \{(x, mx+q) : x, m, q \in \mathbb{R}\}$. Allora gli aperti $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < mx+q\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > mx+q\}$ rappresentano una sconnessione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{r\}$.

♠ $\mathbb{R}^3 \setminus \{r\}$ è connesso.
Senza perdita di generalità fissiamo un punto $Q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{r\}$. Per ogni punto R in $\mathbb{R}^3 \setminus \{r\}$, se il segmento tra R e Q non interseca la retta r allora possiamo considerare tale segmento, altrimenti consideriamo una poligonale semplice e non chiusa tra R e Q che non intersechi la retta r. La dimostrazione procede in maniera equivalente al caso $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$.

♡ S^1 è connesso.
Ricordiamo che $S^1 \approx \frac{[0,1]}{\sim}$ dove $x, y \in [0,1]$ e $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $x = 0$ e $y = 1$ o viceversa. Dunque S^1 è connesso in quanto quoziente di un connesso.

$\oplus$ S^n è connesso.
Sia $n \geq 2$; posto $N := (0,0,1)$, sia $f : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ la proiezione stereografica. Essendo f un omeomorfismo e $\mathbb{R}^n$ connesso segue che $f^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n \setminus \{N\}$ è connesso. Allo stesso modo si fa vedere che, posto $S := (0,0,-1)$, $S^n \setminus \{S\}$ è connesso in quanto omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. La conclusione segue dal fatto che $S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{S\})$.

♣ $\mathbb{Q}$ è sconnesso.
Basta considerare gli aperti disgiunti $(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ e $(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$.

♢ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è sconnesso.
Basta considerare la sconnessione costituita dagli aperti disgiunti $(-\infty, 2) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e $(2, \infty) \cap (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q})$.

♠ $\mathbb{Q}^n$ è sconnesso.
Se consideriamo come aperti disgiunti il prodotto di n copie di $(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ e di $(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ otteniamo una sconnessione di $\mathbb{Q}^n$.

♡ $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ è sconnesso.
Basta prendere come aperti disgiunti $\mathbb{R} \times ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q})$ e $\mathbb{R} \times ((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q})$.

2. Determinare tutti i sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita.

   Soluzione:

   Affermiamo che:

   I sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita sono tutti e soli i sottoinsiemi con un numero infinito di punti.

   Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con un numero infinito di punti, non è possibile che $S = A_1 \cup A_2$ con A_1 e A_2 aperti disgiunti in quanto in questa topologia gli aperti non vuoti sono complementari di insiemi finiti di punti e dunque due di essi si intersecheranno sempre; supponiamo quindi che $S = C_1 \cup C_2$ con C_1 e C_2 chiusi disgiunti. Osserviamo che nella topologia cofinita due chiusi sono insiemi finiti di punti e dunque non è possibile che la loro unione dia S che è un insieme infinito.
   Se, invece, S è un insieme con un numero finito di punti, $S := \{x_1, \dots, x_n : x_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}$ allora se prendiamo ad esempio $C_1 := \{x_1\}$ e $C_2 := \{x_2, \dots, x_n\}$ abbiamo che C_1 e C_2 sono due chiusi disgiunti e $S = C_1 \cup C_2$. Dunque S è sconnesso.

3. Siano $\mathcal{T}$ ed $\mathcal{U}$ sono due topologie su X con $\mathcal{T} < \mathcal{U}$ dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

   (i) $(X, \mathcal{T})$ connesso implica $(X, \mathcal{U})$ connesso;

   (ii) $(X, \mathcal{T})$ sconnesso implica $(X, \mathcal{U})$ sconnesso.

   Soluzione:

   (i) L'affermazione è falsa.
   Si consideri $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{E}$ e $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Si ha che $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ è connesso, mentre $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ è sconnesso (una sconnessione è data da qualsivoglia coppia di sottoinsiemi propri non vuoti e disgiunti).

   (ii) L'affermazione è vera.
   X è sconnesso rispetto a $\mathcal{T}$ quindi esistono $A, B \subset X$ aperti (chiusi), disgiunti e non vuoti tali che $X = A \cup B$. Ora siccome $\mathcal{T} < \mathcal{U}$, si ha che A e B sono aperti (chiusi) anche rispetto a $\mathcal{U}$ e rimangono disgiunti; dunque rappresentano una sconnessione di X rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.

4. Dimostrare che una funzione continua $f : X \to Y$, con $X \neq \emptyset$ connesso e Y discreto è costante.

   Soluzione:

   Essendo f continua e X connesso, $f(X)$ è connesso. Innanzitutto essendo $X \neq \emptyset$ si ha $f(X) \neq \emptyset$. Se per assurdo esistessero $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$ tali che $y_1, y_2 \in f(X)$ allora $f(X)$ sarebbe sconnesso poichè $\emptyset \subsetneq \{y_1\} \subsetneq f(X)$ sarebbe contemporaneamente aperto e chiuso in $f(X)$ ($f(X)$ eredita da Y la topologia discreta).

5. (a) Siano Y uno spazio topologico connesso ed $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tale che $f^{-1}(y)$ è connesso per ogni $y \in Y$. Se f è aperta oppure chiusa, allora anche X è connesso.

   (b) Utilizzare il risultato precedente per dimostrare che il prodotto di due spazi topologici connessi è connesso.

<u>*Soluzione*</u>:

   (a) Supponiamo che f sia aperta e siano A_1, A_2 due aperti non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$. Mostriamo che $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.
   Dalla suriettività di f segue che $Y = f(X) = f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, con $f(A_1), f(A_2)$ aperti in Y (essendo per ipotesi f aperta). Ma allora, dalla connessione di Y, esiste $y \in f(A_1) \cap f(A_2) \Rightarrow f^{-1}(y) \cap A_i \neq \varnothing$ per $i = 1, 2 \Rightarrow$ per $i = 1, 2$, $f^{-1}(y) \cap A_i$ sono aperti non vuoti in $f^{-1}(y)$ tali che $(f^{-1}(y) \cap A_1) \cup (f^{-1}(y) \cap A_2) = f^{-1}(y) \cap (A_1 \cup A_2) = f^{-1}(y) \cap X = f^{-1}(y)$; essendo $f^{-1}(y)$ connesso per ogni $y \in Y$, deve quindi essere $(f^{-1}(y) \cap A_1) \cap (f^{-1}(y) \cap A_2) = f^{-1}(y) \cap A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$. In particolare si avrà quindi $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.
   Se invece f è chiusa basta ripetere il ragionamento precedente con A_1 e A_2 chiusi.

   (b) Siano X e Y due spazi topologici connessi. Consideriamo la proiezione $p : X \times Y \to Y$. Per il risultato percedente basta dunque osservare che p è continua, suriettiva e aperta e che $f^{-1}(y) = X \times \{y\} \cong X$ è connesso $\forall\, y \in Y$.

6. (a) Siano X e Y spazi topologici e sia $f : X \to Y$ un omeomorfismo. Dimostrare che f manda componenti connese in componenti connesse. Dedurne che due spazi topologici omeomorfi hanno lo stesso numero di componenti connesse.

   (b) Sia X uno spazio topologico e sia E un sottoinsieme non vuoto di X. Verificare che, se E è connesso, aperto e chiuso, allora E è una componente connessa di X.

   (c) Sia $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$; dopo aver verificato che Y è connesso, dimostrare che Y non è omeomorfo alla retta euclidea $(\mathbb{R}, \varepsilon)$.

   (d) Dimostrare che il cilindro e il cono non sono omeomorfi.

   (e) Dire quali delle seguenti lettere sono tra loro omeomorfe (come figure piane): O, T, D, U, X, V.

<u>*Soluzione*</u>:

   (a) Sia $\mathcal{C}$ una componente connessa di X e sia $p \in \mathcal{C}$. Mostriamo che $f(\mathcal{C}) \subseteq Y$ è la componente connessa di $f(p)$.
   Innanzitutto essendo f continua e $\mathcal{C}$ connessa segue che $f(\mathcal{C})$ è connessa. Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme connesso $\mathcal{C}'$ di Y tale che $f(\mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{C}' \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}')$ è connesso e tale che, per la biunivocità di f, $\mathcal{C} \subsetneq f^{-1}(\mathcal{C}')$: assurdo. Ne segue che $f(\mathcal{C})$ è il più grande sottoinsieme connesso di Y contenente $f(p)$, ovvero la componente connessa di $f(p)$.

   Deduciamo da questo fatto che se indichiamo con n il numero di componenti connesse di X e con m il numero di componenti connesse di Y si ha $m \geq n$. In modo analogo, ragionando con f^{-1} troviamo che $n \geq m$, da cui l'uguaglianza.

   (b) Sia $x \in E$ e sia $\mathcal{C}_x$ la componente connessa di x. Poichè E è connesso segue che $E \subseteq \mathcal{C}_x$. Ma E è aperto e chiuso in X e conseguentemente in $\mathcal{C}_x$. Pertanto, essendo $\mathcal{C}_x$ connesso e $E \neq \varnothing$ si ha $E = \mathcal{C}_x$.

   (c) Y è unione dei due assi cartesiani $x = 0$ e $y = 0$; ciascun asse è connesso (in quanto omeomorfo ad $\mathbb{R}$) e i due assi si intersecano nel punto $\mathbf{0} := (0, 0)$. Ne segue che Y è connesso.
   Mostriamo che Y e $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi. Sia per assurdo $f : Y \to \mathbb{R}$ un omeomorfismo $\Rightarrow f|_{Y \setminus \{\mathbf{0}\}} : Y \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R} \setminus \{f(\mathbf{0})\}$ è un omeomorfismo, ma questo è un assurdo poichè $Y \setminus \{\mathbf{0}\}$ ha 4 componenti connesse, mentre $\mathbb{R} \setminus \{f(\mathbf{0})\}$ ne ha 2.

   Mostriamo che $Y \setminus \{\mathbf{0}\}$ ha 4 componenti connesse.
   Osserviamo che $Y \setminus \{\mathbf{0}\}$ è unione dei 4 insiemi:

$$A_1 = \{(x, 0) : x > 0\}, \quad A_2 = \{(0, y) : y > 0\}, \quad A_3 = \{(x, 0) : x < 0\}, \quad A_4 = \{(0, y) : y < 0\}.$$

   Tali insiemi sono omeomorfi a intervalli di $\mathbb{R}$ e dunque sono connessi.
   Per dimostrare che A_1, A_2, A_3, A_4 sono le 4 componenti connesse di $Y \setminus \{\mathbf{0}\}$ basterà verificare,

per quanto dimostrato nel punto precedente, che tali insiemi sono aperti e chiusi in $Y \setminus \{\mathbf{0}\}$. Infatti considerando l'aperto $B_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\}$ di $\mathbb{R}^2$, risulta $A_1 = Y \setminus \{\mathbf{0}\} \cap B_1 = Y \setminus \{\mathbf{0}\} \cap \overline{B_1}$. Dunque A_1 è aperto e chiuso in $Y \setminus \{\mathbf{0}\}$.
Analogamente si procede per A_2, A_3, A_4.

(d) Possiamo assumere, a meno di omeomorfismi, che $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ sia il cilidro e che $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ sia il cono. Supponiamo per assurdo che $f : Y \to X$ sia un omeomorfismo; sia $\mathbf{0} := (0, 0, 0) \Rightarrow f|_{Y \setminus \{\mathbf{0}\}} : Y \setminus \{\mathbf{0}\} \to X \setminus \{f(\mathbf{0})\}$ è un omeomorfismo, ma questo è un assurdo poichè $Y \setminus \{\mathbf{0}\}$ ha 2 componenti connesse, mentre $X \setminus \{f(\mathbf{0})\}$ è connesso.

(e) Ragionando in modo analogo agli esempi precedenti si trova che le classi di omeomorfismi delle lettere indicate sono:
$$\{O, D\}, \{U, V\}, \{X\}, \{T\}.$$

7. Determinare un rappresentante per ogni classe di omeomorfismo di intervalli di $\mathbb{R}$.

<u>*Soluzione:*</u>
I possibili tipi di intervalli di $\mathbb{R}$ sono :
$$[a_1, b_1] \quad (a_2, b_2) \quad [a_3, b_3) \quad (a_4, b_4] \qquad \text{con } a_i, b_i \in \mathbb{R} \text{ e } a_i < b_i$$
Osserviamo per prima cosa che $[a_3, b_3)$ e $(a_4, b_4]$ sono omeomorfi, infatti basta prendere come omeomorfismo $f : [a_3, b_3) \to (a_4, b_4]$ con $f(x) = b_4 + \frac{a_4 - b_4}{b_3 - a_3}(x - a_3)$.

Gli intervalli $[a_1, b_1]$ e (a_2, b_2) non sono omeomorfi in quanto $[a_1, b_1]$ è compatto mentre (a_2, b_2) non lo è.

Per far vedere che $[a_1, b_1]$ non è omeomorfo a $[a_3, b_3) \approx (a_4, b_4]$ e che (a_2, b_2) non è omeomorfo a $[a_3, b_3) \approx (a_4, b_4]$ utilizziamo la connessione.
Supponiamo per assurdo che $[a_1, b_1]$ sia omeomorfo a $[a_3, b_3)$ allora preso un omeomorfismo $g : [a_1, b_1] \to [a_3, b_3)$ abbiamo che g ristretto a $[a_1, b_1] \setminus \{p\}$ induce un omeomorfismo tra $[a_1, b_1] \setminus \{p\}$ e $[a_3, b_3) \setminus \{g(p)\}$. Se $g(b_1) = c$ e $a_3 < c < b_3$ allora $[a_1, b_1] \setminus \{b_1\}$ è connesso, mentre $[a_3, b_3) \setminus \{c\}$ non lo è. Se, invece, $g(b_1) = a_3$ allora $g(a_1) \neq a_3$ e possiamo considerare la restrizione di g a $[a_1, b_1] \setminus \{a_1\}$. In questo caso avremo che $[a_1, b_1] \setminus \{a_1\}$ è connesso mentre $[a_3, b_3) \setminus \{g(a_1)\} \neq (a_3, b_3)$ non lo è.

Infine, per dimostrare che $[a_3, b_3)$ non è omeomorfo a (a_2, b_2) si procede come nel caso precedente.