Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Tutorato 6 (15 Aprile 2013)
Compattezza

1. Dimostrare che il prodotto di spazi T_1 (risp. T_2) è uno spazio T_1 (risp. T_2).

   Soluzione:

   Siano X e Y due spazi topologici T_1 e si consideri in $X \times Y$ il punto (x, y). Per dimostrare che (x, y) è chiuso utilizzeremo le due proiezioni π_X e π_Y ricordando che sono applicazioni suriettive e continue e che $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi(x, y) = x$, mentre $\pi_Y : X \times Y \to Y$ e $\pi(x, y) = y$. Abbiamo che $(x, y) = \pi_X^{-1}(x) \cap \pi_Y^{-1}(y)$ è chiuso in quanto intersezione finita di chiusi; infatti, $x \in X$ e $y \in Y$ sono chiusi perché X e Y sono spazi T_1 e la preimmagine di un chiuso attraverso un'applicazione continua è ancora un chiuso.

   Siano X e Y due spazi topologici T_2 e si consideri la coppia di punti (x, y), (x', y') con $(x, y) \neq (x', y')$ allora $x \neq x'$ e/o $y \neq y'$. Supponiamo senza perdita di generalità $x \neq x'$. Poiché X è di Hausdorff, esiste un coppia di intorni U e U' rispettivamente di x e x' tali che $U \cap U' = \emptyset$. Considerando quindi gli aperti $U \times Y$ e $U' \times Y$ di $X \times Y$ si ha che $(x, y) \in U \times Y$, $(x', y') \in U' \times Y$ e $(U \times Y) \cap (U' \times Y) = \emptyset$. Infatti, se per assurdo esistessero $a \in X$ e $b \in Y$ tali che $(a, b) \in (U \times Y) \cap (U' \times Y)$ allora $a \in U \cap U' = \emptyset$.

2. Dimostrare che la compattezza è una proprietà topologica.

   Soluzione:

   Una proprietà si dice topologica se è invariante tramite omeomorfismo, cioè se dato $f : X \to Y$ omeomorfismo X è compatto se e solo se Y lo è. Poiché l'inverso di un omeomorfismo è ancora un omeomorfismo sarà sufficiente provare che se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo e X è compatto allora Y è compatto. Il viceversa seguirà considerando $f^{-1} : Y \to X$.
   Sia quindi $f : X \to Y$ un omeomorfismo con X compatto. Consideriamo un ricoprimento aperto $\{Y_i\}_{i \in I}$ di Y. Abbiamo che $\bigcup Y_i = Y$, ma allora $f^{-1}(\bigcup Y_i) = f^{-1}(Y) = X$ quindi $\bigcup f^{-1}(Y_i) = f^{-1}(\bigcup Y_i) = X$ è un ricoprimento aperto di X. Sappiamo che X è compatto quindi da ogni ricoprimento aperto possiamo estrarre un sottoricoprimento finito quindi esistono $Y_{i_1}, ..., Y_{i_n}$ tali che $X = f^{-1}(Y_{i_1}) \cup ... \cup f^{-1}Y_{i_n}$ e, applicando f, otteniamo $Y = f(X) = Y_{i_1} \cup ... \cup Y_{i_n}$.

3. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^n$, si stabilisca quali di essi sono compatti e in caso contrario si esibisca un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimento finito.

   (i) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$;
   (ii) $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j \text{ fissato}\}$;
   (iii) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 3, 4 \leq z \leq 5\}$.

   Soluzione:

   (i) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ non è compatto in $\mathbb{R}^n$ in quanto non è limitato. Se identifichiamo $\mathbb{R}$ con un asse coordinato, un ricoprimento aperto da cui non si può estrarre un sottoricoprimento finito è $\{D_n(\underline{0}) \cap \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.
   (ii) $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0, x_j \geq 0 \text{ con } i \text{ e } j \text{ fissati e } i \neq j\}$ non è compatto perché non è limitato. Un ricoprimento aperto dal quale non sia possibile estrarre un sottoricoprimento finito è $\{D_n(\underline{0}) \cap S\}_{n \in \mathbb{N}}$.
   (iii) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 3, 4 \leq z \leq 5\}$ è compatto perché chiuso e limitato.

4. Si dimostri che $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ non è compatto. Fissati a piacere $a, b \in \mathbb{R}$ si trovi una successione che non ammette estratta convergente in $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.

Soluzione:

Procediamo dimostrando che $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ non è chiuso. Consideriamo il complementare $(-\infty,a)\cup(b,\infty)\cup\{\mathbb{Q}^c\cap[a,b]\}$ e un punto $x\in\{\mathbb{Q}^c\cap[a,b]\}$. Per la densità dei razionali nei reali e quindi in $[a,b]$, abbiamo che non esiste un aperto contenente x e tutto contenuto in $\{\mathbb{Q}^c\cap[a,b]\}$ dunque $(-\infty,a)\cup(b,\infty)\cup\{\mathbb{Q}^c\cap[a,b]\}$ non è aperto.
Basta prendere $[1,3]\cap\mathbb{Q}$ e la successione $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, essa è ovviamente contenuta in $[1,3]\cap\mathbb{Q}$ e inoltre in $\mathbb{R}$ converge a e e quindi anche tutte le sue sottosuccessioni convergono a e, dunque non ammette estratta convergente a un punto di $[1,3]\cap\mathbb{Q}$.

5. Si dia un esempio di

   (i) uno spazio topologico X compatto e un suo sottoinsieme L compatto e non chiuso;

   (ii) uno spazio topologico Y di Hausdorff e un suo sottoinsieme T chiuso e non compatto.

   Soluzione:

   (i) E' sufficiente considerare un qualsiasi spazio X finito e un suo sottoinsieme non chiuso.

   (ii) Si può considerare in $\mathbb{R}$ il sottospazio $[a,+\infty)$ che è chiuso ma non limitato e dunque non compatto.

6. Si dimostri che un'applicazione continua di spazi topologici manda compatti in compatti e si utilizzi tale risultato per provare le seguenti affermazioni.

   (i) Il quoziente di uno spazio topologico compatto è compatto.

   (ii) Data $f:X\to Y$ continua, X compatto, Y Haudsorff, f è chiusa.

   Soluzione:

   Sia $f:X\to Y$ un'applicazione continua, dimostriamo che X compatto implica $f(X)$ compatto. Sia $\{B_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$ allora per ogni j si ha $B_j=A_j\cap f(X)$ con A_j aperti di Y e, per la continuità di f, gli insiemi $U_j=f^{-1}(A_j)=f^{-1}(B_j)$ sono aperti di X. Per ogni $x\in X$ esiste B_j tale che $f(x)\in B_j$ e quindi $x\in U_j=f^{-1}(A_j)=f^{-1}(B_j)$. Dunque $\{U_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento aperto di X. Per indici $j_1,...,j_n\in J$ si deve avere allora $X=U_{j1}\cup...\cup U_{jn}=f^{-1}(B_{j1})\cup...\cup f^{-1}(B_{jn})$ e pertanto, applicando f segue che $f(X)=B_{j1}\cup...\cup B_{jn}$ da cui discende la compattezza di $f(X)$.

   (i) Deriva dal fatto che la proiezione al quoziente è un'applicazione continua e suriettiva.

   (ii) Sia C chiuso in X allora $f(C)$ è chiuso se e solo se $f(C)^c$ è aperto. Prendiamo $y\in f(C)^c$ cioè $y\neq f(x)\ \forall x\in C$, poiché Y è T_2 esistono due aperti U_x e V_x con $y\in U_x$ e $f(x)\in V_x$ per ogni x fissato in X tali che $U_x\cap V_x=\emptyset$. Si consideri il ricoprimento di $f(C)$ fatto da $\{V_x: x\in C\}$, poiché $f(C)$ è compatto esistono $V_{x_1},...,V_{x_n}$ che costituiscono un sottoricoprimento aperto. Allora posto $A:=U_{x_1}\cap\ldots\cap U_{x_n}$ si ha che A è un intorno aperto di y che soddisfa $\emptyset=[V_{x_1}\cup...\cup V_{x_n}]\cap A=f(C)\cap A$ e dunque è tutto contenuto in $f(C)^c$, il che dimostra che $f(C)^c$ è aperto.

7. Date due topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{W}$ su X con $\mathcal{W}<\mathcal{T}$ dire quali delle seguenti affermazioni è vera, motivando la risposta:

   (a) se $(X,\mathcal{T})$ è compatto $\Rightarrow(X,\mathcal{W})$ è compatto;

   (b) se $(X,\mathcal{W})$ è compatto $\Rightarrow(X,\mathcal{T})$ è compatto.

   Soluzione:

   (a) L'affermazione è vera.
   Supponiamo $(X,\mathcal{T})$ compatto.
   Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento di X costituito da insiemi aperti in $(X,\mathcal{W})$; in particolare, essendo $\mathcal{T}$ più fine di $\mathcal{W}$, $\{A_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento di X costituito da insiemi aperti, rispetto a $\mathcal{T}$.
   Dall'ipotesi di compattezza, possiamo estrarre da $\{A_i\}_{i\in I}$ un sottoricoprimento finito, (aperto rispetto a $\mathcal{T}$). In particolare, esso sarà aperto in $\mathcal{W}$.

   (b) L'affermazione è falsa.
   Un controesempio è dato da uno spazio topologico X infinito dotato rispettivamente della topologia discreta $\mathcal{T}$ e di quella cofinita $\mathcal{W}$ $(\mathcal{W}<\mathcal{T})$.
   Dalla teoria sappiamo che $(X,\mathcal{W})$ è compatto mentre $(X,\mathcal{T})$ non lo è perché il ricoprimento aperto $\{\{x\},x\in X\}$ non ammette un sottoricoprimento finito.

8. Si considerino S^1 dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^2$ e la successione $x_n = (\cos(\frac{n\pi}{3}), sin(\frac{n\pi}{3}))$ con $n \in \mathbb{N}$. Si stabilisca se x_n converge e, in caso contrario, si esibisca una sottosuccessione convergente.

   Soluzione:

   Notiamo che la successione non converge, ma essendo S^1 compatto possiamo trovare una sottosuccessione convergente, infatti basta prendere $n_k = 6k$ e quindi $x_{n_k} = (\cos(2k\pi), sin(k2\pi)) = (1, 0)$. La sottosuccessione x_{n_k} è costante quindi convergente.