Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Tutorato 3 (11 Marzo 2013)
Topologia discreta, Omeomorfismi & Topologia prodotto

1. Esibire una topologia su $X = \{1, 2, 3, 4\}$ che non sia né banale né discreta.

   <u>*Soluzione:*</u>

   Una possibile topologia è data da $\mathcal{T} := \{\emptyset, X, \{1\}\}$. Infatti: $\{1\} \cap X = \{1\} \in \mathcal{T}$, $\{1\} \cup X = X \in \mathcal{T}$, $\{1\} \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{T}$ e $\{1\} \cup \emptyset = \{1\}$.

2. Si dia la definizione di sottoinsieme discreto di uno spazio topologico X. Si dimostri che:

   $$A \subset X \text{ è discreto } \Leftrightarrow \text{ per ogni } x \in A\ \exists\, U \text{ intorno aperto in } X \text{ tale che } U \cap A = \{x\}$$

   <u>*Soluzione:*</u>

   Un sottoinsieme S di uno spazio topologico X si dice discreto se la topologia indotta da X su S è discreta.

   Dimostriamo ora l'equivalenza tra le due asserzioni.

   $\Rightarrow$) Se $A \subset X$ è discreto, allora $\mathcal{T}_A = \mathcal{P}(A)$. Segue che i punti x di A sono aperti di $\mathcal{T}_A$. Quindi esiste un aperto B di X tale che $\{x\} = B \cap A$ e basterà prendere $U = B$.

   $\Leftarrow$) Se per ogni $x \in A$ esiste un intorno aperto in X tale che $U \cap A = \{x\}$, allora i punti di A sono aperti della topologia indotta da X su A. Poiché ogni sottoinsieme si può sempre scrivere come unione dei suoi punti, segue che ogni sottoinsieme di A è unione di aperti e che quindi è un aperto.

3. Si dimostri che ogni sottoinsieme finito di uno spazio metrizzabile è discreto.
   Si dia un esempio di un insieme A di $\mathbb{R}$ infinito, limitato e discreto.
   Si dia un esempio di un sottoinsieme finito E di uno spazio X che non sia discreto.

   <u>*Soluzione:*</u>

   Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio metrizzabile e sia $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un suo sottoinsieme finito. Posto $r := \min\{d(x_i, x_j) : 1 \leq i, j \leq n\}$, si ha $\{x_i\} = D_r(x_i) \cap F$, da cui segue l'asserto.
   Basta scegliere $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^{>0}\} \subset [0, 1]$; infatti: $\forall n \in \mathbb{N}^{>0}$ si ha $\{1/n\} = D_{\frac{1}{n(n+1)}}(1/n) \cap A$.
   Si consideri $\mathbb{R}$ dotato della topologia i_s e il sottoinsieme $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Si ha che i punti 2, 3 e 4 non sono aperti rispetto alla topologia indotta da $\mathbb{R}$ su S perché intersecando S con un aperto della forma $(-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$ si ottiene un sottoinsieme di S contenente i punti minori di a.

4. Dimostrare che un sottospazio topologico di uno spazio soddisfacente il primo (*risp.* il secondo) assioma di numerabilità soddisfa anch'esso il primo (*risp.* il secondo) assioma di numerabilità.

   <u>*Soluzione:*</u>

   X spazio topologico soddisfa il primo assioma di numerabilità se per ogni $x \in X$ esiste un sistema fondamentale di intorni numerabile.
   X spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità se esiste una base numerabile.

   Dato Y sottospazio di X ricordiamo che la topologia di Y è la topologia indotta cioè U è aperto in $Y \Leftrightarrow \exists V$ aperto in X tale che $U = V \cap X$. Sia ora $y \in Y$, per ipotesi esiste per y un sistema fondamentale di intorni numerabile $\mathcal{N}$ in X, dunque $\mathcal{N} \cap Y$ è numerabile ed inoltre è un sistema fondamentale di intorni di y in Y, infatti preso un intorno $\overline{U}$ di y in Y si ha che esso è un intorno di y anche in X dunque esiste un $B \in \mathcal{N}$ tale che $\overline{U} \subset B$,ma allora $\overline{U} \subset B \cap Y \in \mathcal{N} \cap Y$.
   Allo stesso modo si ha che data $\mathcal{B}$ base numerabile per X allora $\mathcal{B} \cap Y$ è una base numerabile di Y.

5. Su $\mathbb{R}$ si considerino le topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ aventi per base $\mathcal{B}_1 = \{[a,b) : \ a < b \text{ e } a,b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(a,b] : \ a < b \text{ e } a,b \in \mathbb{R}\}$ rispettivamente. Determinare la topologia $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ e la topologia generata da $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

   Soluzione:

   Si ha che la topologia $T_1 \cap T_2$ ha come base gli aperti (a,b) con $a < b$ e $a,b \in \mathbb{R}$ dunque è la topologia euclidea, d'altra parte la topologia generata da $T_1 \cup T_2$ ha come basi di aperti $\{(a,b),[a,b],(a,b],[a,b) \ : \ a < b \text{ e } a,b \in \mathbb{R}\}$ quindi è la topologia discreta, infatti si noti che $(a,c] \cap [c,b) = \{c\}$ (con $a < c < b$) cioè tutti i punti sono aperti.

6. Dimostrare che i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi:

   - $X = \{(x,y) \ : \ y = 0\}$;
   - $Y = \{(x,y) \ : \ x - y = 0\}$;
   - $Z = \{(x,y) \ : \ x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad xy = 0\}$.

   Soluzione:

   Ricordiamo la seguente proposizione:

   Siano $\mathcal{F}$ un ricoprimento dello spazio topologico X, $\{f_{\mathcal{F}} : F \to Y\}_{F\in\mathcal{F}}$ una famiglia di applicazioni continue a valori in uno spazio topologico Y tali che $(f_{F_1})_{F_1\cap F_2} = (f_{F_2})_{F_1\cap F_2} \ \ \forall F_1, \ F_2 \in \mathcal{F}$ e sia $f : X \to Y$ l'incollamento delle $\{f_F\}$. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia finita di chiusi allora f è continua

   Notiamo che l'omeomorfismo gode della proprietà transitiva e dunque, se Z è omeomorfo a X e X è omeomorfo a Y allora Z è omeomorfo a Y. Per risolvere l'esercizio basta quindi trovare due omeomorfismi f, g tali che $f : X \to Y$ e $g : Z \to X$:

   - $f : X \longrightarrow Y$ con $f(x,y) = (x,x)$. Si vede subito che f è continua, iniettiva e suriettiva ed inoltre è aperta; dunque è un omeomorfismo.
   - $g : Z \longrightarrow X$ con $g(x,y) = \begin{cases} g_1(x,y) = (x,y) & \text{se } x \geq 0 \\ g_2(x,y) = (-y,0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$
     Si vede subito che g_1 ristretto a $G_1 = \{(x,0) : x \geq 0\}$ e g_2 ristretto a $G_2 = \{(0,y) : y \geq 0\}$ sono omeomorfismi quindi resta da vedere che g è un omeomorfismo. L'iniettività e la suriettività sono immediate, mentre per la continuità di g applichiamo la proposizone. Poiché g è l'incollamento di g_1 e g_2 basta che siano soddisfatte le ipotesi della proposizione, ma questo si verifica immediatamente perchè nell'intersezione $G_1 \cap G_2 = \{(0,0)\}$, $g_1(0,0) = g_2(0,0) = (0,0)$ ed inoltre G_1 e G_2 sono chiusi. Analogamente si dimostra la continuità di g^{-1}.

7. Descrivere un omeomorfismo tra : $\Sigma_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0\}$ e $\Sigma_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 0\}$.

   Soluzione:

   Si consideri l'applicazione $f : \Sigma_+ \to \Sigma_-$ con $f(x,y) = (x,-y)$, si vede immediatamente che f è continua, iniettiva e suriettiva; inoltre è un'applicazione aperta e dunque è un omeomorfismo.

8. (a) Costruire esplicitamente un omeomorfismo tra due segmenti chiusi e limitati X ed Y assegnati in $\mathbb{R}^2$.

   (b) Assegnate le poligonali di vertici rispettivamente $P_1(1,3), P_2(3,1), P_3(5,1), P_4(5,4)$ e $Q_1(0,0)$, $Q_2(3,2), Q_3(5,2), Q_4(3,0)$, costruire un omeomorfismo tra $\prod(P_1,P_2,P_3,P_4)$ e $\prod(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$.

   (c) Assegnate le poligonali di vertici rispettivamente $P_1(1,3), P_2(3,1), P_3(5,1)$ e $Q_1(0,0), Q_2(3,2)$, $Q_3(5,2), Q_4(3,0)$, costruire un omeomorfismo tra $\prod(P_1,P_2,P_3)$ e $\prod(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$.

   Soluzione:

   (a) Siano X e Y due segmenti in $\mathbb{R}^2$ rispettivamente di estremi $P_1 = (a_1,b_1)$, $P_2 = (a_2,b_2)$ e $Q_1 = (c_1,d_1)$ e $Q_2 = (c_2,d_2)$.

   Allora $X = \{(a_1(1-t) + a_2t, b_1(1-t) + b_2t) : \ t \in [0,1])\}$ e
   $Y = \{(c_1(1-t) + c_2t, d_1(1-t) + d_2t) : \ t \in [0,1])\}$.

Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita nel modo seguente:

$$f(x,y) = \left(c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}(x - a_1), d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b_2 - b_1}(y - b_1)\right)$$

(ottenuta dall'applicazione generica $f(x,y) = (p + qx, r + sy)$ imponendo che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 1, 2$).

f è chiaramente continua. Inoltre osserviamo che $f(X) = Y$; infatti:

$f(X) = f(\{(a_1(1-t) + a_2t, b_1(1-t) + b_2t) : t \in [0,1]\}) =$
$= \{(c_1 + \frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}(a_1(1-t) + a_2t - a_1), d_1 + \frac{d_2-d_1}{b_2-b_1}(b_1(1-t) + b_2t - b_1)) : t \in [0,1]\} =$
$\{(c_1(1-t) + c_2t, d_1(1-t) + d_2t : t \in [0,1]\} = Y$

Mostriamo dunque che $f|_X : X \to Y$ è un omeomorfismo:

- suriettività: abbiamo infatti visto che $f(X) = Y$;

- iniettività: supponiamo che esistano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tali che $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Allora si ha:

$$\begin{cases} c_1 + \frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}(x_1 - a_1) = c_1 + \frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}(x_2 - a_1) \\ d_1 + \frac{d_2-d_1}{b_2-b_1}(y_1 - b_1) = d_1 + \frac{d_2-d_1}{b_2-b_1}(y_2 - b_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}(x_1 - a_1) = \frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}(x_2 - a_1) \\ \frac{d_2-d_1}{b_2-b_1}(y_1 - b_1) = \frac{d_2-d_1}{b_2-b_1}(y_2 - b_1) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - a_1 = x_2 - a_1 \\ y_1 - b_1 = y_2 - b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$

- continuità: $f|_X$ è restrizione dell'applicazione continua f;

- continuità dell'inversa: si verifica facilmente che $f|_X^{-1} : Y \to X$ ha la forma seguente:

$$f|_X{}^{-1}(x,y) = \left(a_1 + \frac{a_2 - a_1}{c_2 - c_1}(x - c_1), b_1 + \frac{b_2 - b_1}{d_2 - d_1}(y - d_1)\right)$$

  e pertanto è continua.

(b) Siano X_1, X_2, X_3 i segmenti in $\mathbb{R}^2$ rispettivamente di estremi P_1 e P_2, P_2 e P_3, P_3 e P_4 e Y_1, Y_2, Y_3 i segmenti in $\mathbb{R}^2$ rispettivamente di estremi Q_1 e Q_2, Q_2 e Q_3, Q_3 e Q_4.

Siano dunque $f_i : X_i \to Y_i$, con $i = 1, 2, 3$ gli omeomorfismi costruiti come nel punto (a).
Si ha: $f_i|_{X_i \cap X_{i+1}} = f_i|_{P_{i+1}} = f_{i+1}|_{P_{i+1}} = f_{i+1}|_{X_i \cap X_{i+1}}$, $\forall i \in \{1, 2\}$ (poichè $f_i(P_{i+1}) = Q_{i+1} = f_{i+1}(P_{i+1})$.

E' allora possibile definire l'incollamento delle applicazioni $\{f_1, f_2, f_3\}$ come l'applicazione $f : \prod(P_1, P_2, P_3, P_4) \to \prod(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ data da:

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{se } x \in X_i$$

f risulterà inoltre un'omeomorfismo in quanto incollamento di omeomorfismi.

(c) Si procede analogamente al punto (b), suddividendo ad esempio il segmento di estremi P_2, P_3 in due segmenti (si può scegliere $P_4 = (4, 1) \in \overline{P_2P_3}$) e denotando con X_1, X_2, X_3 rispettivamente i segmenti di estremi P_1 e P_2, P_2 e P_4, P_4 e P_3.

9. Dimostrare che se X è un insieme infinito con la topologia cofinita ogni aperto non vuoto è denso.

<u>*Soluzione*</u>:
Per assurdo, supponiamo che esista un aperto $A \subsetneq X$, $A \neq \varnothing$ tale che $\overline{A} = C \subsetneq X$.
Allora, dalla definizione di topologia cofinita, essendo C un chiuso proprio di X, segue che $C = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \in X\, \forall i = 1, \dots, n$. Inoltre, poichè A è un aperto non vuoto, $A = X \backslash \{y_1, \dots, y_m\}$, $y_j \in X$ $\forall j = 1, \dots, m$; in particolare A è infinito (poichè X è infinito per ipotesi).
Ciò contraddice il fatto che $A \subseteq C \subsetneq X$, in quanto un insieme infinito non può essere contenuto in un insieme finito.

10. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ ed $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici e sia $\mathcal{T}_{X\times Y}$ la topologia prodotto su $X\times Y$. Verificare:

   (a) $\mathcal{T}_{X\times Y}$ è la topologia discreta $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_X$ ed $\mathcal{T}_Y$ sono rispettivamente la topologia discreta su X e su Y;

   (b) $\mathcal{T}_{X\times Y}$ è la topologia banale $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_X$ ed $\mathcal{T}_Y$ sono rispettivamente la topologia banale su X e su Y.

   <u>Soluzione</u>:

   (a) $\Rightarrow$: Sia $\mathcal{T}_{X\times Y}$ la topologia discreta su $X\times Y$. Mostriamo che ogni sottoinsieme di X è aperto in X.
   Sia dunque $A\subseteq X \Rightarrow A\times Y$ è aperto in $\mathcal{T}_{X\times Y}$.
   Consideriamo $\pi_X : X\times Y \to X$, la proiezione su X; ricordando che π_X è un'applicazione aperta si ha che $A = \pi_X(A\times Y)$ è aperto in X.
   Ne segue che $\mathcal{T}_X$ è la topologia discreta su X.
   Si dimostra, in modo analogo, che $\mathcal{T}_Y$ è la topologia discreta su Y.

   $\Leftarrow$: Siano $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{T}_Y$ rispettivamente la topologia discreta su X e su Y.
   Basterà verificare che $\forall\,(x,y)\in X\times Y$, $\{(x,y)\}\in\mathcal{T}_{X\times Y}$.
   Infatti $\{(x,y)\} = \{x\}\times\{y\}\in\mathcal{T}_X\cdot\mathcal{T}_Y\subseteq\mathcal{T}_{X\times Y}$.

   (b) $\Rightarrow$: Sia $T_{X\times Y}$ la topologia banale su $X\times Y$ ($T_{X\times Y} = \{\varnothing, X\times Y\}$) e sia $A\in\mathcal{T}_X \Rightarrow A\times Y\in\mathcal{T}_{X\times Y}\Rightarrow A=\varnothing$ o $A = X\Rightarrow\mathcal{T}_X = \{\varnothing, X\}$.
   Analogamente si dimostra che $\mathcal{T}_Y$ è la topologia banale su Y.

   $\Leftarrow$: Per ipotesi $\mathcal{T}_X = \{\varnothing, X\}$ e $\mathcal{T}_Y = \{\varnothing, Y\}$.
   Sappiamo che $\mathcal{T}_{X\times Y}$ ha come base $\mathcal{T}_X\cdot\mathcal{T}_Y = \{\varnothing, X\times Y\}\Rightarrow T_{X\times Y} = \{\varnothing, X\times Y\}$ è la topologia banale su $X\times Y$.

11. Sia K un campo, $n\geq 1$ e $X_1,\ldots,X_n$ indeterminate. Sia $K[X_1,\ldots,X_n]$ l'anello dei polinomi in $X_1,\ldots,X_n$ a coefficienti in K.
   Dato $S\subseteq K[X_1,\ldots,X_n]$ un sottoinsieme di polinomi, definiamo:

   $$V(S) : \{\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)\in K^n : f(\mathbf{a}) = 0\,\forall\, f\in S\}.$$

   Dimostrare che:

   (a) $V(S) = V((S))$, dove $(S) := \{p_1f_1+\cdots+p_hf_h : f_1,\ldots,f_h\in S, p_1,\ldots,p_h\in K[X_1,\ldots,X_n]\}$;

   (b) su K^n si può definire una topologia $\mathcal{Z}$, detta topologia di Zariski, che ha come insiemi chiusi la classe $\mathcal{C}$ definita come segue:

   $$\mathcal{C} := \{V(S) :\ \forall\, S\subseteq K[X_1,\ldots,X_n]\};$$

   (c) i punti sono chiusi in $(K^n,\mathcal{Z})$;

   (d) se $n=1$, $\mathcal{Z}$ coincide con la topologia cofinita.

   <u>Soluzione</u>:

   (a) Sia $S = \{f_i,\, i\in I\}$. Dimostriamo l'uguaglianza per doppio contenimento:

   $\subseteq$: Sia $\mathbf{a}\in V(S)\Rightarrow f_i(\mathbf{a}) = 0\quad\forall\, i\in I$. Sia $g\in(S)\Rightarrow g = p_1f_1+\cdots+p_hf_h$, $f_i\in S$ e $p_i\in K[X_1,\ldots,X_n]$, $\forall\, i = 1,\ldots,h$. Si ha:

   $$g(\mathbf{a}) = p_1(\mathbf{a})f_1(\mathbf{a})+\cdots+p_h(\mathbf{a})f_h(\mathbf{a}) = p_1(\mathbf{a})\cdot 0+\cdots+p_h(\mathbf{a})\cdot 0 = 0$$

   Dall'arbitrarietà di g segue che $\mathbf{a}\in V((S))$.

   $\supseteq$: E' semplice verificare che, dati S, T sottoinsiemi di $K[X_1,\ldots,X_n]$, se $S\subseteq T$ allora $V(S)\supseteq V(T)$.
   Nel nostro caso abbiamo $S\subseteq(S)$; segue quindi che $V(S)\supseteq V((S))$.

   (b) Dimostriamo che $\mathcal{Z}$ è una topologia.

- $\{\varnothing\}$ e K^n sono chiusi :

  E' facile verificare che $K^n = V(0)$ e $\{\varnothing\} = V(1)$.

- L'intersezione di una famiglia qualsiasi di chiusi è un chiuso:
  Per dimostrare l'asserto basterà verificare la seguente proprietà:

$$\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i),\ S_i = \{f_{i,j},\ j \in J_i\}$$

  $\mathbf{a} \in \bigcap_{i \in I} V(S_i) \Leftrightarrow \mathbf{a} \in V(S_i)\, \forall\, i \in I \Leftrightarrow f_{i,j}(\mathbf{a}) = 0,\ \forall\, j \in J_i,\ \forall\, i \in I \Leftrightarrow \mathbf{a} \in V(\bigcup_{i \in I} S_i)$.

- L'unione finita di chiusi è un chiuso:
  Dimostriamo, per doppio contenimento, che $\forall S_1, S_2 \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ vale la seguente proprietà:

$$V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 \cdot S_2), \quad S_1 \cdot S_2 = \{f \cdot g : f \in S_1, g \in S_2\}$$

  $\subseteq$: Sia $\mathbf{a} \in V(S_1) \cup V(S_2) \Rightarrow \mathbf{a} \in V(S_1)$ oppure $\mathbf{a} \in V(S_2)$.
  Supponiamo che $\mathbf{a} \in V(S_1) \Rightarrow f(\mathbf{a}) = 0,\ \forall\, f \in S_1$. Considerando allora $f \cdot g \in S_1 \cdot S_2$ con $f \in S_1$ e $g \in S_2$, si ha:
  $f \cdot g(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}) = 0 \cdot g(\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \in V(S_1 \cdot S_2)$;

  $\supseteq$: Sia, ora, $\mathbf{a} \in V(S_1 \cdot S_2) \Rightarrow f(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) = 0 \quad \forall\, f \in S_1$ e $g \in S_2$.
  Supponiamo che $\mathbf{a} \notin V(S_1) \Rightarrow \quad \exists\, \tilde{f} \in S_1$ tale che $\tilde{f}(\mathbf{a}) \neq 0$.
  Ma, per ipotesi, $\tilde{f}(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) = 0 \quad \forall g \in S_2 \Rightarrow g(\mathbf{a}) = 0\, \forall\, g \in S_2 \Rightarrow \mathbf{a} \in V(S_2) \Rightarrow \mathbf{a} \in V(S_1) \cup V(S_2)$.

(c) Sia $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$; scelto $S = \{X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n\}$ è facile verificare che $V(S) = \{(a_1, \ldots, a_n)\} \Rightarrow \mathbf{a}$ è un chiuso rispetto a $\mathcal{Z}$.

(d) Sia $n = 1$; mostriamo che i chiusi, fatta eccezione per K^n, hanno cardinalità finita. Sia C un chiuso di $\mathcal{Z}$; allora C è della forma: $C = V(f_i,\ i \in I)$. Scelto un qualsiasi $\bar{i} \in I$, si ha:

$C = V(f_i,\ i \in I) \subseteq V(f_{\bar{i}})$ da cui $\#C \leq \#V(f_{\bar{i}}) \leq \partial(f_{\bar{i}})$ (per il teorema fondamentale dell'algebra). Ne segue che C ha cardinalità finita.

12. Sia (X, d) uno spazio topologico discreto e $\{x_n\}$ una successione in X. Verificare che $\{x_n\}$ converge in $X \Leftrightarrow \{x_n\}$ è definitivamente costante.

<u>*Soluzione*</u>:

Ricordiamo che:
x_n converge a $x \in X \Leftrightarrow \forall U \subset X$ intorno di $x, \exists\, \overline{n}$ tale che $x_n \in U\ \forall n \geq \overline{n}$.
D'altra parte nella topologia discreta un intorno di x è proprio $\{x\}$ quindi se x_n converge a x, esiste $\overline{n}$ tale che $x_n \in \{x\}\ \forall n \geq \overline{n}$ allora $x_n = x$ definitivamente. Se viceversa la successione è definitivamente costante, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$, $x_n = x \in X$. Allora la successione convergerà a x poiché per ogni intorno U di x si ha che $x_n = x \in U$ se $n > N$.