Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Tutorato 2 (4 Marzo 2013)
Successioni convergenti, applicazioni continue e sottospazi

1. Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$. Dire quale dei seguenti sottoinsiemi sono chiusi in X con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

   $A = \{(x,y) : xy = 1, x > 0\}$;
   $B = \{(\frac{1}{n}, 1) : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$;
   $C = \{(x,y) : x + y = 1, x > 0, y > 0\}$;
   $D = \{(1, \frac{1}{n}) : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$.

   Soluzione:

   A : A è chiuso in X. Infatti $A = A_1 \cap X$, dove $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Vediamo che A_1 è chiuso in $\mathbb{R}^2$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$; f è continua. Ne segue che $A_1 = f^{-1}(1)$ è chiuso in quanto controimmagine di un chiuso ($\{1\}$) tramite un'applicazione continua.

   B : B non è chiuso in X. Infatti, se per assurdo lo fosse si avrebbe $B = B_1 \cap X$ con B_1 chiuso in $\mathbb{R}^2$; ma allora $B \subseteq B_1 \Rightarrow B \cup D(B) = \overline{B} \subseteq B_1$ (indichiamo con $\overline{B}$ la chiusura in $\mathbb{R}^2$) $\Rightarrow B \cup \{(0,1)\} \subseteq B_1 \Rightarrow B_1 \cap X \supseteq B \cup \{(0,1)\}$ (poichè $(0,1) \in X$) $\Rightarrow B_1 \cap X \supsetneq B$ (poichè $(0,1) \notin B$): assurdo.

   C : C non è chiuso in X. Infatti, se per assurdo lo fosse si avrebbe $C = C_1 \cap X$ con C_1 chiuso in $\mathbb{R}^2$; ma allora $C \subseteq C_1 \Rightarrow C \cup D(C) = \overline{C} \subseteq C_1$ (indichiamo con $\overline{C}$ la chiusura in $\mathbb{R}^2$) $\Rightarrow C \cup (0,1) \subseteq C_1 \Rightarrow C_1 \cap X \supseteq C \cup \{(0,1)\}$ (poichè $(0,1) \in X$) $\Rightarrow C_1 \cap X \supsetneq C$ (poichè $(0,1) \notin C$): assurdo.

   D : D è chiuso in X. Infatti consideriamo $D_1 = D \cup \{(1,0)\}$. D_1 è chiuso in $\mathbb{R}^2$ poichè contiene tutti i suoi punti di accumulazione ($D_1 = D_1 \cup D(D_1) = \overline{D_1}$). Inoltre si ha $D = D_1 \cap X$, cioè la tesi.

2. Sia$(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e siano A e B sottoinsiemi di X; verificare:

   (a) $\text{Fr}(A \cup B) \subseteq \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$;
   (b) $\text{Int}(A \cup B) \supseteq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$; $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$;
   (c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

   Soluzione:

   (a) Sia $x \in \text{Fr}(A \cup B)$ e supponiamo per assurdo che $x \notin \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.
   Poiché $x \notin \text{Fr}(A) \Rightarrow x \in \text{Int}(A) \sqcup \text{Est}(A)$. Se $x \in \text{Int}(A)$ $\exists U \in \mathcal{T}$ tale che $x \in U \subseteq A$. Avremmo che $x \in U \subseteq A \cup B$ e ciò implica $x \in \text{Int}(A \cup B)$ contro l'ipotesi, perciò $x \in \text{Est}(A)$.
   Allo stesso modo avremo che $x \in \text{Est}(B)$, poichè $x \notin \text{Fr}(B)$.
   Quindi $\exists U, V \in \mathcal{T}$ tali che $x \in U \cap V$ con $U \cap A = V \cap B = \varnothing$.
   Ma $(U \cap V) \cap (A \cup B) = (U \cap V \cap A) \cup (U \cap V \cap B) = \varnothing \Rightarrow x \in \text{Est}(A \cup B)$ che è assurdo quindi $x \in \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.

   (b) In generale, è vero che se S,T sono sottoinsiemi di X tali che $S \subseteq T$ allora $\text{Int}(S) \subseteq \text{Int}(T)$. Nel nostro caso, essendo $A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B$ si ha $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A), \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$.
   Ne segue che $\text{Int}(A \cup B) \supseteq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ e che $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.
   Rimane da dimostrare che $\text{Int}(A \cap B) \supseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.
   Sia $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T}$ tali che $x \in U \subseteq A$ e $x \in V \subseteq B$; allora $x \in U \cap V \subseteq A \Rightarrow x \in U \subseteq A$ e $x \in U \cap V \subseteq A \cap B \Rightarrow x \in \text{Int}(A \cap B)$.

(c) Sappiamo che se S,T sono sottoinsiemi di X tali che $S \subseteq T$ allora $\overline{S} \subseteq \overline{T}$. Da cui $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ e $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
Dimostriamo ora che $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.
Sia $x \in \overline{A \cup B}$ e supponiamo, per assurdo, che $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Allora esistono due chiusi C_A e C_B di $(X, \mathcal{T})$ tali che $C_A \supseteq A$, $x \notin C_A$ e $C_B \supseteq B$, $x \notin C_B$.
Ne segue dunque che $C_A \cup C_B$ è un chiuso tale che $x \notin C_A \cup C_B \supseteq \overline{A \cup B}$; ma ciò contraddice il fatto che $x \in \overline{A \cup B}$.

3. Siano X un insieme non vuoto e $\mathcal{K}$ la topologia cofinita. Si dimostri $\mathcal{K} \setminus \{A\}$ con A aperto in X è ancora una base per la topologia $\mathcal{K}$.

   Soluzione:
   Sia $A = X \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ allora per verificare che $\mathcal{B} = \mathcal{K} \setminus \{A\}$ è ancora una base di $\mathcal{K}$ bisogna far vedere che ogni aperto è unione di elementi di $\mathcal{B}$. In questo caso basta far vedere che $A = \bigcup_i B_i$ con $B_i \in \mathcal{B}$: prendiamo $B_1 = X \setminus \{x_1, ..., x_n, y\}$ e $B_1 = X \setminus \{x_1, ..., x_n, z\}$ con $z, y \in X$ distinti allora $B_1 \cup B_2 = X \setminus (\{x_1, ..., x_n, y\} \cap \{x_1, ..., x_n, z\}) = X \setminus \{x_1, ..., x_n\} = A$

4. Si consideri lo spazio topologico $(X, \mathcal{K})$ dove X è un insieme non vuoto e $\mathcal{K}$ indica la topologia cofinita. Dimostrare che se $x \in X$ allora un sistema fondamentale d'intorni di x è $\mathcal{K} \setminus \mathcal{F}$ con $\mathcal{F} = \{X - F : x \in F \text{ è finito}\}$.

   Soluzione:
   Sappiamo che gli intorni di un elemento x di X sono tutti del tipo
   $$I(x) = X \setminus \{y_1, \ldots, y_n : y_i \neq x, y_i \in X \; \forall 1 \leq i \leq n\}.$$
   Segue, immediatamente, che $K \setminus \mathcal{F}$ con $\mathcal{F} = \{X - F : x \in F \text{ è finito}\}$ è un sistema fondamentale d'intorni di x.

5. Si consideri $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ dove $\mathcal{K}$ è la topologia cofinita. Dire quali delle seguenti successioni convergono e a quali punti:

   (a) $\{x_n = n\}_{n \in \mathbb{N}}$
   (b) $\{x_n = 0\}_{n \in \mathbb{N}}$
   (c) $\{x_n = (-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$
   (d) $\{x_n = \frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$

   Soluzione:

   (a) La successione converge ad x per ogni $x \in \mathbb{R}$; infatti, consideriamo un qualsiasi intorno $I(x) = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_m : y_i \neq x \; \forall i\}$, presi $M := \max_i y_i$ e $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $n_M > M$ si ha che $\forall n \geq n_M \;\; x_n \in I(x)$.
   (b) La successione converge a 0 in quanto considerato un qualsiasi $I(0) = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_m : y_i \neq 0 \; \forall i\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $x_n = 0 \in I(0)$. Invece se prendiamo $x \neq 0$ e il suo intorno $I(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $x_n = 0 \notin I(x)$.
   (c) La successione non converge a x per ogni $x \in \mathbb{R}$. Distinguiamo i casi $x = 1, -1$ e $x \neq 1, -1$. Nel primo caso prendiamo $x = 1$ e consideriamo l'intorno $I(1) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ allora $\forall n$ dispari $x_n \notin I(1)$. Il caso -1 è analogo. Sia ora $x \neq 1, -1$ allora $I(x) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ è tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $x_n \notin I(x)$.
   (d) La successione converge a x per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $I(x) = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_m\}$ allora possiamo distinguere due casi:
      - Se esistono $y_i \in I(x)$ tali che $y_i = \frac{1}{n_i}$ per qualche $n_i \in \mathbb{N}$ allora, prendendo $\overline{n} = \max_i\{n_i\}$ per ogni $n > \overline{n}$ si ha che $x_n \in I(x)$.
      - Se, invece, $y_i \neq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $x_n \in I(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6. Descrivere con formule l'applicazione $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\} \to \mathbb{R}$ che associa a $\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$ l'area del triangolo di vertici $\underline{x}, \underline{0}, (1, 0)$. Verificare che ϕ è continua rispetto alla topologia euclidea ed estenderla ad un'applicazione continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Soluzione:
Per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$ poniamo $\underline{x} = (x_1, x_2)$. Quindi si ha che $\phi(\underline{x}) = \frac{|x_2|}{2}$. Studiamo la continuità della mappa ϕ in $\overline{x}$. Ora $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$ con la topologia euclidea è uno spazio metrico ed inoltre una base di questa topologia sono gli aperti $\{\mathbb{R} \times (a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b) \times \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}\}$, quindi utilizziamo la seguente nozione di continuità:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 \quad : \quad f(\underline{y}) \in D_\epsilon(f(\underline{x})) \text{ se } \underline{y} \in \mathbb{R} \times (x_2 - \delta_\epsilon, x_2 + \delta_\epsilon).$$

Dunque affinché sia verificata la disuguaglianza basta scegliere $\delta_\epsilon < \epsilon$.
L'estensione richiesta è la seguente:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ tale che } \Phi(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_2 = 0 \\ \phi(\underline{x}) & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

La continuità di Φ si prova verificando che sia continua nei punti della retta $\{x_2 = 0\}$. La dimostrazione è identica a quella per la continuità di ϕ ponendo $x_2 = 0$.

7. Sia $id : (\mathbb{R}, K) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$, dove $\mathcal{E}$ indica la topologia euclidea, si dica se id e la sua inversa sono continue.

   Soluzione:
   Dimostriamo un fatto più generale:

   Siano X un insieme non vuoto e $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ due topologie su X. L'applicazione id:$(X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ è continua se e soltanto se $\mathcal{T}' < \mathcal{T}$.

   Se id è continua allora per ogni $A \in \mathcal{T}'$, $A = id^{-1}(A)$ è un aperto di $\mathcal{T}$. Viceversa se $\mathcal{T}' < \mathcal{T}$ si ha che per ogni $A \in \mathcal{T}'$, $id^{-1}(A) = A \in \mathcal{T}$ perché $\mathcal{T}$ è più fine di $\mathcal{T}'$.

   Dunque $id : (X, \mathcal{K}) \to (X, \mathcal{E})$ non è continua perché $\mathcal{E}$ è strettamente più fine di $\mathcal{K}$; mentre id^{-1} è continua.

8. Svolgere l'esercizio precedente considerando come dominio e codominio della funzione tutte le possibili combinazioni $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ con $\mathcal{T} = \mathcal{T}(j_d), \mathcal{T}(j_s), i_d, i_s$.

   Soluzione:

   Bisogna procedere come nell'esercizio precedente tenendo in considerazione il fatto che $i_s < \mathcal{T}(j_s)$, $i_d < \mathcal{T}(j_d)$; mentre i_s non è confrontabile con i_d e $\mathcal{T}(j_d)$, i_d non è confrontabile con i_s e $\mathcal{T}(j_s)$ e $\mathcal{T}(j_d)$ non è confrontabile con $\mathcal{T}(j_s)$.

9. Dire quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea hanno la topologia discreta:

   (a) $\mathbb{Z}$
   (b) $\mathbb{Q}$
   (c) $X = \{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}$
   (d) $X \cup \{0\}$

   Soluzione:

   Ricordiamo che se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico, Y è un sottoinsieme non vuoto di X, la famiglia $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap A : A \in \mathcal{T}\}$ è una topologia che si chiama*topologia indotta da X su Y*. Y con la topologia $\mathcal{T}_Y$ prende il nome di *sottospazio topologico di X*.
   Verifichiamo se la topologia indotta sui sottospazi (a),(b),(c),(d) da $\mathbb{R}$ è discreta; cioè, se i punti dei sottoinsiemi (a),(b),(c),(d) sono aperti rispetto alla topologia indotta da $\mathbb{R}$.

   (a) Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ si ha che $\{z\} = \mathbb{Z} \cap (z - 1/2, z + 1/2)$ da cui segue che i punti sono aperti.
   (b) La topologia indotta su $\mathbb{Q}$ non è discreta in quanto $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Infatti, per ogni $q \in \mathbb{Q}$ e per ogni disco $(a, b) \in \mathbb{R}$, $a < b$, tale che $q \in (a, b)$ si ha che $\emptyset \neq (q, b) \subset (a, b)$. Quindi, per la densità dei razionali nei reali, esisterà $\tilde{q} \neq q$ tale che $\tilde{q} \in (q, b) \subset (a, b)$ e si avrà che $\tilde{q} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$.
   (c) $(X, \mathcal{E}_X)$ è uno spazio topologico discreto. Se $x \in X$ allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x = 1/n$. Quindi $\{x\} = X \cap (x - \frac{1}{n(n+1)}, x + \frac{1}{n(n+1)})$ con $(x - \frac{1}{n(n+1)}, x + \frac{1}{n(n+1)}) \in \mathcal{E}$ è aperto.

(d) Verifichiamo che la topologia indotta da $\mathbb{R}$ su $Y := X \cup \{0\}$ non è discreta facendo vedere che 0 non è aperto. Infatti, per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}$ tale che $a < 0 < b$, scelto $n > 1/b$ si ha che $1/n \in Y \cap (a, b)$.

10. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico separabile. Siano $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}''$ due topologie su X tali che $\mathcal{T}' < \mathcal{T} < \mathcal{T}''$.

(a) Dimostrare che $(X, \mathcal{T}')$ è separabile;

(b) Verificare con un esempio $(X, \mathcal{T}'')$ può non essere separabile.

Soluzione:

Ricordiamo che uno spazio topologico X è separabile se ammette un sottoinsieme denso e numerabile.

(a) Sia S un sottoinsieme numerabile di X denso rispetto a $\mathcal{T}$. Denotando con $\overline{S}$ e $\overline{S}'$ le chiusure di S rispettivamente in $\mathcal{T}$ e in $\mathcal{T}'$, si ha $\overline{S} = X$. E' dunque sufficiente dimostrare che $\overline{S} \subseteq \overline{S'}$. Indichiamo con $\mathfrak{C}$ la famiglia dei chiusi di $(X, \mathcal{T})$ e con $\mathfrak{C}'$ quella di $(X, \mathcal{T}')$. Poiché $\mathcal{T}'$ è meno fine di $\mathcal{T}$ si avrà che $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C} \Rightarrow \{C' \in \mathfrak{C}' : S \subseteq C'\} \subseteq \{C \in \mathfrak{C} : S \subseteq C\} \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{S'}$.

(b) Siano $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \varepsilon$ e $\mathcal{T}'' = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Sappiamo che $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme denso e numerabile rispetto alla topologia euclidea ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$), da cui discende la separabilità di $(\mathbb{R}, \epsilon)$. Invece, $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ non è separabile poiché, essendo in $\mathcal{T}''$ tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ chiusi, l'unico sottoinsieme denso è $\mathbb{R}$, il quale non è chiaramente numerabile.