Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Sara Lamboglia e Maria Chiara Timpone

Tutorato 11 (28 Maggio 2013)
Ripassone

1. Si consideri il sottospazio X di $\mathbb{R}^2$ costituito dalle circonferenze C_n di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

   (a) E' connesso?

   (b) E' connesso per archi?

   (c) E' compatto?

   (d) Si risponda alle domande (a) e (b) e (c) per $X' = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1\} \cup X$.

   (e) Sia $S := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$; si risponda alle domande (a) e (b) e (c) per $X'' = X'/\sim_S$. Si dica inoltre se X'' è di Hausdorff.

   Soluzione:

   (a) X non è connesso; vediamo infatti che $\varnothing \subsetneq C_1 \subsetneq X$ è aperto e chiuso in X.
   C_1 è chiuso perché $C_1 = S^1 \cap X$ e S^1 è chiuso in $\mathbb{R}^2$.
   C_1 è aperto poiché $C_1 = A \cap X$, dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < \frac{3}{2}\}$ è la corona circolare aperta di raggi $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

   (b) X non è connesso per archi perché non è connesso.

   (c) X non è compatto perché non è chiuso (in $\mathbb{R}^2$ un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato). Mostriamo infatti che $(0,0) \notin X$, mentre $(0,0) \in \overline{X}$. Chiaramente $(0,0) \notin X$; per vedere che $(0,0) \in \overline{X}$ notiamo che $(0,0)$ è un punto di accumulazione per X; infatti ogni palla aperta centrata in $(0,0)$, sia $B_\varepsilon((0,0))$, interseca X, in quanto contiene elementi di C_n con $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

   (d) X' è connesso per archi: infatti $X' = \cup_{j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} Y_j$, dove $Y_j := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup C_j$ è connesso per archi e $\cap_{j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} Y_j = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$.
   X' è connesso perché è connesso per archi.
   X' è compatto perché è chiuso (il complementare è aperto) e limitato ($X' \subseteq D_2(0)$).

   (e) X'' è connesso, connesso per archi e compatto perché è quoziente di X' che è connesso, connesso per archi e compatto.
   Mostriamo ora che X'' è di Hausdorff; a tal fine dimostriamo il seguente risultato:

   Lemma: *Siano X uno spazio topologico di Hausdorff e $K \subset X$ un compatto allora $X/\sim_K$ è di Hausdorff.*

   dim

   Osserviamo innanzitutto che poiché K è compatto in un Hausdorff è chiuso.
   Sia $\pi : X \to X/\sim_K$ la mappa quoziente. Siano $[p] := [p]_{\sim_K}, [q] := [q]_{\sim_K} \in X/\sim_K$, $[p] \neq [q]$. Consideriamo i due casi:

   - $p, q \notin K$: poichè X è di Hausdorff e $p \neq q$ (essendo $[p] \neq [q]$) esistono aperti U e V di X tali che $p \in U, q \in V$ e $U \cap V = \varnothing$; ma allora $U' := U \cap (X \setminus K)$ e $V' := V \cap (X \setminus K)$ sono aperti saturi tali che $p \in U'$, $q \in V'$ e $U' \cap V' = \varnothing \Rightarrow \pi(U')$ e $\pi(V')$ sono aperti tali che $[p] \in \pi(U')$, $[q] \in \pi(V')$ e $\pi(U') \cap \pi(V') = \varnothing$ (se per assurdo esistesse $[x] \in \pi(U') \cap \pi(V') \Rightarrow \exists\, u \in U'$ e $v \in V'$ tali che $[x] = \pi(u) = \pi(v) \overset{u,v \notin K}{\Rightarrow} u = v \Rightarrow u = v \in U' \cap V' \Rightarrow U' \cap V' \neq \varnothing$).

   - Supponiamo che $q \in K$; facciamo vedere che esistono due aperti U e V tali che $p \in U$, $q \in K \subset V$ e $U \cap V = \varnothing$.
   Poiché $p \notin K$ per ogni $x \in K$ si ha $p \neq x$ e conseguentemente, essendo X di Hausdorff, esistono U_x e V_p aperti disgiunti con $x \in U_x$ e $p \in V_p$. Ma allora la famiglia $\{U_x\}_{x \in K}$ costituisce un ricoprimento aperto di K; dalla compattezza di K esistono quindi $x_1, \ldots, x_n \in K$

tali che $K \subset \cup_{i=1}^n U_{x_i}$. Per ogni x_i esiste, per quanto osservato sopra, un aperto V_i che contiene p e disgiunto da U_{x_i}. Allora $V := \cap_{i=1}^n V_i$ è aperto, perché intersezione finita di aperti, e contiene p; d'altra parte, per come è stato costruito, è disgiunto da tutti gli U_{x_i}. Quindi V è disgiunto da $U := \cap_{i=1}^n U_i$, che è aperta e ricopre K.
Segue allora la tesi in quanto abbiamo trovato un aperto V che contiene p e un aperto U che contiene K tali che $U \cap V = \varnothing$.

Resta allora da verificare le ipotesi del lemma.
X' è di Hausdorff poiché sottospazio di uno spazio di Hausdorff ($\mathbb{R}^2$ è infatti di Hausdorff in quanto metrizzabile); inoltre $S \subseteq X'$ è compatto perché è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$, e conseguentemente in X', e X' è compatto.

2. Sia $f : S^n \to S^n$ l'applicazione antipodale, ossia $f(x) = -x$. Dimostrare che, se n è dispari, allora f è omotopa all'identità.

   <u>*Soluzione*</u>:

   Sia $n = 2k-1$; consideriamo l'applicazione $F : S^n \times I \to S^n$ definita da:

   $$F(\mathbf{x}, t) = (x_1 \cos(\pi t) + x_2 \sin(\pi t), x_2 \cos(\pi t) - x_1 \sin(\pi t), \dots, x_{2k-1} \cos(\pi t) + x_{2k} \sin(\pi t), \\ x_{2k} \cos(\pi t) - x_{2k-1} \sin(\pi t)),$$

   con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2k}) \in S^n$.

   Dimostriamo che F è un'omotopia tra f e l'identità:

   - F è ben definita, cioè $F(\mathbf{x}, t) \in S^n \,\forall\, (\mathbf{x}, t) \in S^n \times I$; infatti si ha: $\|F(\mathbf{x}, t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2k}^2} = \|\mathbf{x}\| = 1$ poiché $\mathbf{x} \in S^n$.
   - F è chiaramente continua.
   - $F(\mathbf{x}, 0) = (x_1, \dots, x_{2k}) = id_{S^n}(\mathbf{x})$ e $F(\mathbf{x}, 1) = (-x_1, \dots, -x_{2k}) = -\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$.

3. In $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea si considerino i seguenti sottoinsiemi:

   $$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

   $$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in K, 0 \leq z \leq 1\}.$$

   Sia inoltre $X = H/\sigma$ dove $(x, y, z)\sigma(x', y', z')$ se e solo se $(x, y, z) = (x', y', z')$ oppure $x = x', y = y', z, z' \in \{0, 1\}$. Dimostrare che X è omoeomorfo a $K \times S^1$ e calcolare $\pi_1(X, x_0)$ al variare di $x_0 \in X$.
   [*Appello A - 2010/2011*]

   <u>*Soluzione*</u>:

   Per la soluzione visitare:
   `http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/GE2201011/GE220appelloA.pdf`

4. Sia $g : [-1, 1/2] \to \mathbb{R}^2$ così definita:

   $$f(t) = \begin{cases} (1 + 2t, 0) & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ (\frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin(2\pi t)) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

   (i) Stabilire se g è continua e se è un omeomorfismo sull'immagine.

   (ii) Sia $X = \mathrm{Im}(g)$. Stabilire se X è compatto e/o connesso.

   (iii) Sia $F : X \times I \to X$ definita da:

   $$F((x, y), t) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } x \geq 0 \\ ((1-t)x, y) & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

   Utilizzare F per dimostrare che X è omotopicamente equivalente a $Y = \{(x, y) \in X : x \geq 0\}$.

   (iv) Utilizzare il punto precedente per calcolare $\pi_1(X, (0, 0))$.
   [*Appello B - 2010/2011*]

   <u>*Soluzione*</u>:

(i) f è chiaramente continua perché incollamento di funzioni continue

$$f_1 : [-1,0] \to \mathbb{R}^2 \text{ tale che } f_1(t) = (1+2t, 0)$$

e

$$f_2 : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^2 \text{ tale che } f_2(t) = (\frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin(2\pi t))$$

definite su due chiusi e che coincidono su $[-1,0] \cap [0, \frac{1}{2}] = \{0\}$.
Non è un omeomorfismo in quanto $f(0) = f(\frac{1}{2})$.

(ii) X è compatto in quanto chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$ ed è connesso perché immagine attraverso una funzione continua di un connesso.

(iii) Per dimostrare che i due spazi sono omotopicamente equivalenti consideriamo le seguenti applicazioni continue $i : Y \to X$ tale che $i(x,y) = (x,y)$ e $g : X \to Y$ tale che

$$g(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } x \geq 0 \\ (0,y) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Ora $g \circ i = id_Y$, mentre $i \circ g \sim id_X$ attraverso l'omotopia $F((x,y),t)$. Rimane da verificare che $F((x,y),t)$ è un'omotopia tra $i \circ g$ e id_X.

- F è continua;
- $F((x,y),0) = (x,y) = id_X$ e $F(x,y),1) = g(x,y)$;
- $F((x,y),t)$ è ben definita perché al variare di x in $[-1,0]$, e di t in $[0,1]$, $((1-t)x, y)$ descrive il segmento di estremi $(-1,0)$ e $(0,0)$ che è tutto contenuto in X.
- F rispetta la condizione di compatibilità perché $F((x,y),t)|_Y = (x,y)$ cioè $F((x,y),t)|_Y = (id_X)|_Y(x,y) = (i \circ g)|_Y(x,y)$.

(iv) Dal punto precedente abbiamo che $\pi_1(X,(0,0)) \cong \pi(Y,(0,0))$. Se mostriamo che lo spazio Y è omemorfo ad S^1, per la transitività dell'isomorfismo, avremo che $\pi_1(X,(0,0)) \cong \mathbb{Z}$.
Consideriamo come S^1 la circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ e centro $(\frac{1}{2}, 0)$ e definiamo la funzione

$$h : S^1 \to Y \text{ tale che } h(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } y > 0 \\ (x,0) & \text{se } y \leq 0 \end{cases}.$$

Tale funzione è continua e biettiva ed inoltre è un omeomorfismo perché si può vedere facilmente che è un'applicazione aperta.

5. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + y^2 = 1\},$$
$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 < 1\},$$
$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x < 1\},$$
$$D := \{(1,0) \in \mathbb{R}^2\}.$$

(i) Dimostrare $A \cup C$ e $B \cup D$ sono connessi;
(ii) Dimostrare che $X := A \cup B \cup C \cup D$ è connesso;
(iii) Calcolare $\pi_1(X, (-1,0))$.

[*Secondo esonero - 2008/2009*]

<u>*Soluzione*</u>:

Per la soluzione visitare:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/GE30809/GE3esonero2.pdf`

6. Dimostrare che se $\{C_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di compatti in uno spazio di Hausdorff tale che l'intersezione degli elementi di ogni sottofamiglia finita è non vuota allora $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \varnothing$.

<u>*Soluzione*</u>:

Sia C_1 il primo compatto della famiglia $\{C_i\}_{i\in I}$. Supponiamo per assurdo che $\forall\ x \in C_1\ x \notin \bigcap_{i\in I, i\neq 1} C_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_1 \cap \left(\bigcap_{i\in I, i\neq 1} C_i \right) = \varnothing. \tag{1}$$

Sia $D_i = C_i^c, \quad \forall\ i \in I$; in particolare, D_i è aperto per ogni $i \in I$ poiché i C_i sono chiusi (compatti in uno spazio di Hausdorff).

Osserviamo che (1) $\Rightarrow C_1 \subseteq \left(\bigcap_{i\in I, i\neq 1} C_i \right)^c = \bigcup_{i\in I, i\neq 1} D_i$, da cui $\bigcup_{i\in I, i\neq 1} D_i$ è un ricoprimento aperto di C_1; essendo C_1 compatto, possiamo estrarne un sottoricoprimento finito ovvero $\exists\ n \in \mathbb{N}, n < +\infty$ tale che $C_1 \subseteq \bigcup_{j=2}^{n} D_{i_j}$.

Segue che $\varnothing = C_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{n} D_{i_j} \right)^c = C_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} C_{i_j} \right)$: assurdo, poiché per ipotesi ogni intersezione di una sottofamiglia finita è non vuota.

7. Sia $X := \{f(x;y;z) | x^2 + y^2 = z^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ il cono infinito con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$. Si considerino le seguenti relazioni di equivalenza su X:

$$\rho_1 : (x, y, z)\rho_1(x', y', z') \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ t.c. } (x, y, z) = (\lambda x', \lambda y', \lambda z')$$

$$\rho_2 : (x, y, z)\rho_2(x', y', z') \Leftrightarrow z = z'$$

Siano Y_1 lo spazio topologico quoziente X/ρ_1, $p_1 : X \to Y_1$ la proiezione canonica e Y_2 lo spazio topologico quoziente X/ρ_2 $p_2 : X \to Y_2$ la proiezione canonica.

(i) Descrivere $[(0; 0; 0)]_{\rho_1}, [(0; 0; 0)]_{\rho_2}, [(1; 0; 1)]_{\rho_1}, [(1; 0; 1)]_{\rho_2}$.

(ii) Dopo aver definito la nozione di aperto saturo rispetto ad un'applicazione suriettiva, fare un esempio di aperto non saturo per p_1.

(iii) Dire se Y_1 è uno spazio di Hausdorff e se è compatto. Si può realizzare Y_1 come sottospazio di $\mathbb{R}^n$ per qualche n?

(iv) Dimostrare che Y_2 è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

[*Appello A - 2008/2009*]

Soluzione:

Per la soluzione visitare:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/GE30809/GE3appelloA.pdf`

8. Vero o Falso? Se vero dare una breve giustificazione, se falso esibire un controesempio.

(i) Le componenti connesse di uno spazio X sono sottoinsiemi aperti di X.

(ii) Se il quoziente di uno spazio topologico é connesso allora lo spazio è connesso.

(iii) Siano $X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2+y^2+z^2 = 1\}, Y := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x+1)^2+y^2+z^2 = 1\}$. Allora $X \cup Y$ ha gruppo fondamentale banale.

[*Secondo esonero - 2008/2009*]

Soluzione:

Per la soluzione visitare:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/GE30809/GE3esonero2.pdf`