Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
GE220 – Topologia
Seconda prova di valutazione in itinere

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Esercizio 0. Si mostri o si confuti ciascuna delle seguenti asserzioni, con un argomento conciso ed esauriente.

(i) Ogni quoziente di uno spazio contraibile è contraibile.
(ii) Se X è uno spazio topologico e $Y \subseteq X$, allora per ogni $y_0 \in Y$ il morfismo di gruppi $\iota_\star : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, y_0)$ indotto dall'inclusione $\iota : Y \longrightarrow X$ è iniettivo.
(iii) Siano X uno spazio di Hausdorff e $\{Y_n : n \in \mathbf{N}\}$ una collezione di sottoinsiemi compatti e non vuoti di X tali che $Y_n \supseteq Y_{n+1}$, per ogni $n \in \mathbf{N}$. Allora $\bigcap\{Y_n : n \in \mathbf{N}\} \neq \emptyset$.

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Esercizio 1. Si ponga $\mathcal{T} := \{U \subseteq [0,1] : U \supseteq]0,1[\text{ oppure } 1/2 \notin U\}$, e si dia per buono che $\mathcal{T}$ è una topologia su $[0,1]$. Nel seguito denoteremo con X l'insieme $[0,1]$ munito della topologia $\mathcal{T}$. Il candidato risolva le seguenti questioni, argomentandole in modo conciso ed esauriente.

(i) Si stabilisca se X è T_1 e/o di Hausdorff.
(ii) Si stabilisca se $X - \{1/2\}$, con la topologia di sottospazio indotta da $\mathcal{T}$, è T_1 e/o di Hausdorff.
(iii) Si stabilisca se X è compatto.
(iv) Si stabilisca se $X - \{1/2\}$ è compatto.
(v) Si stabilisca se X è connesso.
(vi) Si determinino tutte le componenti connesse di X.

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi $X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = 1\} \cup (\{0\} \times [1, +\infty[)$, $Y := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 0 \text{ oppure } y \leq 0\}$ di $\mathbf{R}^2$.

(i) Si spieghi perché X, Y sono connessi per archi.

(ii) Si calcolino $\pi_1(X, (0, 1))$, $\pi_1(Y, (0, 1))$ e $\pi_1(X \cap Y, (0, 1))$.