Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
GE220 – Topologia
Prima prova di valutazione in itinere

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Avvertenza. OGNI asserzione va giustificata in modo conciso ed esauriente. Affermazioni non motivate adeguatamente non saranno prese in considerazione.

Esercizio 0.[10 punti] Il candidato risolva le seguenti questioni.

(i) Siano X uno spazio topologico, si munisca $\mathbf{R}$ della topologia euclidea, e sia $r \in \mathbf{R}$. Se $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua, è vero che l'insieme $\{x \in X : f(x) \neq r\}$ è aperto in X?

(ii) Sia T la frontiera di un triangolo e sia $\mathbf{p} \in T$. Si stabilisca se $T \setminus \{\mathbf{p}\}$ e $\mathbf{R}$ sono omeomorfi.

(iii) Si consideri l'insieme $X := \{1, 2, 3, 4\}$ e si ponga $\mathcal{F} := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$.

(a) Dopo aver spiegato perché $\mathcal{F}$ non è una topologia su X, si determini la topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ generata da $\mathcal{F}$, esibendone una base.

(b) Sia $f : (X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ una funzione tale che $f(1) = 4, f(2) = f(3) = 1$. Si trovino i possibili valori di $f(4)$ per i quali f risulti continua.

(iv) Sia $\mathbf{K}$ la retta di Sorgenfrey, i.e., l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali munito della topologia j_d avente come base la famiglia degli intervalli $[a, b[$, con $a, b \in \mathbf{R}$.

(a) Si determini $\mathrm{Int}(]1, 2])$ e $\overline{]1, 2]}$, precisando se $]1, 2]$ è aperto e/o chiuso in $\mathbf{K}$.

(b) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, si consideri la funzione $f_\lambda : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ definita ponendo $f_\lambda(x) := \lambda x$, per ogni $x \in \mathbf{K}$. Per quali valori di λ la funzione f_λ è continua? Per quali è un omeomorfismo?

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Esercizio 1.[12 punti] Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si ponga

$$\mathcal{T}_\alpha := \{\emptyset, \mathbf{R}\} \cup \{]\alpha - r, \alpha + r[: r > 0\}$$

(i) Si dimostri che $\mathcal{T}_\alpha$ è una topologia su $\mathbf{R}$, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.

(ii) Si stabilisca se $\mathcal{T}_0$ è comparabile con $\mathcal{T}_1$ per finezza.

(iii) Se esiste, si esibisca un omeomorfismo $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_0) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{T}_1)$.

(iv) Si discuta la convergenza della successione $\left\{\dfrac{n+1}{n} : n \in \mathbf{N}, n \geq 1\right\}$, rispetto alle topologie $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$.

(v) Sia adesso $X := (\mathbf{R}, \mathcal{T}_0) \times (\mathbf{R}, \mathcal{T}_1)$, munito della topologia prodotto $\mathcal{T}$. Dopo aver esibito una base di X, si stabilisca se la topologia $\mathcal{T}$ è strettamente meno fine della topologia euclidea su $\mathbf{R}^2$.

(vi) Si stabilisca se X soddisfa il primo e/o il secondo assioma di numerabilità.

(vii) Si stabilisca se ogni aperto non vuoto di X è denso.

(viii) Si stabilisca se X è metrizzabile.

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Esercizio 2.[12 punti] Siano X uno spazio topologico, S un suo sottoinsieme e ρ_S la relazione di equivalenza su X che identifica S a un punto, sia $Y := X/\rho_S$ lo spazio quoziente.

(i) Si dimostri che se S è aperto allora la proiezione canonica $\pi : X \longrightarrow Y$ è un'identificazione aperta.

(ii) Si dia un esempio di X e $S \subset X$ in cui la proiezione canonica π è una funzione né aperta né chiusa, motivando la risposta.

(iii) Sia $X = \mathbf{R}$, munito della topologia euclidea, e sia $S_1 := \mathbf{Q}$, $S_2 := X \setminus S_1$. Si dimostri che gli spazi quoziente X/ρ_{S_1} e X/ρ_{S_2} non sono omeomorfi.