Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
GE220 – Topologia
Appello X

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Esercizio 0. Si mostri o si confuti ciascuna delle seguenti asserzioni, con un argomento conciso ed esauriente.

(i) Lo spazio $\mathbb{R}$ dei numeri reali, munito della topologia euclidea, è omeomorfo al suo sottospazio $]1, 2]$.

(ii) Per ogni coppia di sottoinsiemi S, T di uno spazio topologico, si ha $\overline{S \cap T} = \overline{S} \cap \overline{T}$.

(iii) Si consideri il sottospazio $X := \{\frac{1}{n} : n > 0\} \cup \{0\}$ di $\mathbb{R}$, munito della topologia euclidea. Allora esiste un omeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tale che $f(1) = 0$.

(iv) Ogni sottoinsieme infinito di uno spazio compatto ha punti di accumulazione.

(v) Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ (munito della topologia euclidea) definita ponendo

$$x\mathcal{R}y :\iff x = y \text{ oppure } x + y = 0$$

Allora esiste un omeomorfismo $[0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Esercizio 1. Per ogni numero naturale n si ponga $U_n := \{3n, 3n+1, 3n+2\}$, e si consideri la collezione di sottoinsiemi $\mathcal{F} := \{U_0, U_1, U_2, \ldots\}$ di $\mathbb{N}$.

(i) Si determini una base della topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{N}$ generata dalla collezione di insiemi $\mathcal{F}$.

(ii) Si calcoli la chiusura in $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ dei seguenti insiemi

$$U_0 \qquad U_0 \cup \{3\} \qquad \{3n : n \in \mathbb{N}\}$$

(iii) Si dica se $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ è T_1 e/o di Hausdorff.

(iv) Si caratterizzino i sottospazi compatti di $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

(v) Si trovino le componenti connesse di $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

Esercizio 2. Sia $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ e sia

$$X = \{(tx, ty, 1-t) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in Y,\ t \in [0,1]\}$$

(i) Si calcolino i gruppi fondamentali $\pi_1(X, \bar{p})$ e $\pi(Y, p)$ dove $p = (1,0)$ e $\bar{p} = (1,0,0)$.

(ii) Si stabilsca inoltre se Y e $X \setminus \{(0,0,1)\}$ sono omotopicamente equivalenti.