Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
GE220 – Topologia
Appello B

Cognome e nome ______________________ **Identificativo**_________

Avvertenza. OGNI asserzione va giustificata in modo conciso ed esauriente. Affermazioni non motivate adeguatamente non saranno prese in considerazione.

Esercizio 0. Il candidato risolva le seguenti questioni.

(i) Siano $\mathcal{O}, \mathcal{T}$ topologie su uno stesso insieme tali che $\mathcal{O}$ sia meno fine di $\mathcal{T}$. Si mostri che, se $\mathcal{T}$ è compatta e $\mathcal{O}$ è di Hausdorff, allora $\mathcal{T} = \mathcal{O}$.

(ii) Sia $\mathbf{K}$ la retta di Sorgenfrey, i.e., l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali munito della topologia avente per base di aperti la famiglia degli intervalli del tipo $[a, b[$. Al variare di $\lambda \in [0, +\infty[$, si discuta la continuità della funzione $f_\lambda : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ definita da $f_\lambda(x) := \lambda^x$, per ogni $x \in \mathbf{K}$. Per quali valori di λ la funzione f_λ è un'immersione topologica?

(iii) Si muniscano $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2$ delle rispettive topologie euclidee e sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita ponendo $f((x, y)) := 2013^x + y^2$. Per quale/i dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^2$ la restrizione di f è una funzione chiusa?

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\} \qquad B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 2013\}$$

(iv) Si munisca $X := [0, 5]$ della topologia euclidea e sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su X che identifica a un punto l'intervallo $[1, 2]$. Si esibisca, se esiste, un omeomorfismo $X/\mathcal{R} \longrightarrow X$.

Esercizio 1. Si consideri la seguente collezione

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq \mathbf{R} : \mathbf{R} - U \text{ è un compatto euclideo}\} \cup \{\emptyset\}$$

di sottoinsiemi di $\mathbf{R}$.

(i) Si mostri che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbf{R}$.
(ii) Si calcoli la chiusura di $[0, +\infty[$, rispetto a $\mathcal{T}$.
(iii) Si confronti per finezza la topologia $\mathcal{T}$ con la topologia cofinita e con quella euclidea.
(iv) Si dica quali assiomi di separazione sono soddisfatti da $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$.
(v) Si discuta connessione e compattezza di $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$.
(vi) Si discuta la convergenza della successione $\{(-2)^n : n \in \mathbf{N}\}$, rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^2$:

$$X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \le x^2\} \qquad\qquad Y := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \le 0\}$$

(i) È vero che X, Y sono omotopicamente equivalenti fra loro?
[Suggerimento ☺: potrebbe essere utile usare la funzione $r : X \longrightarrow Y$ definita ponendo $r((x, y)) := \begin{cases} (x, 0) & \text{se } y \ge 0 \\ (x, y) & \text{se } y \le 0 \end{cases}$]

(ii) Dopo averne ricordato la definizione e le principali proprietà, il candidato calcoli il gruppo fondamentale di $X, Y, X - \{(0, 0)\}$.