GE220 Esercizi in preparazione dell'esonero di Aprile
Corretti i testi degli esercizi 2,5,7.

**Esercizio 1.** *Considerare le seguenti famiglie di insiemi:*
$\mathcal{F} = \{(a, b] \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$
$\mathcal{G} = \{(-\infty, a) \,:\, a \in \mathbb{Q}\}$

1. *$\mathcal{F}$ definisce gli aperti di una topologia? e i chiusi? se entrambe le risposte sono negative descrivere la topologia generata da $\mathcal{F}$ (vista come famiglia di chiusi)*
2. *$\mathcal{G}$ definisce gli aperti di una topologia? e i chiusi? se entrambe le risposte sono negative descrivere la topologia generata da $\mathcal{G}$ (vista come famiglia di aperti)*
3. *Confrontare le topologie cosi' ottenute con la topologia euclidea e discutere i due assiomi di numerabilita'.*

**Esercizio 2.** *Sia $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\}$, $X_2 = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, (2, 0)) \leq 1\}$ dove $d$ e' la distanza euclidea e sia $X = X_1 \cup X_2$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.*

1. *Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi sono aperti e/o chiusi in $X$:*
   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 < y < 1\} \cap X$
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 < x \leq 1\} \cap X$
   $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x^2 \,,\, |x| < 5\} \cap X$
   $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > x^2 \,,\, |x| \leq 5\} \cap X$

2. *sia $Y = X/p$ dove $p$ e' la relazione di equivalenza data da $x\, p\, y \iff x = y$ oppure $x, y \in X_1$. Dotare $Y$ della topologia quoziente e dare un omeomorfismo tra $Y$ e $S^2 - \{punto\}$ oppure dimostrare che non e' possibile farlo.*

**Esercizio 3.** *Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = \frac{1}{n} \,,\, n \in \mathbb{N}\}$ dotato della topologia indotta da quella euclidea.*

1. *Determinare quali dei seguenti sottoinsiemi sono aperti e/o chiusi in $X$:*
   $A = \{(\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2 \,:\, n \in \mathbb{N}\}$
   $B = \{(0, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 \,:\, n \in \mathbb{N}\}$

$C = \{(x,y) \in X : 0 < x \leq \frac{1}{2}, -1 \leq y < 1\}$
$D = \{(x,y) \in X : 0 < x < \frac{1}{2}, -1 \leq y \leq 1\}$
$E = \{(x,y) \in X : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{5}, y \geq 1\}$

2. *Sia* $Y = X/p$ *dove* $p$ *e' la relazione di equivalenza data da* $(x_1, y_1)\, p\, (x_2, y_2) \iff y_1 = y_2$, $x_1 x_2 \in \mathbb{Q}$. *Dotare* $Y$ *della topologia quoziente e, se possibile, dare un suo omeomorfismo con uno spazio metrizzabile.*

**Esercizio 4.** *Sia* $X$ *uno spazio topologico con topologia cofinita e sia* $X \times X$ *lo spazio con la topologia prodotto.*

1. *Su* $X \times X$ *e' sempre strettamente piu' fine la topologia prodotto di quella cofinita? e' vero il viceversa? ci sono esempi in cui sono uguali o non confrontabili?*

2. *Sono veri i risultati precedenti anche per prodotti infiniti dell'insieme* $X$*?*

**Esercizio 5.** *Considerare le seguenti mappe tra* $\mathbb{R}$ *con la topologia euclidea e* $\mathbb{R}$ *visto come insieme:*
$f(x) = [x]$ *(parte intera) e* $g(x) = |x|$.

1. *Dare al codominio la topologia piu' fine che renda* $f$ *continua*

2. *Dare al codominio la topologia piu' fine che renda* $g$ *continua*

**Esercizio 6.** *Siano* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *e* $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

1. *Sia* $X = \mathbb{R}/p$ *dove* $p$ *e' la relazione di equivalenza data da* $x\, p\, y \iff x = y$ *oppure* $x, y \in S$. *Dare un omeomorfismo tra* $X$ *ed* $\mathbb{R}^2$ *oppure mostrare che non sono omeomorfi.*

2. *Sia* $X = \mathbb{R}/p$ *dove* $p$ *e' la relazione di equivalenza data da* $x\, p\, y \iff x = y$ *oppure* $x, y \in T$. *Dare un omeomorfismo tra* $X$ *ed* $\mathbb{R}^2$ *oppure mostrare che non sono omeomorfi*

**Esercizio 7.** *Considerare* $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *con la topologia euclidea prodotto e identificarlo con le funzioni da* $\mathbb{N}$ *a* $\mathbb{R}$

1. *Descrivere il sottoinsieme* $C(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ *delle funzioni continue da* $\mathbb{N}$ *con la topologia banale ad* $\mathbb{R}$ *con quella euclidea. Dare un omeomorfismo di tale sottoinsieme con la topologia indotta con un opportuno prodotto di* $\mathbb{R}$

2. *Sia $Y = \mathbb{R} \times X$ dove il primo fattore ha la topologia banale e $Y$ ha la topologia prodotto. Dare una mappa continua e aperta tra $Y$ e $X$. e' un omeomorfismo?*

3. *sia $Y = X \times X$ con la topologia prodotto, se possibile dare un omeomorfismo tra $Y$ ed $X$*

**Esercizio 8.** *Sia $X = \mathbb{R}^3/p$ dove $\mathbb{R}^3$ e' dotato della topologia euclidea e $p$ e' la relazione di equivalenza data da $(x_1, x_2, x_3)\, p\, (y_1, y_2, y_3) \iff x_1 = c_1 + y_1\,,\ x_2 = c_2 + y_2\,, x_3 = c_3 + y_3$ con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}$. Dotare $X$ della topologia quoziente.*

1. *$X$ e' T2? e' localmente euclideo?*

2. *$X$ Soddisfa gli assiomi di numerabilita'?*

**Traccia di risoluzione 1.** *Entrambi i punti richiedono di mostrare che tali famiglie sono chiuse per intersezioni finite e unioni finite*

1. *$\mathcal{F}$ e' chiusa sia per intersezioni finite sia per unioni finite (a patto di aggiungere $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ tra i suoi elementi) e quindi definisce sia una famiglia di chiusi sia una famiglia di aperti. Notare che in tale topologia gli aperti sono anche chiusi*

2. *Simile ad un esempio visto a lezione, tuttavia gli elementi di $\mathcal{G}$ non sono chiusi per unioni infinite ma danno una base di aperti della topologia avente per aperti gli intervalli $(-\infty, a)$ con $a$ reale.*

3. *$\mathcal{T}(\mathcal{G})$ e' meno fine della topologia euclidea mentre $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ non e' confrontabile con nessuna delle due. Per entrambe, le famiglie di partenza costituiscono una base numerabile di aperti.*

**Traccia di risoluzione 2.** 1. *$A$ coincide con l'aperto $X_1$ di $\mathbb{R}^2$ e quindi e' aperto, inoltre non e' chiuso poiche' il punto $(1, 0)$ appartiene ad $X$ e al suo derivato.*
*$B$ e' l'intersezione del cerchio di centro l'origine e raggio 1 (che e' un chiuso) con $X$, quindi e' chiuso ma il punto $(1, 0)$ non e' interno ad esso, quindi non e' un aperto.*
*$C$ e' l'intersezione del chiuso $\{y \geq x^2\}$ con $X$ quindi e' chiuso, inoltre non e' aperto perche' i punti di $\{y = x^2\} \cap X$ non sono interni.*
*$D$ e' l'intersezione dell'aperto $\{y > x^2\}$ con $X$ quindi e' aperto, inoltre non e' chiuso perche' i punti di $\{y = x^2\} \cap X$ sono suoi punti di accumulazione.*

2. *e' facile dare un omeomorfismo tra il quoziente e $X_1 \cup \{(1,0)\}$ come sottospazio di $\mathbb{R}^2$ tramite una mappa da $X$ a tale insieme che e' l'identita' su $X_1$ e manda $X_2$ in $(1,0)$. Per mostrare l'impossibilita' dell'omeomorfismo è sufficiente vedere che l'immagine di $X_1$ nel passaggio al quoziente è un punto aperto e $S^2$ non ha punti aperti.*

**Traccia di risoluzione 3.** 1. *$A$ e' dato dall'intersezione di $[0,1] \times \{0\}$ con $X$ quindi e' chiuso, tuttavia nessuno dei suoi punti e' interno.*
*$B$ non interseca $X$.*
*$C$ non è nè aperto nè chiuso in quanto i punti del tipo $(x,1)$ sono nel suo derivato ma sono esterni e i punti $(x,-1)$ non sono interni.*
*$D$ è l'intersezione con $X$ del chiuso $[0,\frac{1}{3}] \times [-1,1]$ e quindi è chiuso, tuttavia non è aperto poichè i punti del tipo $(x,1)$ e $(x,-1)$ non sono interni.*
*$E$ è l'insieme vuoto quindi è sia aperto sia chiuso.*

2. *Insiemisticamente il quoziente può essere visto come la retta reale tramite la mappa $(x,y) \to y$ che è continua, suriettiva e costante sulle classi di equivalenza. in particolare passando al quoziente diventa iniettiva e l'immagine di un aperto saturo dà un aperto secondo la topologia euclidea di $\mathbb{R}$.*

**Traccia di risoluzione 4.** *In questo esercizio è sufficiente distinguere due casi: $X$ di cardinalità finita oppure no.*

1. *Se $X$ è finito la topologia cofinita è quella discreta, quindi $X \times X$ ottiene la topologia discreta sia che venga dotato della topologia prodotto sia che venga dotato della topologia cofinita.*
*Se $X$ è infinito la topologia prodotto è strettamente più fine di quella cofinita su $X \times X$, infatti gli insiemi del tipo $\{x\} \times X$ sono chiusi per la prima topologia ma non per la seconda*

2. *Per prodotti infiniti la situazione cambia, le due topologie non sono più confrontabili tra di loro.*

**Traccia di risoluzione 5.** 1. *La mappa $f$ ha immagine disgiunta da $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ e quindi in tale insieme posso definire come aperti tutto l'insieme delle parti. In $\mathbb{Z}$ la controimmagine di un punto è un intervallo aperto a destra e chiuso a sinistra, quindi perchè la controimmagine di un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ sia aperta devo imporre che se contiene un intero contiene anche il precedente e quindi in $\mathbb{Z}$ gli aperti sono insiemi del tipo $\{n \leq a\}$. La topologia desiderata è quella generata da queste famiglie.*

2. *Tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{<0}$ hanno controimmagine vuota e quindi in tale insieme la topologia è data dall'insieme delle parti, mentre in $\mathbb{R}^{\geq 0}$ la controimmagine di un intervallo aperto è aperta, così come è aperta la controimmagine di un intervallo $[0, a)$ e non è aperta la controimmagine di insiemi non generabili così. Quindi la topologia desiderata è data da quella generata da queste due famiglie.*

**Traccia di risoluzione 6.**

1. *L'omeomorfismo desiderato è dato dalla mappa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che manda $T$ in $(0,0)$ e un punto $(x,y)$ fuori da $T$ in $(\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-1)x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-1)y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ cioè nel punto sulla semiretta tra l'origine e $(x,y)$ con distanza dall'origine diminuita di 1. La mappa è continua, chiusa, suriettiva e costante sulle classi di equivalenza e passando al quoziente diventa anche iniettiva.*

2. *l'immagine tramite la mappa di passaggio al quoziente dell'insieme $T$ è un punto aperto ed in $\mathbb{R}^2$ i punti non sono aperti.*

**Traccia di risoluzione 7.**

1. *Sia $f \in C(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ e sia $f(1) = a$, allora si ha $f^{-1}(a)$ non vuoto e chiuso e quindi $f$ è costante. L'omeomorfismo desiderato consiste nel mandare $f$ in $f(1) \in \mathbb{R}$: la mappa è iniettiva e suriettiva oltre che aperta e continua.*

2. *Una mappa che soddisfa le condizioni è la proiezione al secondo fattore. non è un omeomorfismo poichè non è suriettiva.*

3. *è sufficiente mostrare che la topologia prodotto di $Y$ coincide con la topologia prodotto di numerabili fattori di $\mathbb{R}$ ovvero quella di $X$.*

**Traccia di risoluzione 8.** *In questo esercizio è sufficiente dare un omeomorfismo tra $X$ e $T^3$ per avere risposta affermativa a tutti i quesiti: per prima cosa notare che la relazione di equivalenza si può spezzare nel prodotto di tre relazioni, una su ciascun fattore date da $x\,p\,y \iff x = y + c,\ c \in \mathbb{Z}$. Mostrare infine che $X$ è dato dal prodotto dei tre quozienti $\mathbb{R}/p$.*
*Alternativamente si può considerare la restrizione di $\pi : \mathbb{R}^3 \to X$ al chiuso $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. la mappa resta suriettiva, continua, chiusa e costante sulle classi di equivalenza quindi dà un omeomorfismo tra $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]/p$ ed $X$. Si possono quindi utilizzare i metodi visti a lezione nei quozienti di $[0,1] \times [0,1]$ per risolvere l'esercizio dando esplicitamente intorni disgiunti di punti disgiunti e intorni omeomorfi ad un aperto di $\mathbb{R}^3$*