Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

SOLUZIONI TUTORATO 9 (26 MAGGIO 2011)
OMOTOPIA E GRUPPO FONDAMENTALE

1. Considerare in S^2 il cappio α di base $x_0 = (1, 0, 0)$ definito da $\alpha(t) = (cos2\pi t, sin2\pi t, 0)$. Dimostrare che α è equivalente al cappio costante costruendo esplicitamente una omotopia relativa tra α e c_{x_0}.
Ripetere l'esercizio considerando α come cappio in $S^2 \setminus (0, 0, 1)$.

<u>*Soluzione*</u>:

Costruiremo l'omotopia richiesta seguendo un ragionamento di tipo geometrico. Osserviamo che $\alpha(t)$ non è altro che l'intersezione della sfera con il piano $z = 0$, mentre c_{x_0} è l'intersezione della sfera con il piano $x-1 = 0$. Costruiremo allora una funzione $F : I\times I \to S^2$ tale che, per ogni $t \in I$ fissato, $F(s, t)$ rappresenti, al variare di s in I, la curva che si ottiene intersecando S^2 con un piano del fascio di piani generato da $x - 1 = 0$ e $z = 0$.

Consideriamo dunque il fascio di piani:

$$\pi_t : t(x - 1) + (1 - t)z = 0, \quad t \in I.$$

Osserviamo che π_0 è il piano $z = 0$ e π_1 è il piano $x - 1 = 0$.
Al variare di t in I, l'intersezione di π_t con S^2 è definita dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} t(x - 1) + (1 - t)z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Supponiamo $t \neq 1$. In tal caso il sistema (1) è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} z = -\frac{t}{1-t}(x - 1) \\ x^2 + y^2 + \left(\frac{t}{1-t}(x - 1)\right)^2 = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Ponendo $a_t := \frac{t}{1-t}$, (2) diventa:

$$\begin{cases} z = -a_t(x - 1) \\ (1 + a_t^2)x^2 - 2a_t^2x + y^2 + a_t^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

In particolare, quindi, le coordinate x e y soddisfano l'equazione dell'ellisse definita dall'equazione

$$(1 + a_t^2)x^2 - 2a_t^2x + y^2 + a_t^2 - 1 = 0. \tag{4}$$

Applicando il metodo del completamento dei quadrati otteniamo che (4) è equivalente alla seguente:

$$\left(\sqrt{1 + a_t^2}\, x - \frac{a_t^2}{\sqrt{1 + a_t^2}}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{1 + a_t^2} = 0 \tag{5}$$

Possiamo infine riscrivere la (5) nel modo seguente:

$$\frac{\left(x - \frac{a_t^2}{1+a_t^2}\right)^2}{\frac{1}{(1+a_t^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{1+a_t^2}} = 1 \tag{6}$$

Ne segue che una parametrizzazione della curva $\pi_t \cup S^2$ ($t \neq 1$ fissato) è data da:

$$\left(\frac{1}{1+a_t^2}\cos(2\pi s)+\frac{a_t^2}{1+a_t^2}, \frac{1}{\sqrt{1+a_t^2}}\sin(2\pi s), -a_t\left(\frac{1}{1+a_t^2}\cos(2\pi s)+\frac{a_t^2}{1+a_t^2}-1\right)\right), \quad s \in I$$

Consideriamo, dunque, l'applicazione $F : I \times I \to S^2$ definita da

$$F(s,t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1+a_t^2}\cos(2\pi s)+\frac{a_t^2}{1+a_t^2}, \frac{1}{\sqrt{1+a_t^2}}\sin(2\pi s), -a_t\left(\frac{1}{1+a_t^2}\cos(2\pi s)+\frac{a_t^2}{1+a_t^2}-1\right)\right) & 0 \le t < 1 \\ (1,0,0) & t = 1 \end{cases}$$

dove ricordiamo che $a_t := \frac{t}{1-t}$.
Mostriamo che F è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra α ed il cappio costante c_{x_0}:

- per costruzione F è ben definita, cioè $F(s,t) \in S^2 \,\forall\, (s,t) \in I \times I$;
- F è continua: infatti, essendo $\lim_{t\to 1} a_t = +\infty$, si ha: $\lim_{t\to 1^-} F(s,t) = (1,0,0) = F(s,1)$;
- Essendo $a_0 = 0$ si ha $F(s,0) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 0) = \alpha(s)$; inoltre $F(s,1) = (1,0,0) = c_{x_0}$.
- Mostriamo infine che $\forall\, t \in I$ si ha $F(0,t) = (1,0,0) = F(1,t)$:

  se $t \neq 1$ abbiamo:
  $F(0,t) = F(1,t) = \left(\frac{1}{1+a_t^2}+\frac{a_t^2}{1+a_t^2}, 0, -a_t\left(\frac{1}{1+a_t^2}+\frac{a_t^2}{1+a_t^2}-1\right)\right) = \left(\frac{1+a_t^2}{1+a_t^2}, 0, -a_t\left(\frac{1+a_t^2-1-a_t^2}{1+a_t^2}\right)\right) = (1,0,0) = \alpha(0)$;

  se $t = 1$ abbiamo:
  $F(0,1) = (1,0,0) = F(1,1)$.

  Se consideriamo α come cappio in $S^2 \setminus (0,0,1)$ basta ripetere il ragionamento precedente prendendo questa volta il fascio di piani

  $$\pi'_t : t(x-1) + (t-1)z = 0, \quad t \in I.$$

2. Dimostrare che se P è un poligono etichettato e S è la superficie quoziente, allora ogni cappio in P ha per immagine un cappio in S che è equivalente al cappio costante.
   Possiamo dedurne che S è semplicemente connessa?

   Soluzione:

   Per definizione ogni poligono etichettato è convesso e quindi, per l'esercizio 1 del tutorato 8, ogni cappio α in P è equivalente al cappio costante $c_{\alpha(0)}$.

   Per la tesi dismostriamo il seguente semplice risultato:

   Siano X e Y due spazi topologici e $p : X \to Y$ un'identificazione. Siano inoltre α e β due archi in X; se α e β sono equivalenti, allora anche gli archi $\alpha' := p(\alpha)$ e $\beta' := p(\beta)$ sono equivalenti.

   dim: Sia $F : I \times I \to X$ un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra α e β. Facilmente si verifica che $p \circ F : I \times I \to Y$ è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra α' e β'.

   Sia dunque $p : P \to S$ l'applicazione quoziente (p è un'identificazione). Per il risultato appena dimostrato il cappio $\alpha' := p(\alpha)$ è equivalente al cappio $p(c_{\alpha(0)})$ che è il cappio costante

$c_{\alpha'(0)}$.

Vediamo che questo non implica che S sia semplicemente connessa; un controesempio è dato dal toro $S^1 \times S^1$ che si ottiene dal poligono etichettato $aba^{-1}b^{-1}$ e che non è semplicemente connesso in quanto $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3. Sia X e Y spazi topologici tali che $Y \subset X$. Y si dice un *ritratto* di X se esiste $f : X \to Y$ continua tale che $f(y) = y \, \forall \, y \in Y$.
   Dimostrare che se Y è un ritratto di X e $y \in Y$ allora $\pi_1(Y, y)$ è isomorfo a un sottogruppo di $\pi(X, y)$.
   Dare un esempio di ritratto di X che non sia omotopicamente equivalente a X.

   Soluzione:

   Sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione di Y in X; allora, per definizione di ritratto, $f \circ i = id_Y$. Otteniamo pertanto il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "id_Y"'] & & Y \end{tikzcd}$$

   a cui corrisponde il seguente diagramma di omomorfismi:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X,y) \arrow[dr, "f_*"] & \\ \pi_1(Y,y) \arrow[ur, hook, "i_*"] \arrow[rr, "id_{\pi_1(Y,y)}"'] & & \pi_1(Y,y) \end{tikzcd}$$

   Osserviamo, per prima cosa, che, essendo, i_* un omomorfismo di gruppi, $i_*(\pi_1(Y, y))$ è un sottogruppo di $\pi_1(X, y)$.
   Per la tesi è sufficiente mostrare che $i_*(\pi_1(Y, y)) \cong \pi_1(Y, y)$.

   Consideriamo l'omomorfismo $i_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, y)$. Si ha:

   - $\mathrm{Im}(i_*) = i_*(\pi_1(Y, y))$;
   - $\mathrm{Ker}(i_*) = \{[c_y]\}$; infatti, se $i_*[\alpha] = [c_y] \Rightarrow f_* \circ i_*[\alpha] = f_*([c_y]) = [c_y] \overset{f_* \circ i_* = (f \circ i)_* = id_*}{\Rightarrow} [\alpha] = [c_y]$.

   Dal primo teorema di omomorfismo concludiamo che $\mathrm{Im}(i_*) = i_*(\pi_1(Y, y)) \cong \frac{\pi_1(Y,y)}{\mathrm{Ker}(i_*)} \cong \pi_1(Y, y)$.

   Diamo ora un esempio di ritratto di X che non sia omotopicamente equivalente a X.
   Sia $X = S^1$ e sia $p \in X$. Allora $Y := \{p\}$ è un ritratto di X; infatti, l'applicazione

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto p \end{aligned}$$

   è continua e tale che $f(p) = p$.
   Tuttavia X e Y non sono omotopicamente equivalenti in quanto Y è semplicemente connesso mentre $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

4. Sia X uno spazio topologico. Costruire un'equivalenza omotopica tra X e $X \times I$. Dare un esempio di spazio topologico X tale che X e $X \times I$ non siano omeomorfi.

   Soluzione:

   Consideriamo le seguenti applicazioni:

   $$f : X \to X \times I \qquad\qquad g : X \times I \to X$$
   $$x \mapsto (x, 0) \qquad\qquad (x, t) \mapsto x$$

   f e g sono chiaramente continue. Mostriamo che $f \circ g \simeq id_{X \times I}$ e $g \circ f \simeq id_X$:

   - $(g \circ f)(x) = x \Rightarrow g \circ f = id_X$
   - Per mostrare che $(f \circ g) \simeq id_{X \times I}$, consideriamo l'applicazione $G : (X \times I) \times I \to X \times I$ definita da:
     $$G(x, s, t) = (x, st)$$
     G è continua, ben definita ($0 \leq st \leq 1$ poichè $0 \leq s, t \leq 1$) e $G(x, s, 0) = (x, 0) = (f \circ g)(x, s)$ e $G(x, s, 1) = (x, s) = id_{X \times I}(x, s)$, cioè G è l'omotopia cercata tra $f \circ g$ e $id_{X \times I}$.

   Ne concludiamo che X e $X \times I$ sono omotopicamente equivalenti.

   Diamo ora un esempio di uno spazio topologico X tale che X e $X \times I$ non siano omeomorfi.
   Sia $X = \{p\} \Rightarrow X \times I = \{p\} \times I \approx I$. Dall'impossibilità di poter stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\{p\}$ e I ne deduciamo che non può esistere un omeomorfismo tra X e $X \times I$.

5. Costruire un cappio in $S^1 \times I$ che non è equivalente al cappio costante e che quindi definisca un elemento del gruppo fondamentale che non è l'identità.

   Soluzione:

   Ricordiamo che se X e Y sono spazi topologici e $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ allora

   $$\pi_1((X \times Y), (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

   Nel nostro caso, dunque, abbiamo $\pi_1(S^1 \times I) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(I) \cong \mathbb{Z}$; un isomorfismo è dato da:

   $$\varphi : \pi_1(S^1) \times \pi_1(I) \to \pi_1(S^1 \times I)$$
   $$([\alpha], [\beta]) \quad \longmapsto \quad [\alpha \times \beta]$$

   dove $\alpha \times \beta : I \to S^1 \times I$ è il cappio definito da $(\alpha \times \beta)(t) = (\alpha(t), \beta(t))$.

   Sia, ora, $[\alpha]$ un generatore di $\pi_1(S^1)$ e sia $\{[c_0]\} = \pi_1(I)$ ($c_0(t) \equiv 0$). Allora, $([\alpha], [c_0])$ è un generatore di $\pi_1(S^1) \times \pi_1(I) \Rightarrow \varphi([\alpha], [c_0]) = [\alpha \times c_0]$ è un generatore di $\mathrm{Im}(\varphi) = \pi_1(S^1 \times I)$. Poiché $\pi_1(S^1 \times I)$ è non banale e $[\alpha \times c_0]$ ne è un generatore, $\alpha \times c_0$ non è omotopo al cappio costante.

   Ad esempio, un generatore di $\pi_1(S^1)$ è $[\alpha]$ con $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Dal ragionamento precedente abbiamo che $(\alpha \times c_0)(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$ è un cappio di $S^1 \times I$ non equivalente al cappio costante.

6. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che se $x_0, x_1 \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [f] \quad &\mapsto [\alpha^0 * f * \alpha] \end{aligned}$$

è indipendente dall'arco $\alpha : I \to X$ di estremi x_0 e x_1 se e solo se $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo abeliano.

<u>*Soluzione*</u>:

$\Rightarrow$: Dobbiamo dimostrare che presi, comunque, $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_0)$, si ha $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma_2 * \gamma_1$. Sia α un arco di punto iniziale x_0 e punto finale x_1; poichè anche $\gamma_2 * \alpha$ ha punto iniziale x_0 e punto finale x_1, per ipotesi si ha:

$$\alpha^0 * \gamma_1 * \alpha \sim (\gamma_2 * \alpha)^0 * \gamma_1 * (\gamma_2 * \alpha) \Rightarrow \alpha^0 * \gamma_1 * \alpha \sim \alpha^0 * \gamma_2^0 * \gamma_1 * \gamma_2 * \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha * \alpha^0 * \gamma_1 * \alpha * \alpha^0 \sim \alpha * \alpha^0 * \gamma_2^0 * \gamma_1 * \gamma_2 * \alpha * \alpha^0 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_2^0 * \gamma_1 * \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 * \gamma_1 \sim \gamma_1 * \gamma_2.$$

$\Leftarrow$: Supponiamo, ora, che $\pi_1(X, x_0)$ sia un gruppo abeliano. Dimostriamo che se α_1,α_2 sono due archi di punto iniziale x_0 e punto finale x_1 allora, per ogni $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, si ha $[\alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1] = [\alpha_2^0 * \gamma * \alpha_2]$ ovvero $\alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1 \sim \alpha_2^0 * \gamma * \alpha_2$.
Dato che $\pi_1(X, x_0)$ è commutativo e $\alpha_2 * \alpha_1^0$ è un cappio di base x_0, si ha:

$$\gamma * (\alpha_2 * \alpha_1^0) \sim (\alpha_2 * \alpha_1^0) * \gamma \Rightarrow \gamma * \alpha_2 * \alpha_1^0 * \alpha_1 \sim \alpha_2 * \alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1 \Rightarrow \gamma * \alpha_2 \sim \alpha_2 * \alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2^0 * \gamma * \alpha_2 \sim \alpha_1^0 * \gamma * \alpha_1.$$

7. Si consideri il quoziente $Y := \frac{S^1 \times I}{\rho}$ dove ρ è la relazione di equivalenza che identifica $0 \times S^1$ a un punto e $1 \times S^1$ a un altro punto. Dimostrare che Y è omeomorfo a S^2.

<u>*Soluzione*</u>:

Notiamo, in primo luogo, che $S^1 \times I \approx S^1 \times [-1, 1]$ e che un omeomorfismo è dato dall'applicazione continua

$$\begin{aligned} f : S^1 \times I &\longrightarrow S^1 \times [-1, 1] \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, 2z - 1) \end{aligned}$$

A questo punto, sarà equivalente dimostrare che $Y' := \frac{S^1 \times [-1,1]}{\rho'}$ è omeomorfo ad S^2, dove con ρ' indichiamo la relazione di equivalenza che identifica $S^1 \times (-1)$ a un punto e $S^1 \times 1$ a un altro punto.

Sappiamo che $S^1 \times [-1, 1]$ e S^2 hanno la forma seguente come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:
$S^1 \times [-1, 1] = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in [-1, 1]\}$;
$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Definiamo, dunque, $g : S^1 \times [-1, 1] \to S^2$ nel modo seguente:

$$g((x, y, z)) = (\sqrt{1 - z^2}\, x, \sqrt{1 - z^2}\, y, z), \quad \forall\, (x, y, z) \in S^1 \times [-1, 1]$$

Notiamo che g è continua poiché lo sono le sue componenti e che $\mathrm{Im}(g) \subset S^2$; infatti: $\|g((x, y, z))\| = \sqrt{(1 - z^2)x^2 + (1 - z^2)y^2 + z^2} = \sqrt{(1 - z^2)(x^2 + y^2) + z^2} = 1$.

Consideriamo ora il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} S^1 \times [-1,1] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \\ \dfrac{S^1 \times [-1,1]}{\rho'} \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Per il corollario 7.5, 'Geometria 2' E.Sernesi, si ha che $\tilde{g}$ esiste ed è continua $\Longleftrightarrow$ g è continua ed è compatibile con la relazione ρ' ($x\rho' y \Rightarrow g(x) = g(y)$).

Dimostriamo, dunque, che g è compatibile con la relazione ρ'.
Abbiamo che:

$$\frac{S^1 \times [-1,1]}{\rho'} = \{[(1,0,1)], [(1,0,-1)], [(x,y,z)] \text{ con } z \in (-1,1) \text{ e } x^2 + y^2 = 1\}$$

dove $[(1,0,1)] = \{(x,y,1) : x^2 + y^2 = 1\}$ e $[(1,0,-1)] = \{(x,y,-1) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Bisognerà quindi mostrare che se $(x,y,z) \in [(1,0,1)]$ allora $g(x,y,z) = g(1,0,1)$ e che se $(x,y,z) \in [(1,0,-1)]$ allora $g(x,y,z) = g(1,0,-1)$:

- se $(x,y,z) \in [(1,0,1)] \Rightarrow z = 1 \Rightarrow g(x,y,z) = g(x,y,1) = (0,0,1) = g(1,0,1)$;
- se $(x,y,z) \in [(1,0,-1)] \Rightarrow z = -1 \Rightarrow g(x,y,z) = g(x,y,-1) = (0,0,-1) = g(1,0,-1)$;

In definitiva, $\tilde{g}$ esiste, è continua ed è definita come segue

$$\begin{aligned} \tilde{g} : S^1 \times [-1,1] &\longrightarrow S^2 \\ [(x,y,z)] &\longmapsto g(x,y,z) \end{aligned}$$

Per concludere dobbiamo far vedere che $\tilde{g}$ è un omeomorfismo e lo dimostreremo sfruttando il seguente teorema:
Siano X e Y due spazi topologici, X compatto e Y di Hausdorff. Se $f : X \to Y$ è continua e biunivoca allora f è un omeomorfismo.

Verifichiamo che, nel nostro caso, sono soddisfatte le ipotesi del teorema; infatti:

- $\frac{S^1 \times [-1,1]}{\rho'}$ è compatto perché quoziente di un compatto;
- S^2 è di Hausdorff in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (spazio di Hausdorff);
- $\tilde{g}$ è continua per quanto dimostrato precedentemente.

Rimane da verificare la biettività di $\tilde{g}$.

- $\tilde{g}$ è iniettiva

  se $\tilde{g}([(x,y,z)]) = \tilde{g}([(x',y',z')]) \Rightarrow g(x,y,z) = g(x',y',z') \Rightarrow$
  $\Rightarrow (\sqrt{1-z^2}\,x, \sqrt{1-z^2}\,y, z) = (\sqrt{1-(z')^2}\,x', \sqrt{1-(z')^2}\,y', z') \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-z^2}\,x = \sqrt{1-(z')^2}\,x' \\ \sqrt{1-z^2}\,y = \sqrt{1-(z')^2}\,y' \\ z = z' \end{cases} \tag{7}$$

  Distinguiamo tre casi:

  - se $z \neq \pm 1$ allora da (7) otteniamo $x = x'$,$y = y'$ e $z = z'$, da cui $(x,y,z) = (x',y',z')$. Segue $[(x,y,z)] = [(x',y',z')]$;
  - se $z = z' = 1$ allora (7) è soddisfatto per qualsiasi scelta di x, y, x', y' e in tal caso si ha $[(x,y,1)] = [(1,0,1)] = [(x',y',1)]$;

- se $z = z' = -1$ allora (7) è soddisfatto per qualsiasi scelta di x, y, x', y' e in tal caso si ha $[(x, y, -1)] = [(1, 0, -1)] = [(x', y', -1)]$.

- $\tilde{g}$ è suriettiva

  Distinguiamo nuovamente tre casi:
  - se $z \neq \pm 1$, allora preso $(x, y, z) \in S^2$ si ha $(x, y, z) = \tilde{g}([\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z])$;
  - $(x, y, 1) = \tilde{g}([(1, 0, 1)])$;
  - $(x, y, -1) = \tilde{g}([(1, 0, -1)])$.

  Segue che $\tilde{g}$ è suriettiva in ogni caso.

Abbiamo, quindi, ottenuto che:

$$\frac{S^1 \times I}{\rho} \approx \frac{S^1 \times [-1, 1]}{\rho'} \approx S^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{S^1 \times I}{\rho} \approx S^2$$