Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

Tutorato 9 (26 Maggio 2011)
Omotopia e Gruppo fondamentale

1. Considerare in S^2 il cappio α di base $x_0 = (1,0,0)$ definito da $\alpha(t) = (cos2\pi t, sin2\pi t, 0)$. Dimostrare che α è equivalente al cappio costante costruendo esplicitamente una omotopia relativa tra α e c_{x_0}. Ripetere l'esercizio considerando α come cappio in $S^2 \setminus (0,0,1)$.

2. Dimostrare che se P è un poligono etichettato e S è la superficie quoziente, allora ogni cappio in P ha per immagine un cappio in S che è equivalente al cappio costante.
   Possiamo dedurne che S è semplicemente connessa?

3. Sia X e Y spazi topologici tali che $Y \subset X$. Y si dice un *ritratto* di X se esiste $f : X \to Y$ continua tale che $f(y) = y \,\forall\, y \in Y$.
   Dimostrare che se Y è un ritratto di X e $y \in Y$ allora $\pi_1(Y, y)$ è isomorfo a un sottogruppo di $\pi(X, y)$.
   Dare un esempio di ritratto di X che non sia omotopicamente equivalente a X.

4. Sia X uno spazio topologico. Costruire un'equivalenza omotopica tra X e $X \times I$. Dare un esempio di spazio topologico X tale che X e $X \times I$ non siano omeomorfi.

5. Costruire un cappio in $S^1 \times I$ che non è equivalente al cappio costante e che quindi definisca un elemento del gruppo fondamentale che non è l'identità.

6. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che se $x_0, x_1 \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [f] \quad &\mapsto [\alpha^0 * f * \alpha] \end{aligned}$$

   è indipendente dall'arco $\alpha : I \to X$ di estremi x_0 e x_1 se e solo se $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo abeliano.

7. Si consideri il quoziente $Y := \frac{S^1 \times I}{\rho}$ dove ρ è la relazione di equivalenza che identifica $0 \times S^1$ a un punto e $1 \times S^1$ a un altro punto. Dimostrare che Y è omeomorfo a S^2.