Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

SOLUZIONI TUTORATO 7 (12 MAGGIO 2011)

1. Classificare le superfici definite dai seguenti poligoni etichettati:

   - $abacb^{-1}c^{-1}$;
   - $a_1a_1^{-1}a_2a_2^{-1}\cdots a_{2g-1}a_{2g-1}^{-1}a_{2g}a_{2g}^{-1}$;
   - $a_1a_2\cdots a_ga_1a_2\cdots a_g$;
   - $a_1a_2\cdots a_ga_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_g^{-1}$;
   - $a_1a_2\cdots a_ga_g^{-1}a_{g-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}$;
   - abc, bde, $c^{-1}df$, $e^{-1}fa$;

   <u>*Soluzione*</u>:

   Classificheremo le superfici definite dai poligoni etichettati per mezzo della *caratteristica di Eulero-Poincarè*, poichè quest'ultima è un invariante topologico per una superficie compatta e connessa.
   Ricordiamo che la caratteristica di Eulero-Poicarè χ di una superficie S compatta e connessa ottenuta come quoziente di un poligono etichettato P_{2m} a $2m$ lati, tali che i $2m$ vertici abbiano per immagine k punti distinti di S, è data dalla seguente formula: $\chi(S) = 1+k-m$.
   Richiamiamo, inoltre, che aa^{-1} denota una coppia del primo tipo mentre aa una coppia del secondo tipo.

   - $abacb^{-1}c^{-1}$
     Poichè il poligono etichettato contiene coppie del secondo tipo, la superficie S definita da quest'ultimo è omeomorfa a un multipiano proiettivo $g'\mathbb{P}^2$. Determiniamo g' mediante la caratteristica di Eulero-Poincaré.
     Notiamo che i vertici si ripartiscono in un'unica classe di equivalenza, per cui $\chi(S) = 1+1-3 = -1$. Essendo $\chi(g'\mathbb{P}^2) = 2-g'$, otteniamo che $\chi(S) = \chi(g'\mathbb{P}^2)$ per $g' = 3$. Ne concludiamo che S è omeomorfa a $3\mathbb{P}^2$.
   - $a_1a_1^{-1}a_2a_2^{-1}\cdots a_{2g-1}a_{2g-1}^{-1}a_{2g}a_{2g}^{-1}$
     Poichè il poligono etichettato è costituito unicamente da coppie del primo tipo adiacenti, per il teorema di classificazione, possiamo dunque eliminarle, ottenendo che la superficie di partenza è omeomorfa a quella definita dal poligono etichettato $a_1a_1^{-1}$, cioè a una sfera.

   - $a_1a_2\cdots a_ga_1a_2\cdots a_g$
     Poichè il poligono etichettato contiene coppie del secondo tipo, la superficie S definita da quest'ultimo è omeomorfa a un multipiano proiettivo $g'\mathbb{P}^2$. Determiniamo g' mediante la caratteristica di Eulero-Poincaré.
     Notiamo che i vertici si ripartiscono in g classi di equivalenza, per cui $\chi(S) = 1+g-g = 1$. Essendo $\chi(g'\mathbb{P}^2) = 2-g'$, otteniamo che $\chi(S) = \chi(g'\mathbb{P}^2)$ per $g' = 1$. Ne concludiamo che S è omeomorfa a un piano proiettivo ($\mathbb{P}^2$).

   - $a_1a_2\cdots a_ga_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_g^{-1}$
     Poichè il poligono etichettato è costituito unicamente da coppie del primo tipo, la superficie S da esso definita è un multitoro $g'T$ di cui determineremo g'. Distinguiamo due casi:

- g pari: i vertici si ripartiscono in un'unica classe di equivalenza, per cui $\chi(S) = 1 + 1 - g = 2 - g$. Essendo $\chi(g'T) = 2 - 2g'$, otteniamo che $\chi(S) = \chi(g'T)$ per $g' = \frac{g}{2}$. Ne concludiamo che S è omeomorfa a un $\frac{g}{2}$toro ($\frac{g}{2}T$).
- g dispari: i vertici si ripartiscono in due classi di equivalenza, per cui $\chi(S) = 1 + 2 - g = 3 - g$. Essendo $\chi(g'T) = 2 - 2g'$, otteniamo che $\chi(S) = \chi(g'T)$ per $g' = \frac{g-1}{2}$. Ne concludiamo che S è omeomorfa a un $\frac{g-1}{2}$toro ($\frac{g-1}{2}T$).

- $a_1 a_2 \cdots a_g a_g^{-1} a_{g-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$
  Per il teorema di classificazione, eliminando man mano coppie del primo tipo adiacenti, otteniamo che la superficie è omeomorfa a quella definita dal poligono etichettato $a_1 a_1^{-1}$, cioè a una sfera.

- abc, bde, $c^{-1}df$, $e^{-1}fa$
  Applicando il teorema di classificazione otteniamo che la superficie definita da quest'insieme di poligoni etichettati è omeomorfa alla sfera.

2. Dimostrare che se ogni punto di uno spazio topologico X possiede un intorno connesso allora le componenti connesse in X sono aperte.

   Soluzione:

   Sia $C \subseteq X$ una componente connessa. Sia $x \in C$ e U un intorno connesso di x. Poichè $x \in C \cap U$ e C e U sono connessi, si ha che l'unione $C \cup U$ è connessa $\Rightarrow C \cup U \subseteq C \Rightarrow U \subseteq C \Rightarrow C$ è intorno di x. Dall'arbitrarietà di x si conclude che C è aperta.

3. Dimostrare che ogni ricoprimento aperto di uno spazio topologico a base numerabile X ammette un sottoricoprimento numerabile.

   Soluzione:

   Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile per X e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento qualsiasi di X. Definiamo
   $$\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} : \exists\, U \in \mathcal{U} \text{ tale che } B \subset U\}$$
   Chiaramente, essendo $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ numerabile, sarà $\mathcal{B}'$ numerabile.
   Ora per ogni $B \in \mathcal{B}'$ si scelga un elemento $U_B \in \mathcal{U}$ tale che $B \subseteq U_B$ (U_B esiste per definizione di $\mathcal{B}'$). Ne segue che l'insieme $\mathcal{U}' := \{U_B : B \in \mathcal{B}'\}$ è un sottoinsieme numerabile di $\mathcal{U}$. L'asserto seguirà allora mostrando che $\mathcal{U}'$ è ancora un ricoprimento di X.
   Sia $x \in X \Rightarrow \exists\, U_0 \in \mathcal{U}$ tale che $x \in U_0$ (essendo $\mathcal{U}$ un ricoprimento); allora, dalla definizione di base, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq U_0$, cioè $B \in \mathcal{B}' \Rightarrow U_B \in \mathcal{U}'$ è tale che $x \in B \subseteq U_B$ da cui la tesi, per l'arbitrarietà di x.

4. Dimostrare il seguente risultato:
   Sia X uno spazio che soddisfi il secondo assioma di numerabilità e $\pi : X \to Y$ una mappa quoziente. Se Y è localmente euclideo, allora anche Y soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

   Soluzione:

   Per ogni $y \in Y$ consideriamo U_y l'aperto di Y contenente y ed omeomorfo ad un disco aperto di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo la famiglia $\mathcal{U} := \{U_y\}_{y \in Y}$. Ovviamente $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di Y.
   La famiglia $\{\pi^{-1}(U_y) : U_y \in \mathcal{U}\}$ sarà, dunque, un ricoprimento aperto di X che, per l'esercizio precedente, ammetterà un sottoricoprimento numerabile. Indichiamo con $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ la sottofamiglia numerabile di $\mathcal{U}$ tale che $\{\pi^{-1}(U_y) : U_y \in \mathcal{U}'\}$ ricopre ancora X. Segue che $\mathcal{U}'$ è un ricoprimento numerabile di Y ($Y = \pi(X) = \pi(\cup_{U_y \in U'} \pi^{-1}(U_y)) = \cup_{U_y \in U'} \pi(\pi^{-1}(U_y)) = \cup_{U \in U'} U_y$)

i cui aperti sono omeomorfi a dischi aperti di $\mathbb{R}^n$. Ciascun disco possiede una base numerabile, dunque l'unione di queste basi è una base numerabile di Y.

5. Sia X uno spazio topologico, $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso e $U \subset X$ un aperto contenente K. Dimostrare che, se X e $U \setminus K$ sono connessi, allora anche $X \setminus K$ è connesso.

   Soluzione:

   Supponiamo per assurdo che $X \setminus K$ non sia connesso. Allora esistono A, B aperti non vuoti di $X \setminus K$ tali che $A \cap B = \varnothing$ e
   $$A \cup B = X \setminus K. \tag{1}$$
   (Si noti che A e B sono aperti anche in X; infatti per definizione $A = A_X \cap (X \setminus K)$, dove A_X è un aperto di X; ne segue che, essendo K chiuso, A è intersezione finita di aperti di X e dunque è aperto. Analogamente per B.)
   Chiaramente $U \setminus K$ è un sottospazio connesso di $X \setminus K$. Ne segue che $U \setminus K \subseteq A$ oppure $U \setminus K \subseteq B$.
   Supponiamo
   $$U \setminus K \subseteq A. \tag{2}$$
   Osserviamo che $A \cup K = A \cup U$:

   - $\subseteq$: Basta notare che per ipotesi $K \subseteq U$.
   - $\supseteq$: Da (2) otteniamo che $U = K \cup (U \setminus K) \subseteq A \cup K$; poichè chiaramente vale anche $A \subseteq A \cup K$, si ha $A \cup K \subseteq A \cup U$

   Inoltre $U \cap B = \varnothing$, poichè da (1) $B \cap K = \varnothing$ ed, essendo $U \setminus K \subseteq A$, $(U \setminus K) \cap B = \varnothing$.

   Ne concludiamo che $X = (A \cup K) \cup B = (A \cup U) \cup B$, cioè X è unione di due aperti non vuoti e disgiunti di X, in contraddizione con le ipotesi.

6. Siano M una varietà topologica connessa di dimensione maggiore di 1 e $K \subseteq M$ un sottoinsieme finito contenuto in una carta locale. Dimostrare che $M \setminus K$ è connesso.
   (Sugg.: utilizzare l'esercizio precedente)

   Soluzione:

   In particolare M è di Hausdorff e quindi T1. Ne segue che K è chiuso in M, essendo costituito da un numero finito di punti.
   Per ipotesi esiste un aperto U che contiene K omeomorfo a $\mathbb{R}^n$; sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un omeomorfismo. Per l'esercizio precedente basta mostrare, essendo M connessa per ipotesi, che $U \setminus K$ è connesso.
   Sia dunque $A := \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(k) | k \in K\}$; A è chiaramente connesso (poichè $n > 1$ e K è finito) e $A \cong U \setminus K$. Ne concludiamo che $U \setminus K$ è connesso.

7. Dimostrare che se $\{C_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di compatti in uno spazio di Hausdorff tale che l'intersezione degli elementi di ogni sottofamiglia finita è non vuota allora $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \varnothing$.

   Soluzione:

   Sia C_1 il primo compatto della famiglia $\{C_i\}_{i \in I}$. Supponiamo per assurdo che $\forall\ x \in C_1\ x \notin \bigcap_{i \in I, i \neq 1} C_i \Rightarrow$
   $$\Rightarrow C_1 \cap \left(\bigcap_{i \in I, i \neq 1} C_i \right) = \varnothing. \tag{3}$$

Sia $D_i = C_i^c, \quad \forall\ i \in I$; in particolare, D_i è aperto per ogni $i \in I$ poiché i C_i sono chiusi (compatti in uno spazio di Hausdorff).

Osserviamo che (3)$\Rightarrow C_1 \subseteq \left(\bigcap_{i \in I, i \neq 1} C_i \right)^c = \bigcup_{i \in I, i \neq 1} D_i$, da cui $\bigcup_{i \in I, i \neq 1} D_i$ è un ricoprimento aperto di C_1; essendo C_1 compatto, possiamo estrarne un sottoricoprimento finito ovvero $\exists\ n \in \mathbb{N}, n < +\infty$ tale che $C_1 \subseteq \bigcup_{j=2}^{n} D_{i_j}$.

Segue che $\varnothing = C_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{n} D_{i_j} \right)^c = C_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} C_{i_j} \right)$: assurdo, poiché per ipotesi ogni intersezione di una sottofamiglia finita è non vuota.