Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

Soluzioni Tutorato 6 (5 Maggio 2011)
Varietà topologiche

Osservazione: Nelle soluzioni degli esercizi useremo indifferentemente le seguenti due definizioni equivalenti di *varietà topologica*:

- Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff X che soddisfa il secondo assioma di numerabilità e tale che ogni $p \in X$ possieda un intorno aperto U_p omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$.
- Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff X che soddisfa il secondo assioma di numerabilità e tale che ogni $p \in X$ possieda un intorno aperto U_p omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

1. Dimostrare o confutare con un esempio le seguenti affermazioni:

   (a) Ogni sottospazio di uno spazio a base numerabile è a base numerabile;

   (b) Il prodotto di due spazi a base numerabile è a base numerabile;

   (c) Il quoziente di uno spazio a base numerabile è a base numerabile.

   Soluzione:

   (a) Vero. Infatti se $\mathcal{B}$ è una base numerabile di uno spazio X e $Y \subset X$ allora $\{A \cap Y : A \in \mathcal{B}\}$ è una base numerabile del sottospazio Y.

   (b) Vero. Infatti, se $\mathcal{A}$ è una base di aperti di X e $\mathcal{B}$ è una base di aperti di Y, allora la famiglia
   $$\mathcal{C} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$
   è una base di aperti del prodotto $X \times Y$.
   Se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sono numerabili, allora anche $\mathcal{C}$ è numerabile.

   (c) Falso. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la relazione d'equivalenza $\sim$ definita nel modo seguente
   $$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure } x, y \in \mathbb{Z}.$$
   Mostriamo che $\mathbb{R}/\sim$ non soddisfa il primo assioma di numerabilità; ciò implicherà che $\mathbb{R}/\sim$ non soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

   Indichiamo con $p : R \to R/\sim$ la proiezione al quoziente e con $[z] = p(\mathbb{Z})$ la classe di equivalenza dei numeri interi. Supponiamo, per assurdo, che $[z]$ abbia un sistema fondamentale numerabile di intorni $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che U_n sia aperto per ogni $n \in \mathbb{N}$; segue che $p^{-1}(U_n)$ è aperto e contiene $\mathbb{Z}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   Per ogni $n \in \mathbb{N}$, considero n e $p^{-1}(U_n)$; dal fatto che $n \in p^{-1}(U_n)$ e che $p^{-1}(U_n)$ è aperto, possiamo dunque trovare un numero $0 < d_n < \frac{1}{2}$ tale che $[n - d_n, n + d_n] \subset p^{-1}(U_n)$.
   L'aperto
   $$A := (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n - d_n, n + d_n)$$
   è saturo da cui $p(A)$ è aperto ed è, quindi, un intorno di $[z]$. Ma allora dovrebbe esistere $n \in \mathbb{N}$ tale che $U_n \subseteq p(A)$: assurdo poiché, se così fosse, si avrebbe che $[n - d_n, n + d_n] \subset p^{-1}(U_n) \subseteq p^{-1}(p(A)) = A$.

2. Dimostrare i seguenti risultati sulle varietà topologiche:
   (a) le varietà topologiche di dimensione 0 sono tutti e soli gli spazi topologici discreti a cardinalità numerabile;
   (b) ogni sottoinsieme aperto di una varietà topologica è una varietà topologica della stessa dimensione.

   Soluzione:

   (a) Sia X una varietà topologica di dimensione 0. Allora per ogni $p \in X$ esiste un intorno aperto U di p omeomorfo ad $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{0}\}$; dalla biunivocità dell'omeomorfismo segue dunque che $U = \{p\} \Rightarrow \{p\}$ è aperto, cioè X è discreto. Inoltre, poiché X è a base numerabile ed ogni base della topologia discreta deve contenere tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo punto, X ha cardinalità numerabile.

   Sia viceversa X uno spazio topologico discreto a cardinalità numerabile. Verifichiamo che X soddisfa le tre proprietà delle varietà topologiche.
      i. X è T_2: infatti, ogni spazio discreto è di Hausdorff;
      ii. X è N_2: l'insieme $\{\{p\} : p \in X\}$ costituisce una base per X numerabile;
      iii. $\forall\, p \in X\ \exists$ un intorno aperto $U_p \subseteq X$ di p omeomorfo ad $\mathbb{R}^0$: sia $p \in X$. Consideriamo l'intorno aperto $U_p := \{p\}$ di p e l'applicazione $\varphi : U_p \to \mathbb{R}^0$ tale che $\varphi(p) = \mathbf{0}$; φ è biunivoca, continua e aperta e quindi è un omeomorfismo.

   (b) Sia X una varietà topologica di dimensione n; allora X è T_2, N_2 e $\forall\, p \in X\ \exists$ un intorno aperto $U_p \subseteq X$ di p omeomorfo ad un aperto V_p di $\mathbb{R}^n$.
   Sia ora A un sottoinsieme aperto di X. Verifichiamo che A soddisfa le tre proprietà delle varietà topologiche.
      i. A è T_2: infatti, ogni sottospazio di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff;
      ii. A è N_2: ogni sottospazio di uno spazio N_2 è N_2 (esercizio 1(a));
      iii. $\forall\, p \in A\ \exists$ un intorno aperto $U'_p \subseteq A$ di p omeomorfo ad un aperto V'_p di $\mathbb{R}^n$: sia $p \in A \subseteq X$ e sia $U_p \subseteq X$ l'intorno aperto di p omeomorfo all'aperto V_p di $\mathbb{R}^n$ tramite $\varphi : U_p \to V_p$. Consideriamo $U'_p := U_p \cap A \subseteq A$ intorno aperto di p in A. La restrizione $\varphi|_{U'_p} : U'_p \to \varphi(U'_p)$ è un omeomorfismo e $V'_p := \varphi(U'_p) = \varphi(U_p \cap A)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ in quanto φ è aperta e $U_p \cap A$ è un aperto di U_p.

3. Siano $Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ e $Y_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$. Sia $Y = Y_1 \cup Y_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Dire se Y sia o meno una varietà topologica.

   Soluzione:

   Dimostriamo che Y non è una varietà topologica.
   Supponiamo per assurdo che lo sia. Allora scelto $P := (0, 0)$ esiste un intorno aperto U di P omeomorfo a $\mathbb{R}^n$; sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un omeomorfismo.
   Osserviamo che si può assumere $U \neq Y$: infatti Y non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, $\forall\, n \geq 1$ (Y è compatto mentre $\mathbb{R}^n$ non è compatto se $n \geq 1$) nè omeomorfo a $\mathbb{R}^0$ (perchè non è possibile stabilire tra di essi una corrispondenza biunivoca).

   Ne segue che la restrizione $\varphi|_{U \setminus \{P\}} : U \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(P)\}$ è un omeomorfismo, ma questo è un assurdo poichè $U \setminus \{P\}$ ha 3 o 4 componenti connesse (ne ha 3 nel caso in cui $Y_1 \subseteq U$ oppure $Y_2 \subseteq U$), mentre $\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(P)\}$ ha al più due componenti connesse (nello specifico $\mathbb{R}^n$ ha due componenti connesse se $n = 1$, mentre è connesso per archi se $n > 1$).

4. Dire per quali valori del parametro t i seguenti sotto insiemi di $\mathbb{R}^2$ sono curve topologiche:
   (a) $\mathcal{C}_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy + t = 0\}$;
   (b) $\mathcal{D}_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - t = 0\}$, $t \geq 0$.

<u>*Soluzione*</u>:

Richiamiamo che una *curva topologica* è una varietà topologica di dimensione 1.

(a) Mostriamo che $\mathcal{C}_t$ è una curva topologica se e solo se $t \neq 0$.

- $t = 0$:

  Supponiamo per assurdo che $\mathcal{C}_0$ sia una varietà topologica. Allora scelto $P := (0,0)$ esiste $n \in \mathbb{N}$ e un intorno aperto U di P omeomorfo a $\mathbb{R}^n$; sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un omeomorfismo.
  Ne segue che la restrizione $\varphi|_{U \setminus \{P\}} : U \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(P)\}$ è un omeomorfismo, ma questo è un assurdo poichè $U \setminus \{P\}$ ha 4 componenti connesse , mentre $\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(P)\}$ ha al più due componenti connesse.

- $t \neq 0$:

  Osserviamo, innanzitutto, che $\mathcal{C}_t = \left\{\left(x, -\frac{t}{x}\right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$. Costruiamo un atlante di $\mathcal{C}_t$.

  Siano $U_1 := \left\{\left(x, -\frac{t}{x}\right) : x > 0\right\}$ e $U_2 := \left\{\left(x, -\frac{t}{x}\right) : x < 0\right\}$; chiaramente $\mathcal{C}_t = U_1 \cup U_2$.
  Mostriamo che U_1 e U_2 sono omeomorfi ad aperti di $\mathbb{R}$.
  Sia $p_1 : U_1 \to \mathbb{R}^{>0}$ tale che $p((x,y)) = x$. Si ha:
  - p_1 è chiaramente suriettiva;
  - p_1 è iniettiva: infatti, se $p_1((x_1,y_1)) = p_1((x_2,y_2)) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = -\frac{t}{x_1} = -\frac{t}{x_2} = y_2 \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$;
  - p_1 è chiaramente continua;
  - p_1 ha inversa continua $p_1^{-1} : \mathbb{R}^{>0} \to U_1$ definita nel modo seguente

  $$p_1^{-1}(x) = (x, -\frac{t}{x}).$$

  Ne segue che p_1 è un omeomorfismo. Analogamente si ottiene che $p_2 : U_2 \to \mathbb{R}^{<0}$ tale che $p((x,y)) = x$ è un omeomorfismo.
  La famiglia $\{p_1, p_2\}$ costituisce dunque un atlante di $\mathcal{C}_t$.

(b) Mostriamo che $\mathcal{D}_t$ è una curva topologica se e solo se $t > 0$.

- $t = 0$:
  osserviamo che $\mathcal{D}_0 = \{(0,0)\}$. Ne segue che $U := \{(0,0)\}$ è l'unico intorno aperto di $(0,0)$ e non è omeomorfo ad $\mathbb{R}$, da cui $\mathcal{D}_0$ non è una curva topologica.

- $t \neq 0$:
  Chiaramente $\mathcal{D}_t \cong S^1$ (un omeomorfismo è dato dall'applicazione $\varphi : \mathcal{D}_t \to S^1$ tale che $\varphi((x,y)) = \left(\frac{x}{\sqrt{t}}, \frac{y}{\sqrt{t}}\right)$). Basterà, dunque, mostrare che S^1 è una curva topologica.

  Siano $N := (0,1)$ e $S := (0,-1)$ e siano $U_1 := S^1 \setminus \{N\}$ e $U_2 := S^1 \setminus \{S\}$; chiaramente, $S^1 = U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cong \mathbb{R} \cong U_2$ tramite le proiezioni stereografiche che denotiamo rispettivamente con p_1, p_2. L'insieme $\{p_1, p_2\}$ è un atlante per S^1.

5. Dimostrare che ogni varietà topologica connessa è anche connessa per archi. Dedurne che gli aperti connessi di $\mathbb{R}^n$ sono anche connessi per archi.

   Soluzione:

   Per quanto visto nell'esercizio 10 del tutorato 5 sappiamo che uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.
   Quindi ai fini del nostro esercizio sarà sufficiente mostrare che ogni varietà topologica è localmente connessa per archi.

   Sia dunque X una varietà topologica e sia $p \in X$. Dalla definizione di varietà topologica esiste un intorno aperto U di p omeomorfo a un aperto V di $\mathbb{R}^n$; sia $\varphi_U : U \to V$ un omeomorfismo.

   Sia ora N un intorno di $p \Rightarrow \exists A$ aperto tale che $p \in A \subseteq N$.
   Consideriamo $B := A \cap U$. B è chiaramente aperto e contiene $p \Rightarrow \varphi_U(B)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ che contiene $\varphi_U(p) \Rightarrow$ esiste un disco $D_r(\varphi_U(p))$ di raggio r e centro $\varphi_U(p)$ tale che $\varphi_U(p) \in D_r(\varphi_U(p)) \subseteq \varphi_U(B)$. Ma allora $\varphi_U^{-1}(D_r(\varphi_U(p)))$ è un intorno di p connesso per archi (essendo $D_r(\varphi_U(p))$ connesso per archi) tale che $\varphi_U^{-1}(D_r(\varphi_U(p))) \subseteq B \subseteq A \subseteq N$.

   Chiaramente essendo gli aperti connessi di $\mathbb{R}^n$ varietà topologiche connese segue che essi sono anche connessi per archi.

6. Costruire un atlante per ognuna delle seguenti superfici: il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

   Soluzione:

   - $S^1 \times \mathbb{R}$:

     Consideriamo gli aperti di $S^1 \times \mathbb{R}$ $U_1 := [S^1 \setminus \{(0,1)\}] \times \mathbb{R}$ e $U_2 := [S^1 \setminus \{(0,1)\}] \times \mathbb{R}$; chiaramente $U_1 \cup U_2 = S^1 \times \mathbb{R}$.
     Mostriamo che U_1 e U_2 sono omeomorfi ad $\mathbb{R}^2$; due omeomorfismi sono dati dalle applicazioni

     $$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_1((x,y,z)) = \left(\frac{x}{1-y}, z\right)$$

     $$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_2((x,y,z)) = \left(\frac{x}{1+y}, z\right)$$

     Si osservi che, p_1 e p_2 sono ottenute dalle due proiezioni stereografiche di centro rispettivamente $(0,1)$ e $(0,-1)$ e dall'identità di $\mathbb{R}$.
     Ne segue che la famiglia $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ è un atlante di $S^1 \times \mathbb{R}$.

   - $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

     Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la proiezione e $[x_0, x_1, x_2] := \pi(x_0, x_1, x_2)$. Per ogni $i = 0, 1, 2$ consideriamo l'aperto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $U_i = \{[x_0, x_1, x_2] : x_i \neq 0\}$; chiaramente, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = U_0 \cup U_1 \cup U_2$.
     Mostriamo che $U_i \cong \mathbb{R}^2$; infatti, l'applicazione $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^2$ tale che

     $$\varphi_i([x_0, x_1, x_2]) = (\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i})$$

     è un omeomorfismo. Ne segue che la famiglia $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ è un atlante di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

7. Sia $X = D_1 \cup D_2$ dove con D_i indichiamo un disco chiuso in $\mathbb{R}^2$. Assegnare un omeomorfismo tra $C_1 = \partial D_1$ e $C_2 = \partial D_2$ e dimostrare che il quoziente di X ottenuto identificano punti corrispondenti di C_1 e C_2 è omeomorfo a S^2.
   Generalizzare l'esercizio a S^n.

<u>*Soluzione*</u>:

A meno di omeomorfismi, possiamo assumere che $D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$ e $D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Siano $C_1 := \partial D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$ e $C_2 := \partial D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + y^2 = 1\}$. Consideriamo l'omeomorfismo $\varphi : C_1 \to C_2$ tale che $\varphi((x, y)) = (x-4, y)$. Introduciamo su X la relazione di equivalenza $\sim$ che identifica punti corrispondenti, tramite φ, di C_1 e C_2, definita formalmente nel modo seguente:

$$p \sim q \Leftrightarrow (p = q) \text{ oppure } (p \in C_1, q \in C_2 \text{ e } q = \varphi(p)) \text{ oppure } (p \in C_2, q \in C_1 \text{ e } p = \varphi(q))$$

Sia $\pi : X \to X/\sim$ l'applicazione quoziente.

Siano ora $f_1 : D_1 \to S^2$ e $f_2 : D_2 \to S^2$ le applicazione definite nel modo seguente:

$$f_1((x, y)) = (x-2, y, \sqrt{1-(x-2)^2-y^2}),$$
$$f_2((x, y)) = (x+2, y, \sqrt{1-(x+2)^2-y^2});$$

Definiamo allora l'applicazione $f : X \to S^2$ incollamento delle applicazioni f_1 e f_2:

$$\forall\, x \in X, f(x) = f_i(x) \text{ se } x \in D_i.$$

Ci si può facilmente convincere che f è un'identificazione. Inoltre risulta $f(p) = f(q)$ ogni volta che $p \sim q$, ovvero f è compatibile con $\sim$. Dalla teoria sappiamo quindi che esiste un'applicazione continua $g : X/\sim \to S^2$ definita come segue:

$$g((\pi(x))) = f(x), \forall\, \pi(x) \in X/\sim .$$

Si può facilmente verificare che g è biettiva.
Si ha quindi il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^2 \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Essendo g biettiva e f un'identificazione concludiamo che g è un omeomorfismo, da cui $X/\sim \cong S^2$.

L'esempio si può facilmente generalizzare ad S^n.
Siano $D_1 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1-2)^2 + \cdots x_n^2 \leq 1\}$ e $D_1 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1+2)^2 + \cdots x_n^2 \leq 1\}$ e siano $C_1 := \partial D_1$ e $C_2 := \partial D_2$. Consideriamo l'omeomorfismo $\varphi : C_1 \to C_2$ tale che $\varphi((x_1, \dots x_n)) = (x_1 - 4, x_2, \dots, x_n)$.
Introduciamo su X la relazione di equivalenza $\sim$ che identifica punti corrispondenti, tramite φ, di C_1 e C_2, definita formalmente nel modo seguente:

$$p \sim q \Leftrightarrow (p = q) \text{ oppure } (p \in C_1, q \in C_2 \text{ e } q = \varphi(p)) \text{ oppure } (p \in C_2, q \in C_1 \text{ e } p = \varphi(q))$$

Siano ora $f_1 : D_1 \to S^2$ e $f_2 : D_2 \to S^n$ le applicazione definite nel modo seguente:

$$f_1((x_, \dots, x_n)) = (x_1 - 2, x_2, \dots, x_n, \sqrt{1-(x_1-2)^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}),$$
$$f_2((x_, \dots, x_n)) = (x_1 - 2, x_2, \dots, x_n, \sqrt{1-(x_1+2)^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2});$$

Definiamo allora l'applicazione $f : X \to S^2$ incollamento delle applicazioni f_1 e f_2:

$$\forall\, x \in X, f(x) = f_i(x) \text{ se } x \in D_i.$$

Procedendo come sopra si conclude che $X/\sim \cong S^n$.