Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

Tutorato 5 (28 Aprile 2011)
Connessione e Connessione per archi

1. Dimostrare che una funzione continua $f : X \to Y$, con $X \neq \varnothing$ connesso e Y discreto è costante.

2. Siano $Z_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - (1,0)\| < 1\}$,$Z_{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - (-1,0)\| < 1\}$; dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi:
   - $A = Z_1 \cup Z_{-1}$;
   - $B = A \cup \{(0,0)\}$;
   - $C = A \cup \{(-2,0),(2,0)\}$;
   - $D = A \cup \{\mathbf{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1\}$;
   - $E = A \cup \{\mathbf{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$.

3. (a) Siano Y uno spazio topologico connesso ed $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tale che $f^{-1}(y)$ è connesso per ogni $y \in Y$. Se f è aperta oppure chiusa, allora anche X è connesso.
   (b) Utilizzare il risultato precedente per dimostrare che il prodotto di due spazi topologici connessi è connesso.

4. Dimostrare che il prodotto di due spazi topologici connessi per archi è connesso per archi.

5. (a) Siano X e Y spazi topologici e sia $f : X \to Y$ un omeomorfismo. Dimostrare che f manda componenti connese in componenti connesse. Dedurne che due spazi topologici omeomorfi hanno lo stesso numero di componenti connesse.
   (b) Sia X uno spazio topologico e sia E un sottoinsieme non vuoto di X. Verificare che, se E è connesso, aperto e chiuso, allora E è una componente connessa di X.
   (c) Sia $Y := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$; dopo aver verificato che Y è connesso, dimostrare che Y non è omeomorfo alla retta euclidea $(\mathbb{R}, \varepsilon)$.
   (d) Dimostrare che il cilindro e il cono non sono omeomorfi.
   (e) Dire quali delle seguenti lettere sono tra loro omeomorfe (come figure piane): O, T, D, U, X, V.

6. Dire se il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin \mathbb{Q}$ oppure $y \notin \mathbb{Q}\}$ è connesso per archi.

7. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua e biunivoca tale che $f(S^{n-1}) = S^{n-1}$. Dimostrare che $f(D_1(0)) = D_1(0)$.

8. Verificare che gli insiemi $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ e $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ sono sconnessi.

9. Si consideri il sottospazio X di $\mathbb{R}^2$ costituito dalle circonferenze C_n di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
   (a) E' connesso?
   (b) E' connesso per archi?
   (c) E' compatto?
   (d) Si risponda alle domande (a) e (b) e (c) per $X' = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1\} \cup X$.
   (e) Sia $S := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$; si risponda alle domande (a) e (b) e (c) per $X'' = X'/\sim_S$. Si dica inoltre se X'' è di Hausdorff.

10. Dimostrare che uno spazio topologico X connesso e localmente connesso per archi è connesso per archi.