Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi
Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

Soluzioni Tutorato 4 (7 Aprile 2011)
Spazi di Hausdorff e Compattezza

1. Dimostrare che l'essere T_1 (rispettivamente T_2) è una proprietà topologica per uno spazio X.

   Soluzione:

   Ricordiamo che una proprietà si dice topologica se è invariante per omeomorfismi.

   Siano dunque X e Y due spazio omeomorfi e sia $g : X \to Y$ un omeomorfismo; mostriamo che X è T_1 (risp. T_2) $\Leftrightarrow Y$ è T_1 (risp T_2).
   Osserviamo, inoltre, che è sufficiente dimostrare una delle due implicazioni poiché l'inversa di un omeomorfismo è ancora un omeomorfismo.

   T_1 Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio $T_1 \Rightarrow \forall x \in X, \{x\}$ è chiuso. Sia $y \in Y \Rightarrow \exists x \in X$ tale che $g(x) = y$. Essendo g un'applicazione chiusa segue che $\{y\}$ è chiuso in $Y \Rightarrow Y$ è T_1.

   T_2 Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio T_2.
   Siano $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Consideriamo $x_1 := g^{-1}(y_1)$ e $x_2 := g^{-1}(y_2)$; è chiaro che $x_1 \neq x_2$. Esistono, allora, per ipotesi, due aperti $U_X, V_X \subset X$ tali che $x_1 \in U_X$, $x_2 \in V_X$ e $U_X \cap V_X = \varnothing$.
   Siano, ora, $U_Y := g(U_X)$ e $V_Y := g(V_X)$; si ha: $y_1 \in U_Y$, $y_2 \in V_Y$ con U_Y, V_Y aperti in Y (g è aperta in quanto omeomorfismo) e $U_Y \cap V_Y = \varnothing$. Infatti: se, per assurdo, esistesse $z \in U_Y \cap V_Y \Rightarrow g^{-1}(z) \in g^{-1}(U_Y \cap V_Y) = g^{-1}(U_Y) \cap g^{-1}(V_Y) = U_X \cap V_X = \varnothing$: contraddizione, in quanto g è suriettiva.
   Segue la tesi.

2. Dimostrare che uno spazio X è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$.

   Soluzione:

   $\Rightarrow$: Supponiamo che X sia di Hausdorff.
   Mostriamo che Δ^c è aperto in $X \times X$ verificando che tutti i suoi punti sono interni. Siano $x, y \in X$ tali che $(x, y) \in \Delta^c \Rightarrow x \neq y$. Per ipotesi, esistono due aperti $U, V \subset X$ tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$. Chiaramente $U \times V$ è un aperto di $X \times X$ che contiene il punto (x, y); sarà dunque sufficiente far vedere che $U \times V \subset \Delta^c$ o equivalentemente che $(U \times V) \cap \Delta = \varnothing$.
   Se, per assurdo, esistesse $(x', y') \in (U \times V) \cap \Delta \Rightarrow x' \in U, y' \in V$ e $x' = y' \Rightarrow x' = y' \in U \cap V = \varnothing$: contraddizione.

   $\Leftarrow$: Supponiamo che Δ sia chiusa (ovvero Δ^c aperto). Siano $x, y \in X$ con $x \neq y \Rightarrow (x, y) \notin \Delta$ ovvero $(x, y) \in \Delta^c$. Essendo Δ^c aperto $\exists U, V$ aperti di X tali che $(x, y) \in U \times V \subset \Delta^c \Rightarrow x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$. Infatti: se, per assurdo, esistesse $z \in U \cap V \Rightarrow (z, z) \in U \times V \subset \Delta^c$: assurdo.

3. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che se X è dotato della topologia cofinita allora X è compatto.

Soluzione:

Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X.
Sia $\bar{i} \in I$; consideriamo $A_{\bar{i}} \Rightarrow A_{\bar{i}} = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. $\forall\, j = 1, \ldots, n$ sia $i_j \in I$ tale che $x_j \in A_{i_j} \Rightarrow X = A_{\bar{i}} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}\right)$, da cui, $\{A_{\bar{i}}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ è un sottoricoprimento finito di X.

4. Date due topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{W}$ su X con $\mathcal{W} < \mathcal{T}$ dire quali delle seguenti affermazioni è vera, motivando la risposta:

   (a) se $(X, \mathcal{T})$ è compatto $\Rightarrow (X, \mathcal{W})$ è compatto;

   (b) se $(X, \mathcal{W})$ è compatto $\Rightarrow (X, \mathcal{T})$ è compatto.

   Soluzione:

   (a) L'affermazione è vera.
   Supponiamo $(X, \mathcal{T})$ compatto.
   Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X nella topologia $\mathcal{W}$; in particolare, essendo $\mathcal{T}$ più fine di $\mathcal{W}$, $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X rispetto alla topologia $\mathcal{T}$.
   Dall'ipotesi di compattezza , possiamo estrarre da $\mathcal{U}$ un sottoricoprimento finito $\mathcal{U}'$. Ne segue che $(X, \mathcal{W})$ è compatto.

   (b) L'affermazione è falsa.
   Un controesempio è dato da uno spazio topologico X infinito dotato rispettivamente della topologia discreta $\mathcal{T}$ e di quella cofinita $\mathcal{W}$ $(\mathcal{W} < \mathcal{T})$.
   Infatti, dall'esercizio 3, sappiamo che $(X, \mathcal{W})$ è compatto, mentre $(X, \mathcal{T})$ non lo è perché il ricoprimento aperto $\{\{x\}, x \in X\}$ non ammette un sottoricoprimento finito.

5. Dire quali tra i seguenti spazi topologici sono compatti:

   (a) lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$;

   (b) $\mathbb{R}$ rispettivamente con le topologie i_d, j_d, i_s, j_s.

   Soluzione:

   (a) Richiamiamo dalla teoria che il quoziente di uno spazio topologico compatto è compatto e che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \approx S^n / \sim_A$ dove $\sim_A$ è la relazione antipodale definita nel modo seguente:

   $$x \sim_A y \Leftrightarrow y = \pm x.$$

   Dalla compattezza di S^n (chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$) segue la compattezza di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$;

   (b) Osserviamo che j_d,j_s sono più fini della topologia euclidea ε; poiché $\mathbb{R}$ non è compatto in ε, utilizzando l'esercizio 4, concludiamo che $\mathbb{R}$ non è compatto né in j_s né in j_d;

   Dimostriamo, inoltre, che $\mathbb{R}$ non è compatto nelle topologie i_s,i_d. In particolare, basterà provare l'asserto per una qualsiasi delle due topologie essendo $(\mathbb{R}, i_s) \approx (\mathbb{R}, i_d)$.
   Consideriamo, quindi, $(\mathbb{R}, i_d)$ ed il ricoprimento $\mathcal{U} := \{(-n, +\infty) : n \in \mathbb{N}\}$ di $\mathbb{R}$.
   Se, per assurdo, $\mathcal{U}$ possedesse un sottoricoprimento finito $\mathcal{U}'$ allora esisterebbe $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbb{R} = \bigcup_{A \in U'} A = (-n_0, +\infty)$: contraddizione.

6. Sia $X = D^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

   (a) dimostrare che X non è compatto senza usare il corollario 9.13.

(b) dimostrare che X/ρ è compatto, dove $x\,\rho\, y \Leftrightarrow \exists\, \lambda \neq 0$ tale che $y = \lambda x$.

Soluzione:

(a) Consideriamo il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{D_{\frac{2}{n}}(0) : n \in N \setminus \{0\}\}$ di X.
Mostriamo che $\mathcal{U}$ non possiede un sottoricoprimento finito.
Se, per assurdo, esistesse un sottoricoprimento finito $\mathcal{U}'$ di $\mathcal{U}$ allora esisterebbe $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $X \subset D_{\frac{2}{n_0}}(0)$; ma questo è impossibile perchè, ad esempio, il punto $P := (\frac{1}{n_0}, 0) \in X$ non sta in $D_{\frac{2}{n_0}}(0)$.

(b) Per la tesi è sufficiente far vedere che X/ρ è omeomorfo a $S^1/\sim_A$.
Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S^1 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X/\rho & \xrightarrow{g} & S^1/\sim_A \end{array}$$

dove p e q sono le applicazioni quoziente e $f : X \to S^1$ è definita come segue:

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|},\ \forall\, x \in X.$$

Inoltre, essendo verificata la condizione:

$$x\rho x' \Rightarrow f(x) \sim_A f(x'),\ \forall\, x, x' \in X,$$

possiamo definire $g : X/\rho \to S^1/\sim_A$ nel modo seguente:

$$g([x]_\rho) = g(p(x)) = q(f(x))$$

Da ciò segue anche la commutatività del diagramma precedente.

A questo punto per dimostrare che g è un omeomorfismo basta far vedere (come già fatto in altri esercizi simili) che g è biettiva e f è un'identificazione (in modo tale che $q \circ f$ sia un'identificazione, in quanto composizione di identificazioni).

- f è un'identificazione:
  f è chiaramente continua e suriettiva. Sia dunque $A \subseteq S^1$ tale che $f^{-1}(A)$ sia aperto. E' facile convincersi che $A = S^1 \cap f^{-1}(A)$, osservando che
  $f^{-1}(A) = \{x = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) : (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \in A,\ 0 < r \leq 1\}$. Ne segue che A è aperto in S^1.

- g è biettiva:

  <u>iniettività</u>: Siano $[x]_\rho = p(x)$ e $[x']_\rho = p(x') \in X/\rho$ tali che $g([x]_\rho) = g([x']_\rho) \Rightarrow g(p(x)) = g(p(x')) \Rightarrow q(f(x)) = q(f(x')) \Rightarrow f(x) = \pm f(x') \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} = \pm\frac{x'}{\|x'\|} \Rightarrow x = \pm\frac{\|x\|}{\|x'\|}x' \Rightarrow x = \lambda x'$, $\lambda = \pm\frac{\|x\|}{\|x'\|} \neq 0 \Rightarrow p(x) = p(x') \Rightarrow [x]_\rho = [x']_\rho$.

  <u>surierrività</u>: Sia $[y]_{\sim_A} = q(y) \in S^1/\sim_A$, $y \in S^1$. Per la suriettività di f esiste $x \in X$ tale che $y = f(x) \Rightarrow [y]_{\sim_A} = q(f(x)) = g(p(x)) = g([x]_\rho)$, $[x]_\rho \in X/\rho$.

7. Sia X uno spazio topologico e siano $K_1, \ldots, K_n$ sottoinsiemi di X.
Dimostrare che, se $K_1, \ldots, K_n$ sono compatti allora $K_1 \cup \ldots \cup K_n$ è compatto.

Soluzione:

Sia $K = K_1 \cup \dots K_n$ e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di K; in particolare, $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di $K_i \,\forall\, i = 1, \dots, n$. Dall'ipotesi di compattezza dei K_i, $\forall i = 1, \dots, n$ esiste un sottoricoprimento finito $\mathcal{U}_i$ di $\mathcal{U}$ che ricopre K_i.
Allora $\mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ che ricopre K.

8. Sia $X = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 con la topologia indotta dall'omeomorfismo $M_2(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^4$ che fa corrispondere la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ al vettore (a, b, c, d).
Siano $Y \subseteq X$ l'insieme delle matrici invertibili e $Z \subseteq X$ l'insieme delle matrici ortogonali. Provare che Y è un aperto e Z è un compatto.

Soluzione:

- $Y := \{A \in X | \det(A) \neq 0\}$.
Consideriamo l'applicazione continua det:$M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante. Posto $U := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, abbiamo che $Y = \det^{-1}(U)$ e, quindi, Y è aperto in $M_2(\mathbb{R})$ in quanto preimmagine di un aperto tramite un'applicazione continua.
- Sia $\phi : (M_2(\mathbb{R}), \phi^{-1}(\varepsilon)) \to (\mathbb{R}^4, \varepsilon)$ l'omeomorfismo tale che $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, b, c, d)$.
Sarà, dunque, sufficiente dimostrare che $\phi(Z)$ è un compatto in $\mathbb{R}^4$, ovvero che è chiuso e limitato.
Osserviamo che:
$Z := \{A \in X | A\,{}^tA = I\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in X \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = I\right\} =$
$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in X | \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$

  Ne segue che:

  $\phi(Z) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \, a^2 + b^2 = 1, \quad ac + bd = 0 \quad \text{e} \quad c^2 + d^2 = 1\}$

  Siano $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - 1$, $f_2 = x_1x_3 + x_2x_4$, $f_3 = x_3^2 + x_4^2 - 1$ con $f_i \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4]$, $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $\forall\, i = 1, 2, 3$.
E' chiaro che

  $$\phi(Z) = \{\mathbf{x} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} \in f_i^{-1}(0), i = 1, 2, 3\} = \bigcap_{i=1}^{3} f_i^{-1}(0).$$

  Poiché i polinomi f_i sono continui e $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ si ha che $\phi(Z)$ è intersezione di chiusi e quindi è chiuso in $\mathbb{R}^4$.

  Resta da verificare che $\phi(Z)$ è limitato.
Sia $\mathbf{x} = (a, b, c, d) \in \phi(Z) \Rightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \sqrt{2}$.
Pertanto, $\phi(Z)$ è nella frontiera del disco $D_{\sqrt{2}}(0)$ di $\mathbb{R}^4$ ed è, perciò, un insieme limitato.

9. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione d'insiemi; il grafico di f è

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\} \subsetneq X \times Y.$$

Dimostrare che se X e Y sono spazi topologici, Y di Hausdorff, ed f è continua, il grafico Γ_f è chiuso in $X \times Y$.

Soluzione:

Mostreremo che Γ^c è aperto in $X \times Y$.
Sia $(x, y) \in \Gamma^c \Rightarrow y \neq f(x) \Rightarrow$ esistono due aperti $U, V \subset Y$ tali che $y \in U$, $f(x) \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.
Sia $A := f^{-1}(V)$: $x \in A$ ed, essendo f continua, A è aperto in X. Consideriamo l'aperto $A \times U$ di $X \times Y$; è chiaro che $(x, y) \in A \times U$. Per la tesi rimane da far vedere che $A \times U \subset \Gamma^c$.
Infatti: se, per assurdo, esistesse $(x', y') \in (A \times U) \cap \Gamma \Rightarrow y' = f(x') \in f(A) = f(f^{-1}(V)) \subset V \Rightarrow y' \in U \cap V = \emptyset$: assurdo.

10. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ lo spazio topologico indotto dalla distanza $\underline{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$\underline{d}(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Verificare che la successione $\{\frac{n}{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 1 in $(\mathbb{R}, \underline{d})$.
(b) Verificare che la successione $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non converge in $(\mathbb{R}, \underline{d})$.

Soluzione:

(a) Sia $x_n := \frac{n}{n+1}$; per provare l'asserto mostriamo che fissato $\epsilon > 0$ $\exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in D_\epsilon(1)$, $\forall\, n > n_\epsilon$.
Osserviamo che:

$$\underline{d}(x_n, 1) = \underline{d}\left(\frac{n}{n+1}, 1\right) = \left| \frac{\frac{n}{n+1}}{1 + |\frac{n}{n+1}|} - \frac{1}{1 + |1|} \right| = \left| \frac{1}{2(2n+1)} \right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Ne segue che, scelto $n_\epsilon > \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$, si ha che, per ogni $n > n_\epsilon$, $\underline{d}(x_n, 1) < \epsilon$ cioè $x_n \in D_\epsilon(1)$.

(b) Sia $x_n := n$. Supponiamo, per assurdo, che x_n converga ad $a \in \mathbb{R}$. In tal caso, risulterebbe che la successione $\{\underline{d}(x_n, a)\}$ è convergente a 0 in $(\mathbb{R}, d)$ dove d è la metrica euclidea di $\mathbb{R}$.
Ora:

$$\underline{d}(x_n, a) = \underline{d}\,(n, a) = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{a}{1 + |a|} \right|;$$

Notiamo che: $\frac{a}{1+|a|} < 1$. Pertanto si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{d}(x_n, a) = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n}{n+1} - \frac{a}{1 + |a|} \right| = \left| \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} - \frac{a}{1 + |a|} \right| = \left| 1 - \frac{a}{1 + |a|} \right| = 1 - \frac{a}{1 + |a|} > 0$$

Dunque,$\{d(x_n, a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ non converge a 0 e si ha un assurdo.